Analisi Matematica 1
Canale D

28 ottobre 2011

ESERCIZIO 1

Determinare *sup* e *inf* ed eventuali *max* e *min* dei seguenti insiemi

1. $\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \ln(1 + e^{-n}), n \in \mathbb{N}\}$,
2. $\left\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \arctan\left(\frac{\cos(\pi n)}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$,
3. $\left\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \frac{2n}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\right\}$,
4. $\left\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \left(3 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}, n \in \mathbb{N}\right\}$,
5. $\{y \in \mathbb{R}; y = x^2 + x, x \in \mathbb{R}\} \cap \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$,
6. $\left\{y \in \mathbb{R}; y = \frac{1}{\ln(1 + |x|)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\}$,
7. $\{y \in \mathbb{R}; y = ||x| - 1| + 1\} \cap \{y \in \mathbb{R}; y(y - 2) < 0\}$.

ESERCIZIO 2

Dimostrare le seguenti affermazioni usando il principio di induzione.

1. Per ogni $n \geq 4$ vale la seguente disuguaglianza $2^n \leq n!$
2. Per ogni $n \geq 1$ vale la seguente identità $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

3. Per ogni $n \geq 1$ il numero $n^2 + n$ è pari.

ESERCIZIO 3

Calcolare i seguenti limiti di successione

1. $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n-4}{n-1} \right)^n$
2. $\lim_{n \to +\infty} \frac{(2^n - n^2)^4}{(4^n - n^4)^2}$
3. $\lim_{n \to +\infty} n^2 \ln(1 - 2^{-n})$
4. $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n^4 + n^3} - n^2}$
5. $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n^2 + n) - \ln(n^2)}{\sin \frac{2}{n}}$
6. $\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\ln(n+1) - \ln(n)}$
7. $\lim_{n \to +\infty} [(n+1)^n - n^{n+1}]$
8. $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln[3^n + \cos(3^n)]}{n}$
9. $\lim_{n \to +\infty} \frac{n! e^{n - \frac{1}{2} \ln n}}{n^n}$
10. $\lim_{n \to +\infty} n^{\frac{2n+1}{2}} \arctan \left(\frac{1}{n!} \right) \ln(1 + e^{-n})$

ESERCIZIO 5

Calcolare il seguente limite di successione al variare di x in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{n! \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{(\sqrt{1 + e^{-n}} - 1) e^{n \ln n + nx}}$$

ESERCIZIO 6

Calcolare i seguenti limiti di funzione

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \left(e + \dfrac{2}{x} \right)^{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\tan^3 x} - 1}{x(\cos x - e^{x^2})}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x} \sin(e^{-x} \sin x)}{x}$

5. $\lim\limits_{x \to 1} x^{-\frac{1}{\ln x}}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + \tan^4 x)}{e^{2 \sin^4 x} - 1}$

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(\sqrt{25 + \arctan(5^{x} - 1)} - 5 \right)$