L'Aquila, 6 dicembre 2004

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Prova orale il: ____

Esercizio 1

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + t u_x = u + t \\ \\ u(x,0) = \sin x. \end{cases}$$

Esercizio 2

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \sin(3x) - 3\sin(5x) & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 3

Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{x^2+y^2}, \ \frac{2yz}{x^2+y^2}, \ z + \log\left(x^2+y^2\right) \right).$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0, \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \right\}$$

orientata con versore normale $\mathbf{n} = (0,0,1)$.

Esercizio 4

Facendo uso della formula dell'area, calcolare l'area della superficie piana

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 4

Data l'equazione

$$y^2 - x + \log\left(e^x + \arctan y\right) = 0,$$

- dimostrare che definisce implicitamente una e una sola funzione $y = \phi(x)$ in un intorno di $(x, y) = (0, 0)$.
- Trovare lo sviluppo di Taylor di $y = \phi(x)$ nell'origine con un errore $o\left(x^2\right)$.

Esercizio 5

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = e^x - e^{-x}. \end{cases}$$

- Individuarne i punti critici e classificarli.
- Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6

Sia data la funzione 2π–periodica dispari definita in $[0, \pi]$ da

$$f(x) = 1 - \cos x.$$

- Dopo averla disegnata, determinarne la relativa serie di Fourier.
- Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme di tale serie.

L'Aquila, 20 dicembre 2004 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ______________________________

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Esercizio 1

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t - \sin(t)\ u_x = x + t \\ \\ u(x,0) = x - 1. \end{cases}$$

Esercizio 2

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + 9\ u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi \\ u\,(x,0) = \cos(3x) & 0 < x < \pi \\ u\,(x,\pi) = \cos(5x) & 0 < x < \pi \\ u_x\,(0,y) = u_x\,(\pi,y) = 0 & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 3

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (y,\ z,\ 0)\,.$$

e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq 1, \quad x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esercizio 4

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = x + \log\left(1 + y^2\right). \end{cases}$$

- Individuarne i punti critici e classificarli.
- Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 5

Data l'equazione

$$\log\left(1 + e^x - e^{-y}\right) + \arctan\left(x^2 - y^2\right) = 0,$$

- dimostrare che definisce implicitamente una e una sola funzione $y = \phi(x)$ in un intorno di $(x, y) = (0, 0)$.
- Trovare lo sviluppo di Taylor di $y = \phi(x)$ nell'origine con un errore $o\left(x^2\right)$.

Esercizio 6

Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

a) pari,

b) 2π-periodica,

c) tale che, nell'intervallo $[0, \pi]$, è definita da

$$f(x) = \sin x - \sin(3x).$$

6.1) Dopo averla disegnata, determinarne la relativa serie di Fourier.

6.2) Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme di tale serie.

L'Aquila, 10 gennaio 2005 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1 [2,5 punti]

Classificare l'equazione alle derivate parziali del second'ordine nelle variabili (x, y)

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = x + y.$$

Esercizio 2 [2,5 punti]

Calcolare la lunghezza della curva γ parametrizzata da

$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ & t \in [0,1] \\ y = 4t^2. \end{cases}$$

Esercizio 3 [5 punti]

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) = 1 + \cos x + 3\cos(10x) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 4 [5 punti]

Verificare il teorema di Gauss in $\mathbb{R}^2$ per il campo vettoriale

$$F(x,y) = (x,\ xy).$$

e la regione

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \le 2, \quad 0 \le y \le 4 + \cos x\right\}.$$

Esercizio 5 [5 punti]

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = x - y^2. \end{cases}$$

[2 punti] - a) Individuarne i punti critici e classificarli.

[3 punti] - b) Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6 [5 punti]

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \; \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

[1 punto] - a) Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.

[1 punto] - b) Verificare che F è irrotazionale.

[3 punti] - c) Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 7 [5 punti]

Sia data la funzione che nell'intervallo $[0,\pi]$ è espressa da

$$f(x) = \sin x \cos x.$$

[1/2 punto] - a) Disegnare f in $[0,\pi]$.

[1,5 punti] - b) Estendere f nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ pari e in particolare disegnarla.

[1/2 punto] - c) Estendere f 2π-periodica a tutta la retta reale e in particolare disegnarla.

[2 punti] - d) Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

[1/2 punto] - e) Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme di tale serie.

L'Aquila, 21 marzo 2005 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ______________________________

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Esercizio 1

Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = u + 1 \\ u(1, y) = y^2 + 5 \end{cases}$$

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x, y) = \left(\frac{2x + 2x^3 + 2xy^2}{x^2 + y^2}, \frac{2y - 2x^2y - 2y^3}{x^2 + y^2} \right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{per } \rho < 1 \\ u = \sin(\vartheta) + 3\cos(\vartheta) & \text{per } \rho = 1, \end{cases}$$

dove $u = u(\rho, \vartheta)$, $\triangle u = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho} u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2} u_{\vartheta\vartheta}$.

Esercizio 4

Verificare il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$$

e la superficie

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z^2 = x^2 + y^2,\quad 1 \le z \le 4\right\}.$$

Esercizio 5

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + y^3 \\ \\ \dot{y} = x^3 - y. \end{cases}$$

a) Individuarne i punti critici e classificarli.

b) Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6

Sia data la funzione 2π periodica definita da

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & \text{per} \quad -\pi \le x \le 0, \\ 1 + \sin x & \text{per} \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione.

b) Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.

c) Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.

L'Aquila, 4 aprile 2005 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1

Calcolare la lunghezza di curva cartesiana γ il cui supporto è grafico della funzione

$$y = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{per } 0 < x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{per } x = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(\frac{y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad -\frac{x + x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare se F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.

Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = -\sin(3x) + \sin(7x) & 0 < x < \pi \\ u(x,1) = 2\sin(7x) & 0 < x < \pi \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 & 0 < y < 1. \end{cases}$$

Esercizio 4

Verificare il teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$$

e la superficie

$$\mathcal{Q} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = 0,\quad |x| \leq 1,\quad |y| \leq 1\right\}.$$

Esercizio 5

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = -x + e^y \end{cases}$$

a) Individuarne i punti critici e classificarli.

b) Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6

Sia data la funzione 2π periodica definita in $[-\pi, \pi)$ come

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

a) Disegnare la funzione.

b) Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.

c) Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.

L'Aquila, 4 luglio 2005 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1

Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y) = \left(3x^2 + \frac{2xy}{x^2+y^2}\ ,\ \ \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2+y^2}\right).$$

- Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.
- Verificare che F è irrotazionale.
- Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale. Calcolare poi il lavoro per andare da $A = (0,-1)$ a $B = (1,0)$.

Esercizio 2

Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (x,y,z)$$

attraverso la superficie

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = 0,\ y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ \\ u(x,0) = 1 + \sin x, & 0 < x < \pi, \\ \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} (xt - x)u_t + u_x = 1 \\ \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

Esercizio 5

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \\ \dot{y} = x + x^3 + y^2. \end{cases}$$

a) Individuarne i punti critici e classificarli.

b) Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6

Sia data la funzione 2π periodica definita in $(-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} - \pi < x < -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ \\ 0 & \text{per} - \frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione.

b) Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.

c) Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.

L'Aquila, 22 luglio 2005 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1

Calcolare l'area della superficie piana delimitata dalla curva

$$\gamma = \left\{(x, y,) \in \mathbb{R}^2 : \ y - x^2 \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esercizio 2

Verificare il teorema della divergenza per il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (\sin x, \cos y, 0)$$

e il dominio

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = \sin(4y), & 0 < y < \pi. \end{cases}$$

Esercizio 4

Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + u_x = x + u \\ u(x, 0) = \sin x + \cos x. \end{cases}$$

Esercizio 5

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \\ \dot{y} = 2x + \dfrac{2x}{1+x^4} + 4x^3. \end{cases}$$

a) Individuarne i punti critici e classificarli.

b) Dopo aver indagato sull'esistenza di un integrale primo, disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6

Sia data la funzione 2π periodica definita in $(-\pi, \pi]$ come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad -\pi < x < -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ \\ -x & \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ \\ x & \text{per} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione.

b) Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.

c) Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.

L'Aquila, 5 settembre 2005 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1

Sia data la curva $\gamma : [0,1] \to \Gamma \subset \mathbb{R}^2$ definita da:

$$\gamma(t) = \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3. \end{cases}$$

1. Dimostrare (giustificando opportunamente la risposta) che la curva è rettificabile e **successivamente** calcolarne la lunghezza.
2. Dato il campo vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definito da $F(x,y) = (2xy, x^2 + y)$, calcolare il suo lavoro lungo la curva Γ.
3. Dimostrare (giustificando opportunamente la risposta) che il campo vettoriale F è conservativo nel suo dominio di definizione e **successivamente** calcolare un suo potenziale e verificare infine il risultato del punto 2.

Esercizio 2

Calcolare l'area della superficie del paraboloide

$$\Pi = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R} : \ z = x^2 + 3y^2, \ z \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 3

Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - 2u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ \\ u(x,0) = 3 + \cos(2x), & 0 < x < \pi, \\ \\ u_t(x,0) = 5, & 0 < x < \pi, \\ \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2u_t + \log(t)u_x = tu \\ \\ u(x,1) = 2x. \end{cases}$$

Esercizio 5

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - y^3 \\ \\ \dot{y} = x + x^3 + y^2. \end{cases}$$

a) Individuarne i punti critici e classificarli.

b) Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6

Sia data la funzione pari e 2π periodica definita in $[0,\pi]$ come

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ \\ \dfrac{2}{\pi}x & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione in $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Determinare i coefficienti di Fourier di tale funzione.

c) Studiare le proprietà di convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier associata.

L'Aquila, 19 settembre 2005 – Docente: B. Rubino

Prova scritta di Analisi Matematica III (6 CFU)

Corso di Laurea ____

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1

Nel dominio

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \geq 2, \ |z| \leq \pi/4\right\}$$

si consideri il campo vettoriale irrotazionale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x\tan^2(z) - y\tan(z) + 2x}{(y - x\tan(z))^2 + (2x^2+y^2-1)}, \frac{-x\tan(z)+2y}{(y - x\tan(z))^2 + (2x^2+y^2-1)}, \right.$$
$$\left. + \frac{x^2\tan^3(z) - xy\tan^2(z) + x^2\tan(z) - xy}{(y - x\tan(z))^2 + (2x^2+y^2-1)} \right).$$

Stabilire *a priori* se è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne un potenziale.

Esercizio 2

Verificare l'uguaglianza stabilita dal Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale $F = (2x, -3y, z)$ e la superficie $\mathcal{S}$ frontiera della regione

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 1, \ 0 \leq z \leq x+2\right\}.$$

Esercizio 3

Mediante il metodo di separazione di variabili, risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \frac{1}{2} - \cos(2x) & 0 < x < \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Utilizzando il metodo delle curve caratteristiche, determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2yu_x - xu_y = u & \text{in } x > 0, \quad y < 0 \\ \\ u(x,0) = x & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Esercizio 5

Sia dato il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x \\ \\ \dot{y} = \arctan\left(y - x^2\right). \end{cases}$$

a) Individuarne i punti critici e classificarli.

b) Disegnarne approssimativamente il ritratto di fase (giustificando opportunamente quanto ottenuto).

Esercizio 6

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier delle funzioni 1-periodiche che nell'intervallo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ valgono

$$u(t) = \sin t, \quad v(t) = \cos t.$$