

Analisi Matematica III

Esercizi sulle funzioni di variabile complessa

Ottobre 2005

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2(3-z)}$$

Scrivere tutti i possibili sviluppi di Laurent di f centrati in $z_0 = 0$.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{z-3}$$

Scrivere tutti i possibili sviluppi di Laurent di f centrati in $z_0 = 3$.

Esercizio 3

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{2z-1}{z^2-z-2}$$

Scrivere tutti i possibili sviluppi di Laurent di f centrati in $z_0 = 0$.

Esercizio 4

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = (z-2)^2 e^{\frac{1}{z+1}}$$

Scrivere tutti i possibili sviluppi di Laurent di f centrati in $z_0 = -1$.
Classificare il punto z_0 e determinare il residuo della f in quel punto.

Esercizio 5

Determinare e classificare le singolarità della seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1 - \cos(z - 1)}{(z - 1)^4} + \frac{e^{1/z}}{\sin z}$$

Esercizio 6

Determinare e classificare le singolarità della seguente funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1 - \cos(2z)}{z^4 \sin \frac{1}{z+1}}$$

Esercizio 7

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f_n(z) = \frac{z^n}{1 - \cos z}$$

Al variare di $k \in \mathbb{Z}$, determinare e classificare le singolarità al finito di $f_k(z)$.

Esercizio 8

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{(z + 2)^3}{(z + 1)^3}$$

Scrivere lo sviluppo di Laurent di f centrato in $z_0 = -1$.

Classificare il punto z_0 e determinare il residuo della f in quel punto.

Esercizio 9

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f_n(z) = \frac{1}{z^n} (1 - \cosh z - \sinh z).$$

Al variare di $k \in \mathbb{Z}$,

- i) Classificare il punto z_0 .
- ii) Scrivere lo sviluppo di Laurent di f_k centrato in $z_0 = 0$.
- iii) Determinare il residuo della f_k in $z_0 = 0$.

Esercizio 10

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f_n(z) = \frac{1}{z^n} (1 - \cosh z - \sinh z).$$

Al variare di $k \in \mathbb{Z}$,

- i) Classificare il punto z_0 .
- ii) Scrivere lo sviluppo di Laurent di f_k centrato in $z_0 = 0$.
- iii) Determinare il residuo della f_k in $z_0 = 0$.

Esercizio 11

Si calcoli l'integrale

$$\int_{C_3(0)} \frac{e^z}{z^2(z+2)} dz$$

dove $C_r(z_0)$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio r .

Esercizio 12

Si calcoli l'integrale

$$\int_{C_{1/3}(0)} \frac{e^{1/z}}{1+z^2} dz$$

dove $C_r(z_0)$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio r .

Esercizio 13

Si calcoli l'integrale

$$\int_{C_3(0)} \frac{e^{1/z^2}}{1+z} dz$$

dove $C_r(z_0)$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio r .

Esercizio 14

Si calcoli l'integrale

$$\int_{C_3(0)} \frac{e^z + e^{-z}}{(1+z)^2(z-2)} dz$$

dove $C_r(z_0)$ è la circonferenza di centro z_0 e raggio r .

Esercizio 15

Si calcoli con metodi di analisi complessa il seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$$

Esercizio 16

Si calcoli con metodi di analisi complessa il seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

Esercizio 17

Si calcoli con metodi di analisi complessa il seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(9+x^2)^2} dx.$$

Esercizio 18

Si calcoli con metodi di analisi complessa il seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 6x + 10)^2} dx.$$

Esercizio 19

Si calcoli con metodi di analisi complessa il seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

Esercizio 20

Si calcoli il valore principale del seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x - \pi} dx.$$

Esercizio 21

Si calcoli con metodi di analisi complessa il seguente integrale di variabile reale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)^2} dx.$$

Esercizio 22

Si calcoli il valore principale del seguente integrale di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{27 + x^3} dx.$$