Compito A

Prova intermedia di Analisi Matematica III

L'Aquila, 5 novembre 2005 – Docente: B. Rubino

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \ , \ \ \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{(x-1)^2+y^2} \right)$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e di classe C^1.
- Verificare se F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare il suo potenziale P tale che $P(2,0) = 0$.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Gauss in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (3x, \ -y, \ z)$$

e il dominio

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 \leq 81 \right\}.$$

Esercizio 3

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = (z+1)^2 e^{\frac{1}{z-2}}$$

Scrivere tutti i possibili sviluppi di Laurent di f centrati in $z_0 = 2$.
Classificare il punto z_0 e determinare il residuo della f in quel punto.

L'Aquila, 2 dicembre 2005

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Prova orale il: ____

Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(z) = \frac{\sin^2(z)}{z(z^2+1)}$$

Studiarne i punti singolari isolati, classificarli e calcolarne i residui.

Esercizio 2

Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \big(yz,\ xz,\ xy+z^2\big)$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = x^2+y^2,\ 1 \le z \le 4\big\}$$

orientata in modo tale che la terza componente del versore normale sia negativa.

Esercizio 3

Facendo uso della formula dell'area, calcolare l'area della superficie piana

$$\mathcal{S} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \ge x^2,\ \ x^2+y^2 \le 2\big\}\,.$$

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\, dx.$$

Esercizio 5

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = \sin t \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare del parametro reale α.

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 16u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) = 3 + 5\cos(6x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 1 + 8\cos(3x) & 0 < x < \pi \\ u_x\,(0,t) = u_x\,(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

L'Aquila, 16 dicembre 2005

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Prova orale il: ____

Esercizio 1

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \big((x-1)^2, -2xy, 2z\big)$$

e l'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2

Sia data la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} x \cos(x) \left(e^y + e^{-y}\right) + \frac{1}{2} y \sin(x) \left(e^y - e^{-y}\right) + x^2 - y^2.$$

- Verificare che u è armonica su $\mathbb{R}^2$.
- Determinare la famiglia delle armoniche coniugate di u.
- Determinare la famiglia di funzioni olomorfe di cui u è la parte reale.

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(z) = \frac{z^2 + 4z - 4}{(z-1)^2(z-2)},$$

determinarne i punti singolari isolati, classificarli e calcolare i residui in tali punti. Sviluppare quindi $f(z)$ in serie di Laurent centrata in $z_0 = 1$ e convergente in i.

Esercizio 4

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 8. \end{cases}$$

Esercizio 5

Facendo uso del metodo delle caratteristiche, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + x\cos(t)u_x = x\cos(t) \\ u(x,0) = 2x - 3. \end{cases}$$

Esercizio 6

Sia $f(x)$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ \pi & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi, \end{cases}$$

estesa dispari nell'intervallo $[-\pi, 0]$ e periodica di periodo 2π.

- Disegnare il grafico di $f(x)$.
- Determinare la serie di Fourier associata ad $f(x)$.
- Studiare la convergenza puntuale e uniforme di tale serie, giustificando opportunamente le affermazioni.

Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 9 gennaio 2006

Corso di studi: ____________________________

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Prova orale: 13 gennaio 2006 ore 9:30

Esercizio 1

Determinare lo sviluppo in serie di Laurent della funzione $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ nell'insieme $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-i| < 2\}$.

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{4xz}{\sqrt{4x^2+y^2-1}}, \ \frac{yz}{\sqrt{4x^2+y^2-1}}, \ \sqrt{4x^2+y^2-1} \right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^3$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 3

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq x^2+y^2-1, \ z \leq -x^2-y^2+1 \right\}.$$

Esercizio 4

Utilizzando il teorema dei residui, calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\cos x - 3}{4\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx.$$

Esercizio 5

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = 2x + y \\ x(0) = 3, \qquad y(0) = 5. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 3, t > 0 \\ u(x,0) = 7\cos\left(\frac{5\pi}{3}x\right) - 5\cos\left(\frac{7\pi}{3}x\right) & 0 < x < 3 \\ u_x\,(0,t) = u_x\,(3,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 24 marzo 2006

Corso di studi: ____________________________

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Prova orale: ____________________________

Esercizio 1

Determinare lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z_0 = -5$ per la funzione

$$f(z) = \frac{(z+3)^3}{(z+5)^3}$$

Classificare poi z_0 e determinare il residuo di f in tale punto.

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}, \frac{x+y}{x^2+y^2} \right)$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 3

Verificare il teorema di Gauss–Green per il campo vettoriale $F(x,y) = (x^2 - 4y^2,\ x^2 + 4y^2)$ e la regione

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}.$$

Esercizio 4

Sia
$$u(x) = \frac{1}{x^2+4x+5} * \left(e^{-(x-1)}H(x-1)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$
dove $*$ indica la convoluzione. Calcolare la trasformata di Fourier di u.

Esercizio 5

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = (H(t-\pi) - H(t)) \cos t \\ \\ y(0) = y'(0) = 0, \end{cases}$$
dove H è la funzione di Heaviside.

Esercizio 6

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:
$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 6, \\ \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < 6 \\ u_t(x,0) = 0 & 0 < x < 6 \\ u\,(0,t) = u\,(6,t) = 0 & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
dove
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } 0 \le x \le 3, \\ 12 - 2x & \text{se } 3 < x \le 6. \end{cases}$$

Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 7 aprile 2006

Corso di studi: ____________________________

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Prova orale: ____________________________

Esercizio 1

Mediante il metodo dei residui calcolare l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{25 - 24\cos\vartheta}$$

Esercizio 2

Facendo uso del teorema di Stokes calcolare la circuitazione del campo vettoriale $F(x, y, z) = (\cos(\pi y),\ \sin(\pi x), 0)$ attorno al rettangolo di vertici $A = (0, 1, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (1, 1, 0)$ percorso in senso antiorario per una persona in piedi che guarda dall'orgine.

Esercizio 3

Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $\gamma(t) = (t, 3t^2, 6t^3)$.

Esercizio 4

Dopo averla disegnata, sviluppare in serie di Fourier la funzione $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \max\{\pi - x, 0\}$, dove con $\max\{a, b\}$ si indica il massimo tra a e b.

Esercizio 5

Facendo uso della trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -5u - 2v \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6

Data la funzione $u(x, y) = e^{-3x} \sin(3y)$,

a) verificare che u è una funzione armonica;

b) trovare tutte le funzioni olomorfe f di cui u è parte reale.

Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 4 luglio 2006
Corso di studi: ____________________________
Cognome e nome: ____________________________
Matricola: ____________________________
Prova orale: ____________________________

Esercizio 1

Facendo uso della formula dell'area, calcolare l'area dell'insieme $\mathbb{T}$ la cui frontiera è sostegno della curva parametrizzata da

$$\varphi : \begin{cases} x = 2(1+\cos t)\cos t \\ \\ y = 2(1+cost)\sin t. \end{cases} \qquad -\pi \leq t \leq \pi$$

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = (1 + ye^{xy},\ xe^{xy} + \cos y)\,.$$

Dire se F è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \pi, \\ u(x,\pi) = \sin(5x) & 0 < x < \pi, \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

Esercizio 5

Applicando la trasformata di Fourier (rispetto ad x), esprimere come prodotto di convoluzione la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{per } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ \\ u(x,0) = e^{-|x|} & \text{per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Esercizio 6

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = H(t-\pi) \\ \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

dove $H(\tau)$ indica la funzione di Heaviside.

Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 24 luglio 2006

Corso di studi: ____________________________

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ____________________________

Prova orale: ____________________________

Esercizio 1

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale $F(x, y, z) = (x + y + z, y^2, z^2)$ e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

Esercizio 2

Calcolare l'area della Γ della superficie sferica di centro l'origine e raggio $\sqrt{5}$ staccata dal cono di equazione $x = 2\sqrt{y^2 + z^2}$.

Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + 4u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = -\sin x & 0 < x < \pi, \\ u(x, \pi) = \sin(3x) & 0 < x < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 4

Facendo uso dei metodi di analisi complessa, si calcoli il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{2ix}}{(1+x^2)(4+x^2)} dx$$

Esercizio 5

Dopo aver verificato che la funzione $u(x,y) = x^2 - y^2$ è armonica nel piano (x,y), scrivere le armoniche coniugate.

Esercizio 6

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 3y'(t) = 4e^{-t}H(t) \\ \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

dove $H(\tau)$ indica la funzione di Heaviside.

Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 5 settembre 2006

Corso di studi: ______________________

Cognome e nome: ______________________

Matricola: ______________________

Prova orale: ______________________

Esercizio 1

Si calcoli la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{1}{4}e^{-|5t|}$$

Esercizio 2

Mediante la trasformata di Laplace, risolvere la seguente equazione:

$$y(t) - 2\int_0^t [(t-\tau) - \sin(t-\tau)]y(\tau)d\tau = \sqrt{2}\; tH(t),$$

dove $H(\tau)$ indica la funzione di Heaviside.

Esercizio 3

Facendo uso dei metodi di analisi complessa, si calcoli il seguente integrale di variabile reale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)}dx$$

Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = 3\cos(\pi x) - 5\cos(2\pi x) + 2 & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 5

Si consideri il parallelepipedo

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 1\right\}.$$

Verificare il teorema di Gauss per il dominio $\mathcal{D}$ e il campo vettoriale $F(x,y,z) = (0,0,xyz)$.

Esercizio 6

Si calcoli (a meno del segno) il flusso del campo vettoriale $F(x,y,z) = (0,0,xyz)$ attraverso il rettangolo di vertici $A = (0,0,0)$, $B = (3,0,0)$, $C = (0,2,1)$, $D = (3,2,1)$.

Analisi Matematica III (6 CFU)
Prova scritta: 20 settembre 2006
Corso di studi: ______________________
Cognome e nome: ______________________
Matricola: ______________________
Prova orale: 22 settembre 2006 alle ore 9.30

Esercizio 1

Risolvere il seguente problema mediante l'uso della Trasformata di Laplace

$$\begin{cases} y''' - 2y' + y = H(t)e^{-t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1, \end{cases}$$

dove $H(t)$ è la funzione di Heaviside.

Esercizio 2

Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-3)},$$

(a) Determinare e classificare i punti di singolarità di f,

(b) Scrivere lo sviluppo di Laurent di f centrato in $z = 0$ e convergente in $2i$.

Esercizio 3

Facendo uso dei metodi di analisi complessa, si calcoli la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \ .$$

Esercizio 4

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = 5\sin 2x & 0 < x < \pi, \\ u_t(x,0) = -\sin 4x, & \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 5

Dato il campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \left(\frac{8x-8}{4(x-1)^2+y^2}, \frac{2y}{4(x-1)^2+y^2} \right) \quad ,$$

(a) Determinare il dominio di F,

(b) Stabilire se F è conservativo sul suo dominio,

(c) In caso di risposta affermativa alla domanda (b), determinare un potenziale per F.

Esercizio 6

Mediante la formula dell'area, calcolare l'area della superficie del dominio

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 - x \leq y \leq 4 - x^2 \ \right\}.$$