

INTRODUZIONE

Il programma del corso è organizzato nel modo seguente =

- Nella prima parte verranno ~~presentati~~ presentati alcuni metodi per risolvere sistemi di equazioni differenziali lineari.
- Si passerà poi ad affrontare lo studio ^{dei sistemi di} delle equazioni differenziali non lineari, al quale verrà dedicata la parte principale del programma. Verrà presentata essenzialmente la teoria qualitativa sviluppata da Poincaré alla fine del XIX secolo. Si tratterà di descrivere il comportamento qualitativo dell'insieme delle soluzioni di un dato sistema di equazioni differenziali. A tale scopo sarà necessario sviluppare la teoria locale per i sistemi non lineari. In particolare verrà presentato il teorema di esistenza ed unicità locale, il teorema di Hartman-Grobman e il teorema della varietà stabile; questi ultimi due teoremi affermano che il comportamento di un sistema non lineare vicino ad un punto di equilibrio è lo stesso del ~~relativo~~ sistema lineare associato.
- Torneremo poi alla teoria globale, presentando un'analisi degli insiemi limite delle traiettorie e del comportamento delle traiettorie all'infinito. Giungeremo perciò alla presentazione delle tecniche per costruire il ritratto di fase globale per sistemi dinamici 2×2 .
- Nell'ultima parte studieremo sistemi dinamici dipendenti da un parametro. La domanda chiave sarà: per quali valori del parametro il ritratto di fase globale cambia la sua struttura qualitativa?

La risposta a tale domanda costituisce la cosiddetta teoria della biforcazione ~~che sarà introdotta~~ le cui linee fondamentali saranno presentate a chiusura del corso.

PREREQUISITI

I prerequisiti a questo corso sono:

- a) l'algebra lineare (come trovare un autovettore e un autovettore di un'applicazione lineare rappresentata da una matrice quadrata)
- b) l'analisi reale (in particolare il concetto di convergenza uniforme)

Tali concetti verranno comunque adeguatamente ripresi all'occorrenza.

CAPITOLO 1 - SISTEMI LINEARI

In questo capitolo si studiano sistemi di equazioni differenziali lineari della forma

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$, A è una matrice $n \times n$ e

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

Vedremo che la soluzione del sistema (1), accoppiata alla condizione iniziale $x(0) = x_0$, è data da

$$x(t) = e^{At} x_0,$$

dove e^{At} è una matrice $n \times n$ definita mediante il suo sviluppo di Taylor. Buona parte del primo capitolo è proprio dedicato al calcolo della matrice e^{At} in termini degli autovalori e degli autovettori della matrice quadrata A .

Nel seguito tutti i vettori sono da considerare vettori-colonna. La trasposta di una matrice A verrà indicata con A^T .

1.1 - Sistemi lineari disaccoppiati

Si consideri l'equazione differenziale lineare del 1° ordine
 $\dot{x} = a x$, $a \in \mathbb{R}$.

Mediante la separazione delle variabili ~~o~~ l'integrale generale è dato da

$$x(t) = c e^{at}$$

dove la costante $c = x(0)$, ovvero corrisponde al valore della ~~costante~~ funzione $x(t)$ al tempo $t=0$.

Se consideriamo adesso il seguente sistema lineare disaccoppiato

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

tale sistema può essere scritto in forma compatta come

$$\dot{x} = A x$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si noti che in tal caso la matrice A è diagonale. In generale, ogni qual volta A è una matrice diagonale, il sistema (1) si riduce a un sistema lineare disaccoppiato. La soluzione generale di tale sistemi può anche essere trovata per separazione di variabili. Nel caso dell'esempio precedente è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (2)$$

o, in modo equivalente, da

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} C, \quad (2')$$

dove $C = x(0)$.

Dalla (2), eliminando la t si ha:

$$\begin{cases} e^{-t} = \frac{x_1}{c_1} \\ e^{2t} = \frac{x_2}{c_2} \end{cases} \quad \begin{cases} t = -\log \frac{x_1}{c_1} \\ t = \frac{1}{2} \log \frac{x_2}{c_2} \end{cases}$$

$$\log \frac{c_1}{x_1} = \log \sqrt{\frac{x_2}{c_2}}$$

$$\left(\frac{c_1}{x_1}\right)^2 = \frac{x_2}{c_2}$$

$x_1^2 x_2 = c_1^2 c_2$ e, detto $K = c_1^2 c_2$, si ottiene la

curva algebrica

$$x_1^2 x_2 = K.$$

La soluzione (2) o (2') definisce pertanto un moto lungo tali curve (fissato il dato iniziale e fissata la costante K).

Tale moto può essere descritto geometricamente disegnando le curve soluzione nel piano $x_1 x_2$, detto piano delle fasi e indicando con delle frecce la direzione del moto lungo tali curve al crescere del tempo.

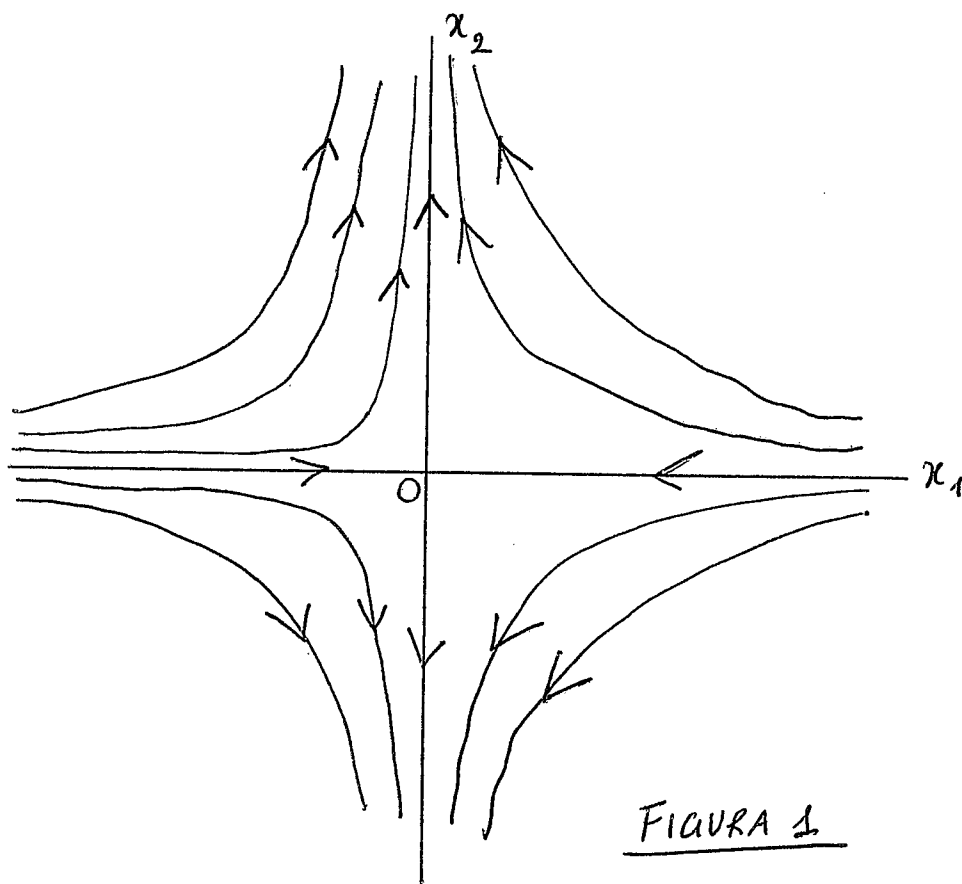


FIGURA 1

Per $c_1 = c_2 = 0$, $x_1(t) = 0$ e $x_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ e l'origine viene detto punto di equilibrio. ~~Si~~ Si osserva che le soluzioni che partono da un punto dell'asse x_1 , tendono all'origine per $t \rightarrow +\infty$, mentre le soluzioni che partono da un punto dell'asse x_2 , tendono all'origine per $t \rightarrow -\infty$.

Il ritratto di fase di un sistema di equazioni differenziali come (1) con $x \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutte le curve soluzioni di (1) nello spazio delle fasi \mathbb{R}^n .

Geometricamente, il sistema dinamico descrive il moto dei punti nello spazio delle fasi lungo le curve soluzione definite dai sistemi di equazioni differenziali.

Nel caso di un sistema 2×2 , la funzione $f(x) = Ax$ a destra di (1) definisce un'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (in questo caso lineare).

Tale applicazione, non necessariamente lineare come vedremo nel capitolo successivo, definisce un campo vettoriale su \mathbb{R}^2 : se noi disegniamo ogni vettore $f(x)$ con punto iniziale in $x \in \mathbb{R}^2$, otteniamo una rappresentazione geometrica del campo vettoriale.

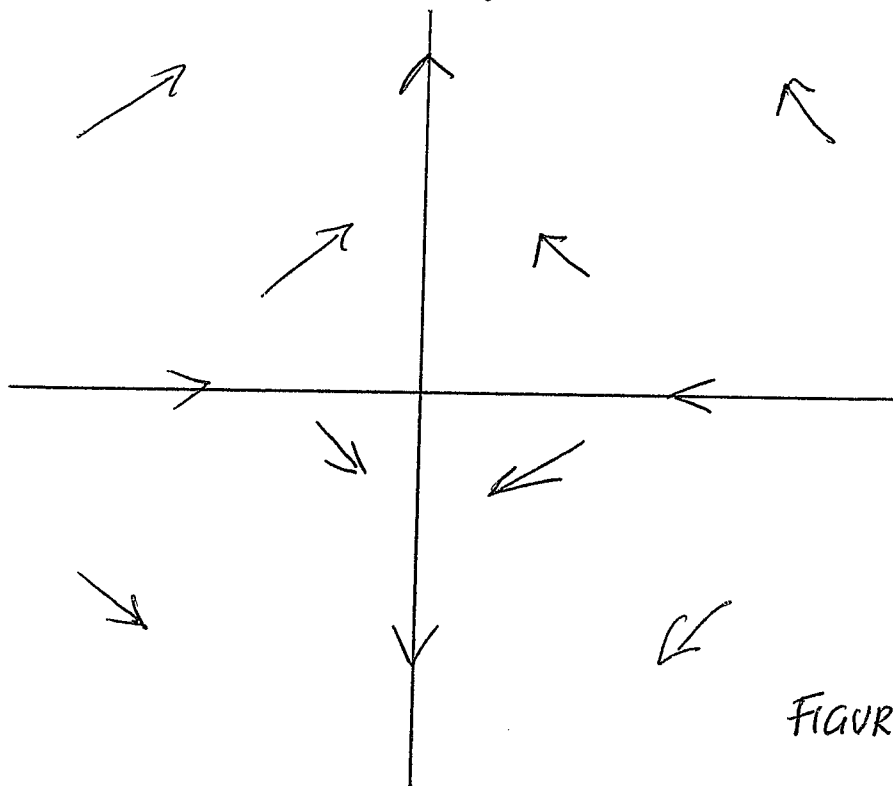


FIGURA 2

Ad ogni punto x del piano delle fasi si osserva che le curve soluzione ~~di~~ (2) sono tangenti ai vettori del campo Ax : infatti, al tempo $t=t_0$, il vettore velocità $v_0 = \dot{x}(t_0)$ è tangente alla curva $x=x(t)$ nel punto $x_0=x(t_0)$ e dal fatto che $\dot{x}=Ax$ lungo le curve soluzione.

Si consideri ora il seguente sistema lineare disaccoppiato 3×3 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases}$$

La soluzione generale è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t \\ x_2(t) = c_2 e^t \\ x_3(t) = c_3 e^{-t} \end{cases}$$

Il piano delle fasi va ora rappresentato in \mathbb{R}^3

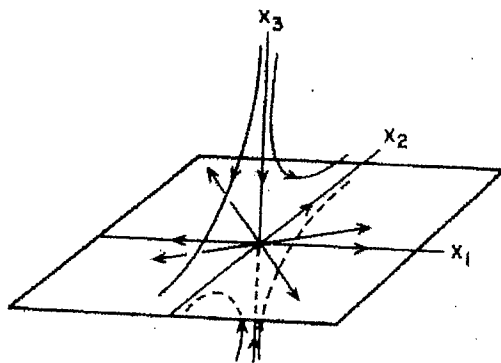


FIGURA 3

1.2 - DIAGONALIZZAZIONE

La tecnica algebrica per diagonalizzare una matrice quadrata A può essere usata per ridurre ~~il~~ il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

ed un sistema lineare disaccoppiato. Considereremo il caso in cui A ha autovalori reali e distinti. Basterà in tal caso far uso del seguente teorema di algebra lineare per risolvere il sistema lineare (1).

TEOREMA. - Se gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di una matrice $n \times n$ A sono reali e distinti, allora ogni insieme di autovettori corrispondenti $\{v_1, \dots, v_n\}$ forma una base di \mathbb{R}^n . Inoltre la matrice $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ è invertibile e si ha

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \Lambda$$

(la matrice diagonale che ha nella diagonale principale gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$).

~~Il~~ Il teorema implica pertanto che, se una trasformazione lineare $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ di \mathbb{R}^n , allora rispetto ad ogni base di autovettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ T è rappresentata dalla matrice diagonale di autovalori $\text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n] = \Lambda$

Per ridurre il sistema (1) ad un sistema lineare disaccoppiato mediante l'uso del teorema precedente, definiremo la trasformazione $y = P^{-1}x$,

dove P è la matrice (invertibile) definita nel teorema.

Perciò

$$x = Py,$$

$$\dot{y} = P^{-1} \dot{x} = P^{-1} A x = P^{-1} A P y = \Lambda y,$$

per cui abbiamo ottenuto ~~la~~ il sistema lineare disaccoppiato

$$\dot{y} = \Lambda y$$

Le soluzioni $y(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] y(0)$.

Poiché $y(0) = P^{-1} x(0)$ e $x(t) = P y(t)$, si ha

$$x(t) = P E(t) P^{-1} x(0), \quad (2)$$

dove $E(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]$

Corollario. - Sotto le ipotesi del teorema precedente, la soluzione del sistema lineare (1) è data dalla funzione $x(t)$ definita da (2).

ESEMPIO. - Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases}$$

che può essere scritto nella forma (1) attraverso la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di A sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Una coppia di autovettori è data da

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice P e la sua inversa sono date da

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \Lambda$$

Perciò, con il cambio di variabili $y = P^{-1}x$, si ottiene il sistema disaccoppiato

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 \\ \dot{y}_2 = 2y_2 \end{cases}$$

che ammette la soluzione generale

$$\begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-t} \\ y_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases}$$

Il ritratto di fase di tale sistema è descritto nella Figura 1 della Sezione 1.1. ~~La~~
In base al precedente corollario, la soluzione generale del sistema lineare di partenza è data da

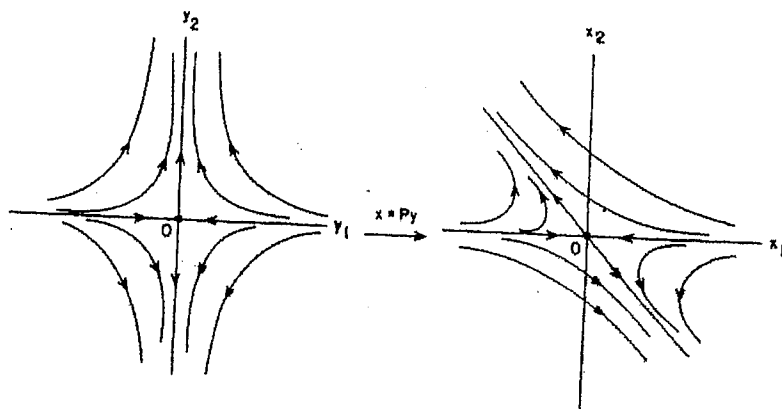
$$x(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} c, \quad \text{con } c = x(0)$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 (e^{-t} - e^{2t}) \\ x_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases} \quad (4)$$

Il ritratto di fase per il sistema lineare di portanza si ottiene perciò disegnando le curve soluzioni definite da (4).

I due ritratti di fase a confronto sono riportati qui sotto



Il ritratto di fase della Figura 2 può essere ottenuto anche applicando la trasformazione lineare $x = Py$.

DEFINIZIONE DI SOTTOSPAZIO STABILE, INSTABILE, CENTRALE.

Supponiamo che la matrice $n \times n$ A abbia k autovalori negativi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e $(n-k)$ autovalori positivi $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$, tutti distinti. Siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ gli autovettori corrispondenti. Allora i sottospazi stabili e instabili del sistema lineare (1), detti E^S ed E^i , sono i sottospazi lineari generati da $\{v_1, \dots, v_k\}$ e $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ rispettivamente.

Se la matrice A ha autovalori immaginari puri, allora vi è anche un sottospazio centrale E^c .

La definizione generale di sottospazi stabili, instabili e centrali verranno definiti più avanti.

1.3 - ESPONENZIALE DI UN OPERATORE

Al fine di definire l'esponenziale di un operatore lineare $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, è necessario definire il concetto di convergenza nello spazio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ degli operatori lineari su \mathbb{R}^n .

Se indichiamo con $|x|$ la norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$,

$|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, definiamo la norma dell'operatore T come

$$\|T\| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|.$$

La norma di un operatore ha tutte le proprietà di una norma: per ogni $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$,

- $\|T\| \geq 0$ e $\|T\| = 0$ se e solo se $T = 0$
- $\|kT\| = |k| \|T\|$ per $k \in \mathbb{R}$
- $\|S+T\| \leq \|S\| + \|T\|$.

Dalla disegualianza di Cauchy-Schwarz segue che, se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ è rappresentato dalla matrice A rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n , allora $\|A\| \leq \sqrt{n} l$, dove $l = \max_i |\lambda_i|$, λ_i autovettori di A . La convergenza di una successione di operatori $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ è perciò definita in termini della norma degli operatori nel modo seguente:

DEFINIZIONE 1. - Una successione di operatori lineari $T_k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ si dice convergere all'operatore $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

se $\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0$ t.c. per $k > N$ si ha $\|T - T_k\| < \varepsilon$.

LEMMA. - Siano $S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$1) |Tx| \leq \|T\| |x|$$

$$2) \|TS\| \leq \|T\| \|S\|$$

$$3) \|T^k\| \leq \|T\|^k \text{ per } k \in \mathbb{N}.$$

Dimostrazione

1) La disuguaglianza è ovvia per $x=0$. Se $x \neq 0$, definiamo il vettore $y = \frac{x}{|x|}$. Allora dalla definizione di norma

$$\|T\| \geq |Ty| = \frac{1}{|x|} |Tx|$$

2) Per $|x| \leq 1$, dalla (1) si ha

$$|TSx| \leq \|T\| |Sx| \leq \|T\| \|S\| |x| \leq \|T\| \|S\|.$$

$$\text{Dunque } \|TS\| = \max_{|x| \leq 1} |TSx| \leq \|T\| \|S\|$$

3) Basta applicare più volte la (2). \blacksquare

TEOREMA. - Dato $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e $t_0 > 0$, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

è assolutamente e uniformemente convergente per ogni $|t| \leq t_0$.

Dimostrazione

Sia $\|T\| = a$. Dal Lemma precedente, per ogni $|t| \leq t_0$ si ha

$$\left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}$$

$$\text{D'altra parte } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0},$$

per cui la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

converge assolutamente e uniformemente per ogni $|t| \leq t_0$. ■

Definiamo allora l'esponenziale dell'operatore lineare T attraverso la serie assolutamente convergente

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$$

Dalle proprietà dei limiti segue che e^T è un operatore lineare su \mathbb{R}^n e si ha $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$.

Tenuto conto dell'interesse di definire la soluzione del sistema lineare

$$\dot{x} = Ax,$$

assumeremo che T sia rappresentato, rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n , dalla matrice A e definiamo l'esponenziale e^{At} .

DEFINIZIONE 2. - Sia A una matrice $n \times n$. Fisso $t \in \mathbb{R}$, definiamo

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Per A una matrice $n \times n$, e^{At} è una matrice $n \times n$ che può essere calcolata in termini degli autovalori ed autovettori di A .
Risulta poi $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\||t|}$, dove $\|A\| = \|T\|$.

PROPOSIZIONE 1. - Se P e T sono trasformazioni lineari su \mathbb{R}^n ed $S = PTP^{-1}$, allora $e^S = Pe^T P^{-1}$.

Dimostrazione.

Infatti $e^S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} =$

$$= P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} = P e^T P^{-1} \quad \square$$

Corollario 1.

Se $P^{-1}AP = \text{diag}[A_j]$, allora $e^{At} = P \text{diag}[e^{A_j t}] P^{-1}$

PROPOSIZIONE 2. - Se S e T sono due trasformazioni lineari su \mathbb{R}^n che commutano (cioè $ST=TS$), allora $e^{S+T} = e^S e^T$.

Corollario 2 - Se T è una trasf. lineare su \mathbb{R}^n , l'inversa della trasformazione lineare e^T è data da $(e^T)^{-1} = e^{-T}$.

Corollario 3. - Se

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

allora
$$e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE

Se $\lambda = a + ib$, allora per induzione

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \text{Re}(\lambda^k) & -\text{Im}(\lambda^k) \\ \text{Im}(\lambda^k) & \text{Re}(\lambda^k) \end{bmatrix}$$

Perci

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \text{Re}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) & -\text{Im}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \\ \text{Im}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) & \text{Re}\left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \text{Re}(e^\lambda) & -\text{Im}(e^\lambda) \\ \text{Im}(e^\lambda) & \text{Re}(e^\lambda) \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In particolare se $b=0$, e^A è una rotazione di b radianti.

\square

Corollario 4. - Se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

allora

$$e^A = e^a \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dimostrazione

Sia $A = aI + B$, dove $B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Allora aI commuta con B e si ha

$$e^A = e^{aI} e^B = e^a e^B.$$

Si ha

$$e^B = I + B + \frac{B^2}{2!} + \dots + \frac{B^n}{n!} + \dots = I + B,$$

visto che B è nilpotente e si ha $B^2 = B^3 = \dots = 0$.

Possiamo ora calcolare la matrice e^{At} per ogni matrice 2×2 A .
Dimostriamo più avanti che esiste una matrice invertibile 2×2 P
(le cui colonne sono gli autovettori generalizzati di A) tali che
la matrice

$$B = P^{-1}AP$$

ha una delle forme seguenti:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Da quanto detto sopra si ha allora (rispettivamente)

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}, e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e^{at} \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

Dalla Proposizione 1 la matrice e^{At} è poi data da

$$e^{At} = P e^{Bt} P^{-1}.$$

Vedremo nella prossima sezione che trovare la matrice e^{At} equivale a risolvere il sistema lineare (1) della sezione 1.1.

1.4 - IL TEOREMA FONDAMENTALE PER I SISTEMI LINEARI

Sia A una matrice $n \times n$. Dimosteremo che, per $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

ha un'unica soluzione $\forall t \in \mathbb{R}$ data da

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Al fine di dimostrare tale teorema è utile il seguente

LEMMA. - Sia A una matrice quadrata. Allora

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$$

DIMOSTRAZIONE. Poiché A commuta con se stessa, dalla Proposizione 2 e dalla Def. 2 della sezione 3 si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} = \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) = A e^{At}, \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza è conseguenza della convergenza uniforme dello sviluppo in serie di e^{Ah} e della conseguente possibilità di scambiare i due limiti. \blacksquare

TEOREMA FONDAMENTALE PER I SISTEMI LINEARI

Sia A una matrice $n \times n$. Allora, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

ha un'unica soluzione data da

$$x(t) = e^{At} x_0. \quad (2)$$

DIMOSTRAZIONE

Dal lemma precedente, se $x(t) = e^{At} x_0$, allora

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} e^{At} x_0 = A e^{At} x_0 = A x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

Inoltre $x(0) = I x_0 = x_0$. Perciò $x(t) = e^{At} x_0$ è una soluzione. Per dimostrare che è l'unica, sia $x(t)$ una soluzione

di (1) e poniamo

$$y(t) = e^{-At} x(t).$$

Allora dal lemma precedente e dal fatto che $x(t)$ è una soluzione di (1) si ha

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= -A e^{-At} x(t) + e^{-At} \dot{x}(t) = \\ &= -A e^{-At} x(t) + e^{-At} A x(t) = 0 \end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, visto che e^{-At} ed A commutano. Perciò $y(t)$ è una costante. Posto $t=0$ si ha $y(t) = x_0$ e, di conseguenza, ogni soluzione del pb. di Cauchy (1) è data da $x(t) = e^{At} y(t) = e^{At} x_0$. \blacksquare

ESEMPIO. - Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{dove } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e disegnare la curva soluzione sul piano delle fasi \mathbb{R}^2 .

Del teorema precedente e del corollario 2 della sezione precedente, la soluzione è data da

$$x(t) = e^{At} x_0 = e^{-2t} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Perciò $|x(t)| = e^{-2t}$ e $\vartheta(t) = \arctan\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = t$.

La curva soluzione gira pertanto a spirale verso l'origine

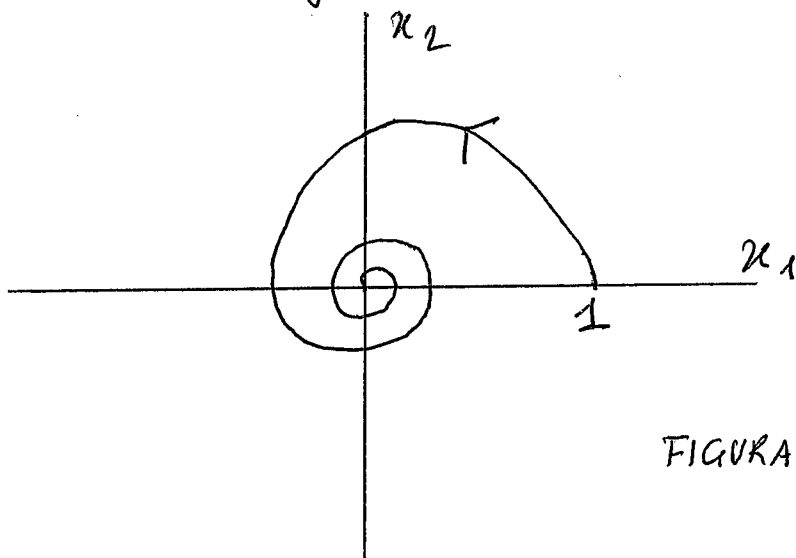


FIGURA 1.

1.5 SISTEMI LINEARI IN \mathbb{R}^2

In questo paragrafo discuteremo sui vari ritratti di fase che può avere il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

quando $x \in \mathbb{R}^2$ ed A è una matrice 2×2 . Inizieremo descrivendo i ritratti di fase per il sistema lineare

$$\dot{x} = Bx \quad (2)$$

dove la matrice $B = P^{-1}AP$ ha una delle forme descritte alla fine del paragrafo 1.3. Il ritratto di fase per il sistema lineare (1) si ottiene allora dal ritratto di fase per (2) attraverso la trasformazione lineare di coordinate $x = Py$ come ~~in~~ nelle FIGURE 1 e 2 nel paragrafo 1.2.

Per prima cosa, se

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{oppure} \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

segue dal teorema fondamentale nel paragrafo 1.4 e dalla forma della matrice e^{Bt} calcolata nel paragrafo 1.3 che la soluzione del problema di Cauchy associato a (2) con dato iniziale $x(0) = x_0$ è data da

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} x_0, \quad x(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0,$$

~~oppure~~ ed

$$x(t) = e^{at} \begin{pmatrix} \cos(bt) & -\sin(bt) \\ \sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix} x_0 \quad \text{rispettivamente.}$$

Elenchiamo ~~il~~ ~~varie~~ i vari ritratti di fase che risultano da
 tali soluzioni, raggruppate in base alle loro ~~tipologia~~
 tipologia topologica:

CASO I

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda < 0 < \mu$$

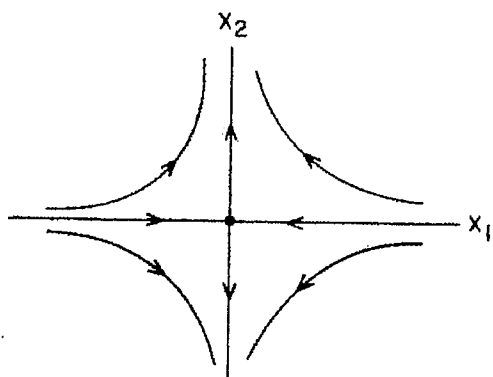


FIGURA 1. Una sella nell'origine

Il ritratto di fase per il sistema lineare (2) in tal caso è riportata
 in FIGURA 1. Si veda il primo esempio del paragrafo 1.1.

Il sistema (2) si dice che ha una sella nell'origine in tal caso.

Se $\mu < 0 < \lambda$, le frecce in FIGURA 1 vanno invertite.

Laddove A abbia due autovalori reali di segno opposto, il
 ritratto di fase per il sistema lineare (1) è linearmente
 equivalente al ritratto di fase mostrato in FIGURA 1. Vale a dire
 che si ottiene dalle FIGURA 1 attraverso una trasformazione
 lineare di coordinate; il sottospazio stabile ed instabile di (1)
 sono determinate dagli autovettori di A come nell'esempio del
 paragrafo 1.2. Le quattro traiettorie non nulle o curve soluzioni
 che tendono al punto di equilibrio $(0,0)$ per $t \rightarrow \pm \infty$ sono
 dette separatrici del sistema.

CASO II

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{con } A \leq \mu < 0 \quad \text{oppure}$$

$$B = \begin{pmatrix} A & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{con } A < 0.$$

I ritratti di fase per il sistema lineare (2) in tali casi sono riportati in FIGURA 2. L'origine viene detta un nodo stabile in ognuno di questi casi. Si parla di NODO PROPRIO nel caso in cui $A = \mu$ e di NODO IMPROPRIO negli altri due casi.

Se $A \geq \mu > 0$ oppure se $A > 0$ nel caso II, le frecce in FIGURA 2 sono invertite e l'origine si dice NODO INSTABILE.

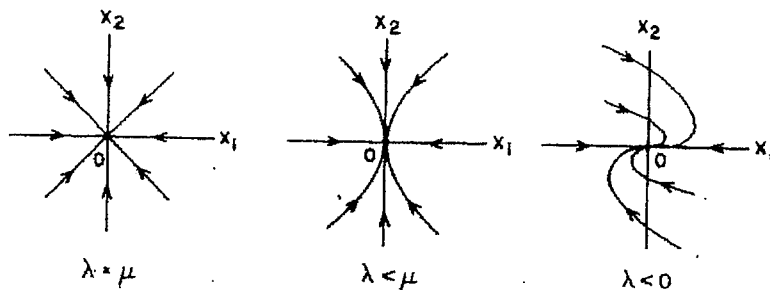


FIGURA 2. Un nodo stabile nell'origine

Quando A ha due autovalori reali dello stesso segno, il ritratto di fase del sistema lineare (2) è linearmente equivalente ad uno dei ritratti di fase mostrato in FIGURA 2. La stabilità del nodo è determinata dal segno degli autovalori: stabile se $A \leq \mu < 0$ e instabile se $A \geq \mu > 0$. Si osservi che ogni traiettoria in FIGURA 2 tende al punto di equilibrio $(0,0)$ lungo una ben definita

retta tangente $\vartheta = \vartheta_0$ per $t \rightarrow \infty$.

CASO III

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{con } a < 0.$$

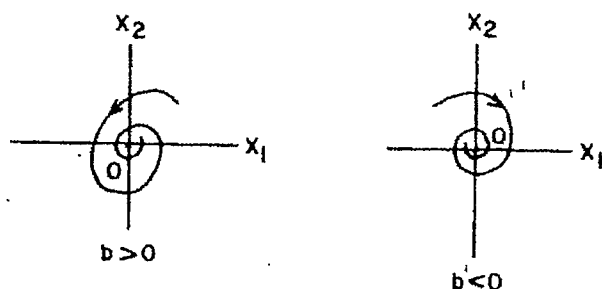


FIGURA 3. UN FUOCO STABILE NELL'ORIGINE

Un ritratto di fase per il sistema lineare (2) in questo caso è dato nella FIGURA 3. L'origine si dice in tal caso un fuoco stabile. Se $a > 0$, le frecce della FIGURA 3 vanno invertite. Vale a dire che le traiettorie ruotano a spirale per allontanarsi dall'origine al crescere di t . L'origine è detto un fuoco instabile in questo caso. Nel caso in cui A ha una coppia di autovalori complessi coniugati con parte reale non nulla, i ritratti di fase per il sistema (1) è linearmente equivalente ad uno dei ritratti di fase riportati nella FIGURA 3. Si noti che le traiettorie in FIGURA 3 non tendono verso l'origine lungo una ben definita ~~una~~ direzione di tangente. Perciò, l'angolo $\vartheta(t)$ che il vettore $x(t)$ forma con

l'asse x_1 non tende verso una costante N_0 per $t \rightarrow \infty$,
 ma $|N(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$ e $|x(t)| \rightarrow 0$ per
 $t \rightarrow \infty$ in tal caso.

CASO IV

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Il ritratto di fase per il sistema lineare (2) in tal caso è
 dato in FIGURA 4. ~~Il sistema (2) è detto~~

Si dice che il sistema (2) ha un CENTRO NELL'ORIGINE in
 tal caso. Ogni qual volta A ha una coppia di autovalori
 puramente immaginari complessi coniugati, il ritratto di fase
 del sistema lineare (1) è linearmente equivalente ad uno dei
 ritratti di fase mostrati in FIGURA 4.

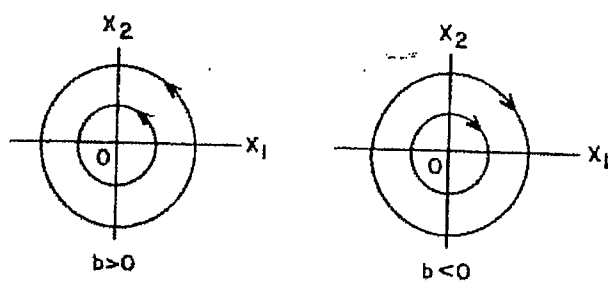


FIGURA 4. Un centro nell'origine

Si noti che le traiettorie o le curve soluzione in FIGURA 4 stanno
 in ~~una~~ circonferenze $|x(t)| = \text{costante}$. Le traiettorie del
 sistema (1) stanno su ellissi e la soluzione $x(t)$ di (1) verificherà
 $m \leq |x(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

L'angolo $\theta(t)$ soddisfa anche $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$ in tal caso.

Se uno degli autovalori di A è nullo, ovvero se $\det A = 0$, l'origine viene detto punto di equilibrio degenere di (1).

~~Il sistema è un sistema lineare~~

ESEMPIO (un sistema lineare con un centro nell'origine).

Il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha un centro nell'origine visto che la matrice A ha autovalori $\lambda = \pm 2i$.

In base al teorema del paragrafo 1.6, la matrice invertibile

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

riduce A alla matrice

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione per il sistema lineare $\dot{x} = Ax$, come determinato nei paragrafi 1.3 e 1.4, è allora dato da

$$x(t) = P \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} P^{-1} c = \begin{pmatrix} \cos 2t & -2 \sin 2t \\ \frac{1}{2} \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} c,$$

dove $C = X(0)$, o equivalentemente da

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) \\ x_2(t) = \frac{1}{2}c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) \end{cases}$$

Si vede allora facilmente che le soluzioni verificano

$$x_1^2(t) + 4x_2^2(t) = c_1^2 + 4c_2^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vale a dire che le traiettorie di tale sistema stanno su ellissi riportate in FIGURA 5.

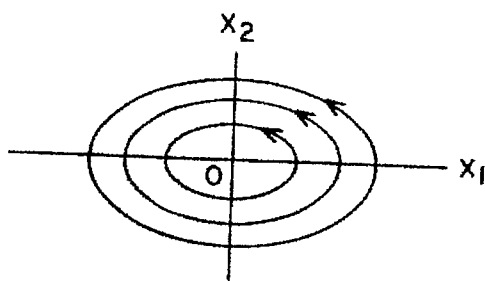


FIGURA 5. Un centro nell'origine

DEFINIZIONE 1. Il sistema lineare (1) si dice che ha nell'origine una SELLA, un NODO, UN FUOCO o UN CENTRO se il suo ritratto di fase è linearmente ed uno dei ritratti di fase riportati rispettivamente nelle FIGURE 1, 2, 3 e 4. Vale a dire che, se la matrice A è simile ad una delle matrici B nei CASI I, II, III o IV rispettivamente.

OSSERVAZIONE. Se la matrice A è simile alla matrice B , vale a dire se esiste una matrice non singolare P tale che

$P^{-1}AP = B$, allora il sistema (1) si trasforma nel sistema (2) attraverso la trasformazione lineare di coordinate $x = Py$. Se B ha la forma III, allora il ritratto di fase per il sistema (2) ~~corrisponde~~ ~~alla~~ corrisponde o ad un moto ^{anti}orario (se $b > 0$) oppure orario (se $b < 0$) o ad una circonferenza (se $a = 0$) o ad una spirale (se $a \neq 0$). Inoltre, il ritratto di fase per il sistema (1) sarà qualitativamente lo stesso del ritratto di fase per il sistema (2) se $\det P > 0$ (vale a dire se P conserva l'orientamento) oppure se sarà qualitativamente lo stesso del ritratto di fase del sistema (2) con un moto antiorario sostituito dal corrispondente moto orario e viceversa (come in FIGURA 3 e 4) se $\det P < 0$ (vale a dire se P inverte l'orientamento).

Se il $\det A \neq 0$, vi è un metodo facile per determinare se il sistema lineare ha una sella, un nodo, un fuoco oppure un centro nell'origine. Questo viene riportato nel prossimo teorema. Si osservi che se $\det A \neq 0$, allora $Ax = 0$ se e solo se $x = 0$. Vale a dire che l'origine è l'unico punto di equilibrio del sistema lineare (1) quando $\det A \neq 0$. Se l'origine è un fuoco o un centro, il segno σ di \dot{x}_2 per $x_2 = 0$ (e per $x_1 > 0$ piccolo) può essere usato per determinare se il moto è ~~un~~ antiorario (se $\sigma > 0$) oppure orario (se $\sigma < 0$).

TEOREMA Sia $\delta = \det A$ e $\tau = \text{tr} A$ e si consideri il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax. \quad (1)$$

- a) se $\delta < 0$, allora (1) ha una sella dell'origine.
- b) se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, allora (1) ha un nodo nell'origine; è stabile se $\tau < 0$ e instabile se $\tau > 0$.
- c) se $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$, e $\tau \neq 0$, allora (1) ha un fuoco nell'origine; è stabile se $\tau < 0$ e instabile se $\tau > 0$.
- d) se $\delta > 0$ e $\tau = 0$, allora (1) ha un centro nell'origine.

Si osserva che nel caso (b) si ha $\tau^2 \geq 4|\delta| > 0$, vale a dire che $\tau \neq 0$.

DEFINIZIONE 2. Un nodo stabile o un fuoco stabile per (1) è ~~chiamato~~ detto un pozzo per il sistema lineare e un nodo instabile o un fuoco instabile per (1) è detto una sorgente per il sistema lineare.

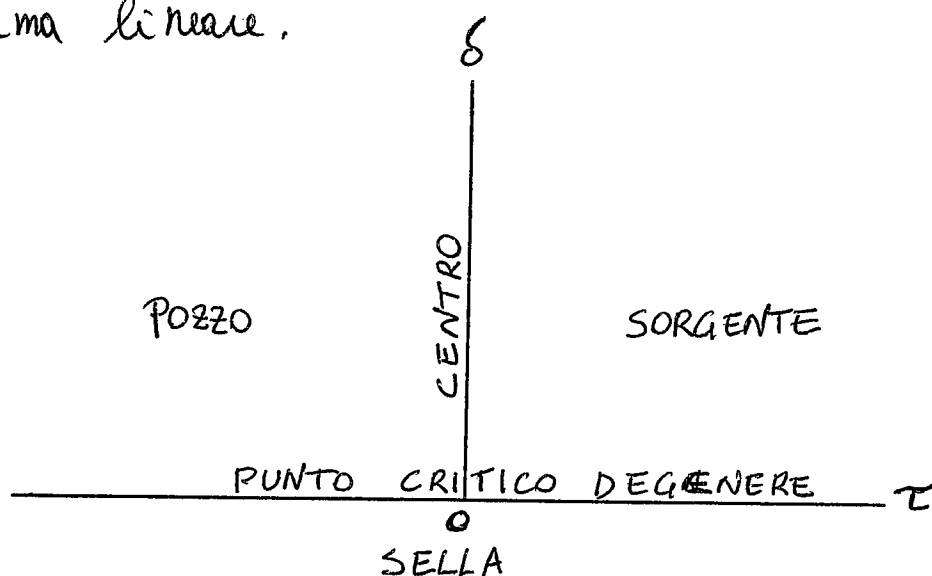


FIGURA 6. UN DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE PER IL SIST. LINEARE

I risultati precedenti può essere sintetizzato attraverso il "diagramma di biforcazione" riportato nella FIGURA 6, che

Separa il piano (τ, δ) in tre componenti in cui le soluzioni del sistema lineare (1) hanno la stessa "struttura qualitativa" (definita nel paragrafo 2.8). Nel descrivere il comportamento topologico o struttura qualitativa dell'insieme soluzione di un sistema lineare, non distinguiamo tra nodi e fuochi, ma soltanto se sono stabili e instabili.

1.6 - AUTOVALORI COMPLESSI

Se la matrice A $2n \times 2n$ ha autovalori complessi, allora avviene coppie complesso-complesso coniugato e, se A ha $2n$ autovalori complessi distinti, il seguente teorema di algebra lineare ci permette di risolvere il sistema lineare $\dot{x} = Ax$.

TEOREMA. - Se A è una matrice reale $2n \times 2n$ con $2n$ autovalori complessi distinti $\lambda_j = a_j + ib_j$ e $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j = 1, \dots, n$ corrispondenti agli autovettori complessi $w_j = u_j + iv_j$ e $\bar{w}_j = u_j - iv_j$, allora $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$ è una base di \mathbb{R}^{2n} e la matrice

$$P = [v_1 \ u_1 \ v_2 \ u_2 \ \dots \ v_n \ u_n]$$

è invertibile e si ha

$$P^{-1}AP = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix},$$

ossia una matrice reale $2n \times 2n$ con blocchi 2×2 lungo la diagonale.

OSSERVAZIONE. Se al posto della matrice P si usa la matrice invertibile

$$Q = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ \dots \ u_n \ v_n],$$

allora

$$Q^{-1}AQ = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix}$$

Il ~~teorema~~ ^{corollario} che segue è conseguenza del teorema precedente e del teorema fondamentale del paragrafo 1.4.

Corollario. - Sotto le ipotesi del teorema precedente, la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

è data da
$$x(t) = P \operatorname{diag} e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\operatorname{sen}(b_j t) \\ \operatorname{sen}(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} P^{-1} x_0$$

Si osserva che la matrice

$$R = \begin{bmatrix} \cos(bt) & -\operatorname{sen}(bt) \\ \operatorname{sen}(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

rappresenta una rotazione di bt radianti.

ESEMPIO. - Risolvere il ~~problema~~ problema di Cauchy (1) quando

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha autovalori complessi $\lambda_1 = 1+i$ e $\lambda_2 = 2+i$ (così come $\bar{\lambda}_1 = 1-i$ e $\bar{\lambda}_2 = 2-i$). Una coppia di autovettori corrispondenti è data da

$$w_1 = u_1 + i v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 = u_2 + i v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & u_1 & v_2 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

\bar{e} invertibile,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La soluzione del problema di Cauchy (1) \bar{e} è data da

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t & 0 & 0 \\ e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ 0 & 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{pmatrix} P^{-1} x_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t & 0 & 0 \\ e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} (\cos t + \sin t) & -2e^{2t} \sin t \\ 0 & 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t} (\cos t - \sin t) \end{pmatrix} x_0$$

Nel caso A abbia autovalori reali e complessi e questi sono distinti, noi abbiamo il seguente risultato: se A ha autovalori reali e distinti λ_j e autovettori corrispondenti v_j , $j=1, \dots, k$ e autovalori complessi e distinti $\lambda_j = a_j + i b_j$, $\bar{\lambda}_j = a_j - i b_j$ con autovettori corrispondenti $w_j = u_j + i v_j$, $\bar{w}_j = u_j - i v_j$, $j=k+1, \dots, n$, allora la matrice

$$P = [v_1 \dots v_k \quad v_{k+1} \ u_{k+1} \dots v_n \ u_n]$$

\bar{e} invertibile e

$$P^{-1} A P = \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_k, B_{k+1}, \dots, B_n],$$

dove i blocchi 2×2

$$B_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}$$

per $j = k+1, \dots, n$.

Illustriamo tale situazione attraverso un esempio.

ESEMPIO. — La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha autovalori $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2+i$ (e $\bar{\lambda}_2 = 2-i$).

Gli autovettori corrispondenti sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w_2 = u_2 + i v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per cui

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$x(t) = P \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{pmatrix} P^{-1} x_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}(\cos t + \sin t) & -2e^{2t} \sin t \\ 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t}(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} x_0$$

Il sottospazio stabile E^S è dato dall'asse x_1 , mentre il sottospazio instabile del piano $x_2 x_3$. Il ritratto di fase è riportato nelle figure ~~qui sotto~~ a pag. 25 bis.

1.7 - Autovalori multipli.

Abbiamo visto, attraverso il teorema fondamentale per sistemi lineari del paragrafo 1.4, che la soluzione del sistema lineare

$$\dot{x} = Ax$$

con la condizione iniziale $x(0) = x_0$, è data da

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Abbiamo visto come trovare la matrice $n \times n$ e^{At} nel caso in cui A ammette autovalori distinti. Completeremo ora il quadro mostrando come trovare e^{At} , cioè come risolvere il sistema lineare (1), quando A ha autovalori multipli.

DEFINIZIONE 1. Sia λ un autovalore di A di molteplicità $m \leq n$. Allora per $k = 1, \dots, m$, ogni soluzione non nulla v di

$$(A - \lambda I)^k v = 0$$

viene detto autovettore generalizzato di A .

DEFINIZIONE 2. - Una matrice $n \times n$ N si dice nilpotente di ordine k se $N^{k-1} \neq 0$ e $N^k = 0$.

TEOREMA 1. Sia A una matrice reale $n \times n$ con autovalori reali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (ripetuti in base alle loro molteplicità). Allora esiste una base di autovettori generalizzati di \mathbb{R}^n . Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di autovettori generalizzati di \mathbb{R}^n , la matrice $P = (v_1 \dots v_n)$ è invertibile,

$$A = S + N,$$

dove $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_j)$,

la matrice $N = A - S$ è nilpotente di ordine $k \leq n$ ed S ed N commutano, ovvero $SN = NS$.

Tale teorema, insieme alle proposizioni del paragrafo 1.3 e al teorema fondamentale del paragrafo 1.4, ci dà allora

Corollario 1. - Sotto le ipotesi del teorema precedente, il sistema lineare (1), insieme alle condizioni iniziali $x(0) = x_0$, ha per soluzione

$$x(t) = P \text{diag}(e^{\lambda_j t}) P^{-1} \left[I + Nt + \dots + \frac{N^k t^k}{k!} \right] x_0$$

~~se~~

Se λ è un autovalore di molteplicità m di una matrice $n \times n$ A , allora i risultati precedenti sono particolarmente facili da applicare visto che in tal caso

$$S = \text{diag}(\lambda)$$

rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^n ed $N = A - S$.

La soluzione del problema di Cauchy (1), con condizioni $x(0) = x_0$ è data quindi da

$$x(t) = e^{At} \left(I + Nt + \dots + \frac{N^k t^k}{k!} \right) x_0$$

Si considerino due esempi dove la matrice $n \times n$ A ha un autovalore di molteplicità m . In tali esempi non è necessario calcolare una base di autovettori generalizzati per risolvere il problema di Cauchy!

ESEMPIO 1 - Risolvere il problema di Cauchy (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che A ha un autovalore $\lambda = 2$ di molteplicità 2.

Perciò

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ed

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si vede che $N^2 = 0$ per cui la soluzione del problema di Cauchy (1) è data da

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = e^{2t} \left(I + Nt \right) x_0 = \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} x_0 \end{aligned}$$

ESEMPIO 2. - Risolvere il problema di Cauchy (1) quando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso, la matrice A ha un autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità 4. Perciò $S = I_4$ ed

$$N = A - S = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si verifica che

$$N^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed $N^3 = 0$, vale a dire che N è nilpotente di ordine 3.

La soluzione del problema di Cauchy associato ad (1) è quindi data da

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t \left(I + Nt + \frac{1}{2} N^2 t^2 \right) x_0 = \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1 - t - \frac{t^2}{2} & -2t - \frac{t^2}{2} & -t - \frac{t^2}{2} & -t - \frac{t^2}{2} \\ t & 1+t & t & t \\ \frac{t^2}{2} & t + \frac{t^2}{2} & 1 + \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0. \end{aligned}$$

Nel caso generale si tratterà di determinare prima una base di autovettori generalizzati di \mathbb{R}^n e poi di calcolare $S = P \text{diag}(A_j) P^{-1}$

e $N = A - S$ in accordo con le formule del teorema precedente, e di trovare dopo la soluzione del problema di Cauchy per (1) come nel corollario precedente.

ESEMPIO 3. - Risolvere il problema di Cauchy per (1) quando

$$A = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E' facile vedere che A ha autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$.

E non è difficile trovare gli autovettori corrispondenti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Multiplici non nulli di tali autovettori sono gli unici autovettori di A corrispondenti a $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ rispettivamente.

Dobbiamo pertanto trovare un autovettore generalizzato corrispondente a $\lambda = 2$ indipendente da v_2 risolvendo

$$(A - 2I)^2 v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0$$

Si vede che si può scegliere $v_3 = (0, 1, 0)^T$.

Pertanto
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Risulta poi

$$S = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N^2 = 0$$

La soluzione è data, allora, da

$$\begin{aligned} x(t) &= P \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} P^{-1} [I + Nt] x_0 = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^t & 0 & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & 0 & 0 \\ -2e^t + (2-t)e^{2t} & te^{2t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix} x_0 \end{aligned}$$

Nel caso di autovalori multipli complessi, vale il seguente teorema

TEOREMA 2 - Sia A una matrice reale $2n \times 2n$ con autovalori complessi $\lambda_j = a_j + ib_j$ e $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, $j = 1, \dots, n$.

Allora esiste una base di autovettori generalizzati complessi

$w_j = u_j + i v_j$ e $\bar{w}_j = u_j - i v_j$, $i = 1, \dots, n$ per \mathbb{C}^{2n} e $\{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\}$ è una base per \mathbb{R}^{2n} . Per ogni base

di tale tipo, la matrice $P = (v_1, u_1, \dots, v_n, u_n)$ è invertibile,

$$A = S + N,$$

$$\text{dove} \quad P^{-1} S P = \text{diag} \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$$

mentre $N = A - S$ è nilpotente di ordine $k \leq 2n$, ed S commuta con N .

Il seguente corollario segue dal teorema fondamentale del paragrafo 1.4 e dai risultati del paragrafo 1.3.

Corollario 2. - Sotto le ipotesi del teorema precedente, la soluzione del problema di Cauchy per (1) con dati $x(0) = x_0$ è data da

$$x(t) = P \operatorname{diag} \left(e^{a_j t} \begin{pmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{pmatrix} \right) P^{-1} \left[I + \dots + \frac{N^k t^k}{k!} \right] x_0$$

ESEMPIO 4. - Risolvere il problema di Cauchy (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A ha autovalori $\lambda = i$ e $\bar{\lambda} = -i$ di molteplicità 2. L'equazione

$$(A - \lambda I)W = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0$$

è equivalente a

$$\begin{cases} z_1 = z_2 = 0 \\ z_3 = i z_4 \end{cases}$$

Perciò si ha l'autovettore $W_1 = (0, 0, i, 1)^T$.

L'equazione

$$(A - \lambda I)^2 W = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = 0$$

\bar{e} è equivalente a

$$\begin{cases} z_1 = iz_2 \\ z_3 = iz_4 - z_4 \end{cases}$$

Scegliamo perciò l'autovettore generalizzato $w_2 = (i, 1, 0, 1)$.

Perciò $u_1 = (0, 0, 0, 1)^T$, $v_1 = (0, 0, 1, 0)^T$,

$u_2 = (0, 1, 0, 1)^T$, $v_2 = (1, 0, 0, 0)$ e, in base al teorema

precedente,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = P \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N = A - S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ed } N^2 = 0.$$

Perciò la soluzione ~~to~~ del problema di Cauchy è

$$x(t) = P \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} P^{-1} [I + Nt] x_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -t \sin t & \sin t - t \cos t & \cos t & -\sin t \\ \sin t + t \cos t & t \sin t & \sin t & \cos t \end{pmatrix} x_0$$

Ossewazione. Se A ha sia autovalori multipli reali che complessi, una combinazione dei due teoremi precedenti ci permette di giungere a conclusione come fatto nel risultato e nell'esempio alla fine del paragrafo 1.6.

1.8 - FORMA CANONICA DI JORDAN

La forma canonica di Jordan di una matrice permette di comprendere meglio la forma delle soluzioni di un sistema lineare di equazioni differenziali ed è usata per dimostrare alcuni risultati più avanti. Trovare la forma canonica di Jordan non è necessariamente il miglior metodo per risolvere il sistema lineare correlato visto che, trovare una base di autovettori generalizzati che riduce A in forma canonica di Jordan può essere difficile. D'altro canto, ogni base di autovettori generalizzati si può usare nel metodo descritto nel paragrafo precedente. La forma canonica di Jordan, descritta nel prossimo teorema, produce risultati in una forma particolarmente semplice per la parte nilpotente N della matrice A ed è perciò utile nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie.

TEOREMA (forma canonica di Jordan). - Sia A una matrice reale A con autovalori reali λ_j , $j=1, \dots, k$ ed autovalori complessi $\lambda_j = a_j + i b_j$ e $\bar{\lambda}_j = a_j - i b_j$, $j=k+1, \dots, n$. Allora esiste una base

$\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n\}$ per \mathbb{R}^{2n-k} , dove v_j , $j=1, \dots, k$ e w_j , $j=k+1, \dots, n$ sono autovettori generalizzati di A , $u_j = \operatorname{Re}(w_j)$ e $v_j = \operatorname{Im}(w_j)$ per $j=k+1, \dots, n$, tale che la matrice $P = [v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n]$ è invertibile e

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & B_r \end{pmatrix} \quad (1)$$

dove i blocchi di Jordan elementari $B = B_j$, $j=1, \dots, r$ sono o della forma

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (2)$$

dove λ è uno degli autovalori reali di A , oppure della forma

$$B = \begin{pmatrix} D & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & D & I_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D \end{pmatrix} \quad (3)$$

con $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dove $\lambda = a + ib$ è uno degli autovalori complessi di A .

La forma canonica di Jordan di una data matrice A è unica eccetto per l'ordine in cui sono sistemati i blocchi di Jordan elementari in (1) e per il fatto che gli 1 nei blocchi elementari (2) o le matrici I_2 nei blocchi elementari (3) può comparire sia sopra che sotto la diagonale. Noi adotteremo la convenzione di pensare alla (1) con i B_j dati da (2) o (3) (definendola forma canonica di Jordan "superiore").

La forma canonica di Jordan di A porta a qualche informazione esplicita relativa alla forma della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4)$$

che, in base al teorema fondamentale per i sistemi lineari nel paragrafo 1.4, è dato da

$$x(t) = P \operatorname{diag}(e^{B_j t}) P^{-1} x_0. \quad (5)$$

Se $B_j = B$ è una matrice $m \times m$ della forma (2) e λ è un autovalore reale di A con $B = \lambda I + N$ e

$$e^{Bt} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{m-2}/(m-2)! \\ 0 & 0 & 1 & \dots & t^{m-3}/(m-3)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dal momento che la matrice $m \times m$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è nilpotente di ordine m e

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots \end{pmatrix}, \dots, N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente, se $B_j = B$ è una matrice $2m \times 2m$ della forma (3) e $\lambda = a + ib$ è un autovalore complesso di A , allora

$$e^{Bt} = e^{at} \begin{pmatrix} R & Rt & Rt^2/2! & \dots & Rt^{m-1}/(m-1)! \\ 0 & R & Rt & \dots & Rt^{m-2}/(m-2)! \\ 0 & 0 & R & \dots & Rt^{m-3}/(m-3)! \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & R & Rt \\ 0 & \dots & \dots & 0 & R \end{pmatrix}$$

dove la matrice di rotazione

$$R = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

del momento che la matrice $2m \times 2m$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è nilpotente di ordine m e

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & \dots & 0 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

$$N^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & I_2 \\ 0 & \dots & & & 0 \\ & & & & \\ & & & & \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

La forma precedente della soluzione (5) del problema di Cauchy (4) conduce perciò al seguente risultato:

Corollario. - Ogni coordinata nella soluzione $x(t)$ del pb (4) è una combinazione lineare di funzioni della forma

$$t^k e^{at} \cos(bt) \quad \text{oppure} \quad t^k e^{at} \sin(bt),$$

dove $\lambda = a + ib$ è un autovalore della matrice A e $0 \leq k \leq n-1$.

Descriviamo ora un metodo per trovare una base che riduce A alla sua forma canonica di Jordan. Serve però fissare le seguenti definizioni.

DEFINIZIONE - Sia λ un autovalore di A . Chiamiamo indici di difetto

$$S_k = \dim \text{Ker} (A - \lambda I)^k$$

Il nucleo di un operatore lineare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ è dato da

$$\text{Ker } T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx = 0\}$$

Risulta $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \dots \leq \delta_n = n$.

Sia ν_k il numero di blocchi di Jordan elementari di misura $k \times k$ all'interno delle forme canoniche di Jordan (1) della matrice A . Allora segue dal teorema precedente e dalle definizioni di δ_k che

$$\delta_1 = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n$$

$$\delta_2 = \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + 2\nu_n$$

$$\delta_3 = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + 3\nu_n$$

$$\delta_{n-1} = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + (n-1)\nu_{n-1} + (n-1)\nu_n$$

$$\delta_n = \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + (n-1)\nu_{n-1} + n\nu_n$$

Risolvendo si ha

$$\nu_1 = 2\delta_1 - \delta_2$$

$$\nu_2 = 2\delta_2 - \delta_3 - \delta_1$$

$$\nu_k = 2\delta_k - \delta_{k+1} - \delta_{k-1} \quad \text{per } 1 < k < n$$

$$\nu_n = \delta_n - \delta_{n-1}$$

ESEMPIO 1. Le uniche forme canoniche di Jordan per una matrice 2×2 con un autovalore λ di molteplicità 2 sono dette da (sotto sono indicati i corrispondenti indici di difetto)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \delta_2 = 2$$

$$\delta_1 = 1, \delta_2 = 2$$

ESEMPIO 2. Le forme canoniche di Jordan per una matrice 3×3 con un autovalore λ di molteplicità 3 sono date da (sotto sono indicati i corrispondenti indici di difetto)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\delta_1 = 2, \delta_2 = \delta_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$\delta_1 = 1, \delta_2 = 2, \delta_3 = 3$.

Riportiamo di seguito un algoritmo per trovare una base B di autovettori generalizzati tali che la matrice $n \times n$ A con autovalore λ di molteplicità n assume le sue forme canoniche di Jordan J rispetto alla base B .

1. Trovare una base $\{w_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_1}$ per il $\text{Ker}(A - \lambda I)$, ossia trovare un insieme linearmente indipendente di autovettori di A corrispondenti all'autovalore λ .

2. Se $\delta_2 > \delta_1$, scegliere una base $\{v_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1}$ per il $\text{Ker}(A - \lambda I)$ t.c. $(A - \lambda I)v_j^{(1)} = w_j^{(2)}$ ha $\delta_2 - \delta_1$ soluzioni linearmente indipendenti $w_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, \delta_2 - \delta_1$. Allora $\{w_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2} = \{v_j^{(1)}\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \{w_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1}$ è una base per il $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$.

3. Se $\delta_3 > \delta_2$, scegliere una base $\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2}$ per il $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$ con $v_j^{(2)} \in \text{span}\{w_j^{(2)}\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1}$ per $j = 1, \dots, \delta_2 - \delta_1$ t.c. $(A - \lambda I)v_j^{(2)} = w_j^{(2)}$

ha $\delta_3 - \delta_2$ soluzioni linearmente indipendenti $N_j^{(3)}$, $j=1, \dots, \delta_3 - \delta_2$.

Se per $j=1, \dots, \delta_2 - \delta_1$, $V_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{b_2 - b_1} c_i N_i^{(2)}$, sia

$\tilde{V}_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{\delta_2 - \delta_1} c_i V_i^{(1)}$ e $\tilde{V}_j^{(1)} = V_j^{(1)}$ per $j = \delta_2 - \delta_1 + 1, \dots, \delta_1$. Allora

$$\left\{ N_j^{(3)} \right\}_{j=1}^{\delta_3} = \left\{ \tilde{V}_j^{(1)} \right\}_{j=1}^{\delta_1} \cup \left\{ V_j^{(2)} \right\}_{j=1}^{\delta_2 - \delta_1} \cup \left\{ N_j^{(3)} \right\}_{j=1}^{\delta_3 - \delta_2}$$

è una base per il $\text{Ker}(A - \lambda I)^3$.

4. Continuare tale procedimento fino al passo k -esimo quando $\delta_k = n$ per ottenere una base $B = \left\{ N_j^{(k)} \right\}_{j=1}^n$ per \mathbb{R}^n . La matrice A assumerà allora la sua forma canonica di Jordan rispetto a tale base.

La matrice diagonale $P = \{ N_1 \dots N_n \}$ del teorema precedente che verifica $P^{-1}AP = J$ si ottiene per il passo ordinando opportunamente gli elementi della base B . Il modo in cui la matrice P si ottiene dalla base B viene chiamato dall'esempio che segue: ogni autovettore generalizzato $N_j^{(i)}$ che verifica $(A - \lambda I) N_j^{(i)} = V_j^{(i-1)}$ viene inserito ~~subito~~ di seguito all'autovettore generalizzato $V_j^{(i-1)}$.

ESEMPIO 3. Trovare una base di \mathbb{R}^3 che riduce la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

in forma canonica di Jordan. È facile vedere che $\lambda = 2$ è un autovalore di molteplicità 3 e che

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Perciò $\delta_1 = 2$ e $(A - \lambda I)v = 0$ è equivalente a $x_2 = 0$. Scegliamo allora

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

come base per $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Risolviamo ora

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} v = c_1 v_1^{(1)} + c_2 v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Si ha $x_2 = c_1$ e $-x_2 = c_2$, ossia $c_1 = -c_2$. Scegliamo

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questi tre vettori, che ribattezziamo v_1, v_2, v_3 rispettivamente, costituiscono una base per il $\text{Ker}(A - \lambda I)^2 = \mathbb{R}^3$. Si osservi che avremmo potuto scegliere $v_2^{(1)} = v_3 = (0, 0, 1)^T$ ed ottenere lo stesso risultato. La matrice $P = [v_1, v_2, v_3]$ e la sua inversa sono allora date da

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si può verificare che

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ESEMPIO 4. Trovare una base di \mathbb{R}^4 che riduce la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alla sua forma canonica di Jordan. Si trova $\lambda = 1$ come autovalore di molteplicità 4 e

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando la riduzione di Gauss, si trova che $\delta_1 = 2$ e che ai vettori

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generano il $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Si tratta poi di risolvere

$$(A - \lambda I)v = c_1 v_1^{(1)} + c_2 v_2^{(1)}$$

Tali equazioni sono equivalenti a $x_3 = c_2$ e $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = c_1$.

Possiamo perciò scegliere $c_1 = 1, c_2 = 0, x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$

e trovare $v_1^{(2)} = (1, 0, 0, 0)^T$

(con $v_1^{(1)} = (-1, 1, 0, 0)^T$); possiamo poi scegliere $c_1 = 0,$

$c_2 = 1 = x_3, x_1 = -1, x_2 = x_4 = 0$ e trovare

$$v_2^{(2)} = (-1, 0, 1, 0)^T$$

(con $v_2^{(1)} = (-1, 0, 0, 1)^T$).

Percio' i vettori $V_1^{(1)}, v_1^{(2)}, V_2^{(1)}, v_2^{(2)}$, che saranno ribattezzati v_1, v_2, v_3, v_4 , formano una base B di \mathbb{R}^4 . La matrice $P = [v_1, v_2, v_3, v_4]$ e le sue inverse sono perciò dati da

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso $\delta_1 = 2, \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = 1, \gamma_1 = 2\delta_1 - \delta_2 = 0,$
 $\gamma_2 = 2\delta_2 - \delta_3 - \delta_1 = 2$ e $\gamma_3 = \gamma_4 = 0.$

ESEMPIO 5. Trovare una base per \mathbb{R}^4 che riduce la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in forme canoniche di Jordan. Si trova che $\lambda = 1$ è un autovalore di molteplicità 4 e che

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando la riduzione di Gauss si trova $\delta_1 = 2$ e i due vettori seguenti

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

generano il $\text{Ker}(A - \lambda I)$. Risolviamo poi

$$(A - \lambda I)v = c_1 v_1^{(1)} + c_2 v_2^{(1)}$$

L'ultima riga implica $c_2 = 0$ mentre la terza $x_2 = 1$. Le restanti equazioni sono allora equivalenti a $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Perciò $v_1^{(1)} = v_1^{(2)}$ e si sceglie

$$v_1^{(2)} = (-1, 1, 0, 0)^T$$

Usando la riduzione di Gauss si trova poi $\delta_3 = 3$ e

$\{v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_2^{(1)}\}$ con $v_2^{(1)} = v_2^{(1)}$ genera il $\text{Ker}(A - \lambda I)$.

Analogamente si ha $\delta_3 = 4$ e $A_3 - \delta_1 = I$ si deve trovare $\delta_3 - \delta_2 = 1$ soluzione di

$$(A - \lambda I)v = v_1^{(2)}, \quad \text{dove } v_1^{(2)} = v_1^{(2)}$$

La terza riga implica $x_2 = 0$ e le restanti equazioni sono dunque equivalenti a $x_1 + x_3 + x_4 = 0$. Scegliamo

$$v_1^{(3)} = (1, 0, 0, 0)^T$$

Allora $B = \{v_1^{(3)}, v_2^{(3)}, v_3^{(3)}, v_4^{(3)}\} = \{v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, v_1^{(3)}, v_2^{(1)}\}$

è una base per il $\text{Ker}(A - \lambda I)^3 = \mathbb{R}^4$.

La matrice $P = [v_1^{(1)} v_2^{(1)} v_1^{(2)} v_2^{(2)}]$, con $v_1^{(1)} = V_1^{(1)}$, $v_2^{(1)} = V_1^{(2)}$,
 $v_3^{(1)} = v_1^{(3)}$ e $v_4^{(1)} = V_2^{(1)}$ e la sua inversa sono date perciò da

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si ottiene pertanto

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In tal caso si ha $\delta_1 = 2$, $\delta_2 = 3$, $\delta_3 = \delta_4 = 4$, $\gamma_1 = 2\delta_1 - \delta_2 = 1$,
 $\gamma_2 = 2\delta_2 - \delta_3 - \delta_1 = 0$, $\gamma_3 = 2\delta_3 - \delta_4 - \delta_2 = 1$, $\gamma_4 = \delta_4 - \delta_3 = 0$.

Vale la pena notare che la soluzione del problema di Cauchy (4) per tale esempio è data da

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = P e^{Jt} P^{-1} x_0 = P e^t \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} x_0 = \\ &= e^t \begin{pmatrix} 1-t-t^2/2 & -2t-t^2/2 & -t-t^2/2 & -t-t^2/2 \\ t & 1+t & t & t \\ t^2/2 & t+t^2/2 & 1+t^2/2 & t^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_0 \end{aligned}$$

1.9. - TEORIA DELLA STABILITA'

In questo paragrafo definiamo i sottospazi stabile E^s , instabile E^i e centrale E^c per un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax \quad (1).$$

Ricordiamo che avevamo definito E^s ed E^i nel paragrafo 1.2 nel caso in cui A aveva autovalori distinti.

Sia $w_j = u_j + i v_j$ un autovettore generalizzato della matrice reale A corrispondente a un autovalore $\lambda_j = a_j + i b_j$. Si noti che, se $b_j = 0$, allora $v_j = 0$. Sia

$$B = \{ u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m \}$$

una base di \mathbb{R}^n (con $n = 2m - k$) come stabilito dai teoremi 1 e 2 e dall'osservazione del paragrafo 1.7.

DEFINIZIONE 1. - Sia $\lambda_j = a_j + i b_j$, $w_j = u_j + i v_j$ e B come descritto sopra. Allora

$$E^s = \langle u_j, v_j : a_j < 0 \rangle$$

$$E^c = \langle u_j, v_j : a_j = 0 \rangle$$

$$\text{e } E^i = \langle u_j, v_j : a_j > 0 \rangle$$

ESEMPIO 1. - La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = u_1 + i v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{corrispondente a} \\ \lambda_1 = -2 + i$$

e

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{corrispondente a } \lambda_2 = 3.$$

Il sottospazio stabile E^s di (1) è il piano x_1, x_2 e il sottospazio instabile E^i è l'asse x_3 . Il ritratto di fase per il sistema (1) è mostrato in FIGURA 1.

FIGURA 1. Il sottospazio stabile E^s e instabile E^i del sistema lineare (1).

ESEMPIO 2. - La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ha $\lambda_1 = i$, $u_1 = (0, 1, 0)^T$, $v_1 = (1, 0, 0)^T$, $\lambda_2 = 2$

e $u_2 = (0, 0, 1)^T$. Il sottospazio centrale di (1) è dato dal piano x_1, x_2 e il sottospazio instabile dall'asse x_3 .

Il ritratto di fase per il sistema per il sistema (1) è mostrato in FIGURA 2. Si osserva che tutte le soluzioni si avviano sui cilindri $x_1^2 + x_2^2 = c^2$.

FIGURA 2. - I sottospazi centrale E^c e instabile E^i del sistema lineare (1).

ESEMPIO 3. Si consideri il sistema lineare (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ovvero } \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

Si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $u_1 = (0, 1)^T$ è un autovettore e $u_2 = (1, 0)^T$ un autovettore generalizzato corrispondente a $\lambda = 0$. Allora $E^c = \mathbb{R}^2$. La soluzione di (1) con $x(0) = c = (c_1, c_2)^T$ si trova facilmente che è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 \\ x_2(t) = c_1 t + c_2 \end{cases}$$

Il ritratto di fase per (1) ~~è dato~~ è ~~il~~ ~~ritratto~~ riportato in figura 3.

FIGURA 3. Il sottospazio centrale E^c per (1).

Alcune soluzioni (quelle con $c_i = 0$) rimangono limitate mentre altre no.

Descriviamo ora la motione di flusso di un sistema di equazioni differenziali e mostriamo che i sottospazi stabili, instabili e centrali di (1) sono invarianti rispetto al flusso di (1).

Del teorema fondamentale del paragrafo 1.4, la soluzione per il problema di Cauchy associato a (1) è data da

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

L'applicazione $e^{At} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ può essere vista come una descrizione del moto dei punti $x_0 \in \mathbb{R}^n$ lungo le traiettorie di (1).

Tale applicazione è detta flusso del sistema lineare (1).

DEFINIZIONE 2. - Se tutti gli autovalori della matrice $n \times n$ A hanno parte reale non nulla, allora il flusso $e^{At} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice un "flusso iperbolico" e (1) si dice sistema lineare iperbolico.

DEFINIZIONE 3. Un sottospazio $E \subset \mathbb{R}^n$ si dice invariante rispetto al flusso $e^{At} = \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se $e^{At} E \subset E \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Mostriamo ora che i sottospazi stabile, instabile e centrale di (1) sono invarianti rispetto al flusso e^{At} del sistema lineare (1), vale a dire che ogni soluzione che origine in E^s , E^i e E^c per $t=0$ rimane rispettivamente in E^s , E^i ed E^c $\forall t \in \mathbb{R}$.

LEMMA. Sia E un autospazio generalizzato di A relativo ad un autovalore λ . Allora $A E \subset E$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di autovettori generalizzati per E . Allora, dato $v \in E$, si ha

$$v = \sum_{j=1}^k c_j v_j$$

e, per linearità,

$$Av = \sum_{j=1}^k c_j Av_j$$

Visto che v_j verifica $(A - \lambda I)^{k_j} v_j = 0$

per un opportuno k_j minimo, si ha

$$(A - \lambda I) v_j = v_j',$$

dove $v_j' \in \ker (A - \lambda I)^{k_j-1} \subset E$. Per induzione segue che

$Av_j = \lambda v_j + v_j' \in E$ e, visto che E è un sottospazio di \mathbb{R}^n ,

si ha

$$\sum_{j=1}^k c_j Av_j \in E,$$

ovvero $Av \in E$ e quindi $A E \subset E$. \blacksquare

TEOREMA 1. Sia A una matrice reale $n \times n$. Allora

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c;$$

inoltre E^s, E^i ed E^c sono invarianti rispetto al flusso e^{At} di (1).

DIMOSTRAZIONE. - Visto che $B = \{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$ è una base di \mathbb{R}^n , segue dalle definizioni che

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^i \oplus E^c.$$

Se $x_0 \in E^s$, allora $x_0 = \sum_{j=1}^{n_s} c_j v_j$

dove $v_j = v_j$ oppure u_j e $\{v_j\}_{j=1}^n \subset B$ è una base per

il sottospazio stabile E^S come descritto nella definizione 1.

Per linearità si ha allora

$$e^{At} x_0 = \sum_{j=1}^{n_s} C_j e^{At} V_j.$$

$$\text{Ma } e^{At} V_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(I + At + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} \right) V_j \in E^S$$

visto che per $j=1, \dots, n_s$, in base al lemma precedente, $A^k V_j \in E^S$ ed E^S è completo. Perciò, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$e^{At} x_0 \in E^S$ e quindi $e^{At} E^S \subset E^S$, ossia E^S è invariante sotto il flusso e^{At} .

In modo analogo si mostra che E^i e E^c sono invarianti ~~sta~~ mediante il flusso e^{At} .

GENERALIZZIAMO ora la definizione di POZZO e SORGENTE per i sistemi 2×2 presentati nel paragrafo 1.5.

DEFINIZIONE 4. Se tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa (positiva), l'origine è detta POZZO (SORGENTE) per il sistema lineare (1).

TEOREMA 2. Sono equivalenti:

a) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0$ e $\forall x_0 \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{At} x_0| = \infty$

b) Tutti gli autovalori di A hanno parte reale negativa

c) Esistono quattro costanti positive α, c, m ed M e una costante $k \geq 0$ tale che $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$m |t^k| e^{-\alpha t} |x_0| \leq |e^{At} x_0| \leq M e^{-ct} |x_0|$$

TEOREMA 3. Sono equivalenti

a) $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0$ e $\forall x_0 \neq 0$, $\lim_{t \rightarrow -\infty} |e^{At} x_0| = \infty$

b) Tutti gli autovalori di A hanno parte reale positiva.

c) Esistono quattro costanti positive α, ϵ, m ed M e una costante $k > 0$ tale che $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$m e^{\epsilon t} |x_0| \leq |e^{At} x_0| \leq M (1 + |t|^k) e^{\alpha t} |x_0|.$$

COROLLARIO. Se $x_0 \in E^s$, allora $e^{At} x_0 \in E^s \forall t \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{At} x_0 = 0.$$

Se $x_0 \in E^i$, allora $e^{At} x_0 \in E^i \forall t \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{At} x_0 = 0.$$

Allora tutte le soluzioni di (1) che partono nella varietà stabile E^s di (1) rimangono in $E^s \forall t$ e tende verso l'origine esponenzialmente quando $t \rightarrow \infty$; e tutte le soluzioni di (1) che partono da un punto della varietà instabile E^i di (1) rimangono in $E^i \forall t$ e tendono esponenzialmente verso l'origine quando $t \rightarrow -\infty$.

Vedremo nel Capitolo 2 che vi è un analogo risultato per i sistemi non lineari detto TEOREMA DELLA VARIETA' STABILE.

1.10 - SISTEMI LINEARI NON OMOGENEI

In questo paragrafo vogliamo risolvere il sistema lineare non omogeneo

$$\dot{x} = Ax + b(t) \quad (1)$$

dove A è una matrice $n \times n$ e $b(t)$ una funzione a valori vettoriali continua.

DEFINIZIONE. - Una matrice soluzione fondamentale di

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

è una matrice $n \times n$ non singolare $\phi(t)$ che soddisfa

$$\dot{\phi}(t) = A \phi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Si osserva che, in base al lemma del paragrafo 1.4, $\phi(t) = e^{At}$ è una matrice soluzione fondamentale che verifica $\phi(0) = I$.

Inoltre, ogni matrice soluzione fondamentale $\phi(t)$ di (2) è data da $\phi(t) = C e^{At}$ per qualche matrice non singolare C .

Una volta trovata una matrice soluzione fondamentale di (2), è facile risolvere il sistema non omogeneo (1). Il risultato è riportato nel teorema seguente.

TEOREMA 1. - Se $\phi(t)$ è una matrice soluzione fondamentale di (2), allora la soluzione del sistema lineare non omogeneo (1) con condizione di Cauchy $x(0) = x_0$ è data da

$$x(t) = \phi(t) \phi^{-1}(0) x_0 + \int_0^t \phi(t) \phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \quad (3)$$

DIMOSTRAZIONE.

Per ogni $x(t)$ definita come in (3) si ha

$$x'(t) = \phi'(t) \phi^{-1}(0) x_0 + \phi(t) \phi^{-1}(t) b(t) + \\ + \int_0^t \phi'(t) \phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau =$$

visto che $\phi(t)$ è una matrice soluzione fondamentale di (2),

$$= A \left(\phi(t) \phi^{-1}(0) x_0 + \int_0^t \phi(t) \phi^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \right) + b(t) \\ = A x(t) + b(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$



OSSERVAZIONE 1. - Se la matrice A in (1) dipende dal tempo, $A = A(t)$, allora la stessa dimostrazione mostra che la soluzione del sistema lineare non omogeneo (1) e la condizione iniziale $x(0) = x_0$ è data da (3) purché $\phi(t)$ è una matrice soluzione fondamentale di (2) con $A = A(t)$.

In questo corso, comunque, mi considererò principalmente il caso $A = A(t)$.

OSSERVAZIONE 2. - Della $\phi(t) = e^{At}$, la soluzione del sistema lineare non omogeneo di (1), come trovato nel precedente teorema, è data

$$da \\ x(t) = e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau$$

ESEMPIO. - Risolvere il ~~problema~~ problema dell'oscillatore armonico forzato

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

L'equazione può risciversi come un sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + f(t) \end{cases}$$

o equivalentemente nella forma (1) con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

In tal caso

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = R(t),$$

una matrice di rotazione. Perciò

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = R(-t).$$

La soluzione del sistema precedente con dato di Cauchy $x(0) = x_0$ è dato perciò da

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} b(\tau) d\tau = \\ &= R(t) x_0 + R(t) \int_0^t \begin{pmatrix} f(\tau) \sin(\tau) \\ f(\tau) \cos(\tau) \end{pmatrix} d\tau. \end{aligned}$$

Segue che la soluzione $x = x_1(t)$ del problema dell'oscillatore armonico forzato è dato da

$$x(t) = x(0) \cos t - \dot{x}(0) \sin t + \int_0^t f(\tau) \sin(\tau - t) d\tau.$$

2.5 - FLUSSO DEFINITO ATTRAVERSO UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE

Nel paragrafo 1.9 è stato definito il flusso $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

per il sistema lineare $\dot{x} = Ax$.

L'applicazione $\phi_t = e^{At}$ soddisfa le seguenti proprietà fondamentali per ogni $x \in \mathbb{R}^n$:

- i) $\phi_0(x) = x$ [dalla definizione di e^{At}]
- ii) $\phi_s(\phi_t(x)) = \phi_{s+t}(x) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$ [dalla Prop. 2 del paragrafo 1.3]
- iii) $\phi_{-t}(\phi_t(x)) = \phi_t(\phi_{-t}(x)) = x \quad \forall t \in \mathbb{R}$. [dal corollario 2 del par. 1.3].

In questo paragrafo vogliamo definire il flusso, ϕ_t del sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

e mostrare che esso soddisfa le stesse proprietà fondamentali.

Nella definizione che segue, indicheremo con $I(x_0)$ l'intervallo massimale di esistenza delle soluzioni $\phi(t; x_0)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

visto che gli estremi α e β dell'intervallo massimale solitamente dipendono da x_0 .

DEFINIZIONE 1. Sia E un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n e sia $f \in C^1(E)$. Preso $x_0 \in E$, sia $\phi(t; x_0)$ la soluzione del problema di Cauchy (2) definita sul suo intervallo massimale di esistenza $I(x_0)$. Allora per $t \in I(x_0)$, l'applicazione

$\phi_t: E \rightarrow E$ definita da $\phi_t(x_0) = \phi(t; x_0)$

è detta "flusso dell'equazione differenziale" (1) o flusso definito dall'equ. differenziale (1); ϕ_t è anche detto flusso del campo vettoriale $f(x)$.

Se si pensa il punto iniziale x_0 fissato e si indice con $I = I(x_0)$, allora l'applicazione $\phi(\cdot; x_0): I \rightarrow E$ definisce una curva soluzione o traiettoria del sistema (1) attraverso il punto $x_0 \in E$.

Al solito, l'applicazione $\phi(\cdot, x_0)$ si identifica con il suo grafico in $I \times E$ e una traiettoria è visualizzata come un moto lungo una curva Γ attraverso il punto x_0 nel sottoinsieme E dello spazio delle fasi (si veda figura 1)

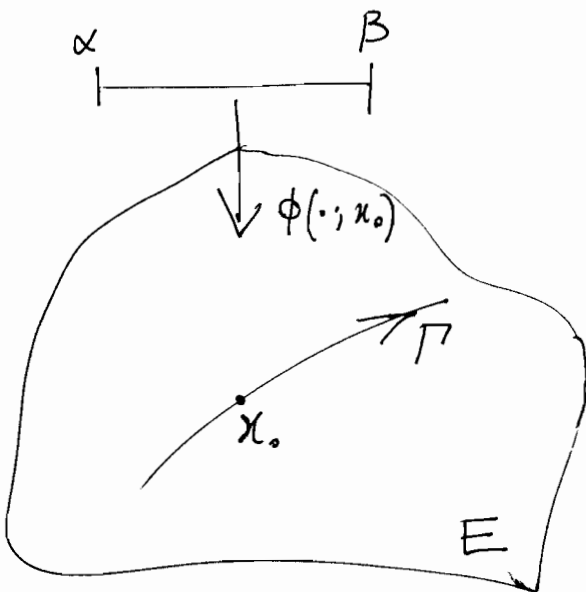


FIGURA 1. - Una traiettoria Γ del sistema (1)

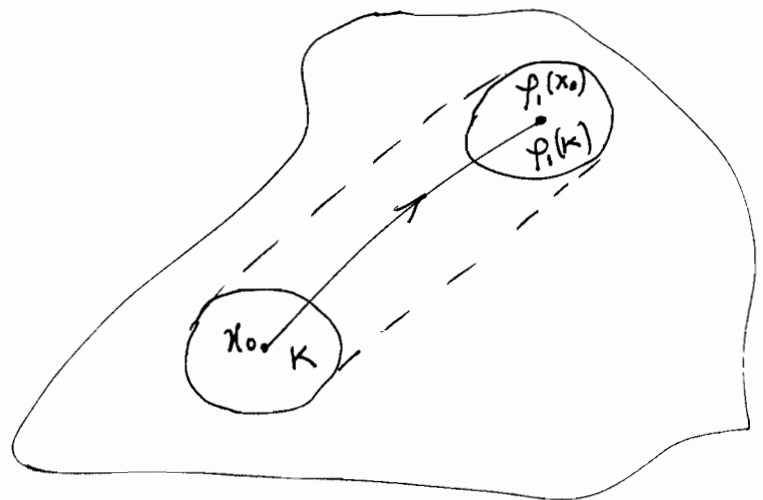


FIGURA 2. - Il flusso ϕ_t del sistema (1)

D'altro canto, se pensiamo al punto x_0 che varia dentro $K \subset E$, allora il flusso dell'equazione differenziale (1), $\phi_t: K \rightarrow E$ può essere visto come il moto di tutti i punti ~~in~~ nell'insieme K (si veda figura 2)

Se si pensa all'equazione differenziale (1) come la descrizione del moto di un fluido, allora una traiettoria di (1) descrive il moto di una particella individuale nel fluido mentre il flusso dell'equazione differenziale (1) descrive il moto dell'intero fluido.

Verifichiamo adesso che le proprietà fondamentali (i)-(iii) dei flussi lineari sono verificate anche nel caso di flussi non lineari.

Ma prima estendiamo il Teorema 1 del paragrafo 2.3, che stabilisce che $\phi(t; x_0)$ è una funzione localmente regolare, ed un risultato globale. Usando la stessa notazione della Definizione 1, definiamo l'insieme $\Omega \subset \mathbb{R} \times E$ come

$$\Omega = \{ (t; x_0) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in I(x_0) \}$$

ESEMPIO 1. — Si consideri l'equazione differenziale

$$\dot{x} = \frac{1}{x}$$

con $f(x) = \frac{1}{x} \in C^1(E)$ ed $E = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$.

La soluzione di tale equazione differenziale con condizione iniziale $x(0) = x_0$ è data da

$$\phi(t; x_0) = \sqrt{2t + x_0^2}$$

con intervallo di esistenza $I(x_0) = \left(-\frac{x_0^2}{2}, +\infty \right)$. La regione Ω per tale problema è mostrata in FIGURA 3.

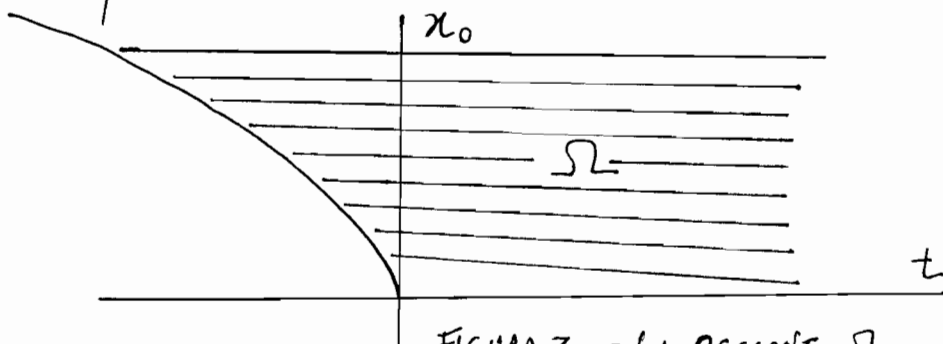


FIGURA 3. — LA REGIONE Ω .

TEOREMA 1. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n e sia $f \in C^1(E)$. Allora Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R} \times E$ e $\phi \in C^1(\Omega)$.

TEOREMA 2. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $f \in C^1(E)$. Allora $\forall x_0 \in E$, se $t \in I(x_0)$ ed $s \in I(\phi_t(x_0))$, allora $s+t \in I(x_0)$ e risulta

$$\phi_{s+t}(x_0) = \phi_s(\phi_t(x_0))$$

DIM.

Supponiamo $s > 0$, $t \in I(x_0)$ ed $s \in I(\phi_t(x_0))$. Sia $I(x_0) = (\alpha, \beta)$ l'intervallo massimale e definiamo la funzione

$\chi: (\alpha, s+t) \rightarrow E$ come

$$\chi(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau; x_0) & \text{se } \alpha < \tau \leq t \\ \phi(\tau-t, \phi_t(x_0)) & \text{se } t < \tau \leq s+t. \end{cases}$$

Allora $\chi(\tau)$ è una soluzione del problema di Cauchy (2) su $(\alpha, s+t]$. Quindi $s+t \in I(x_0)$ e per l'unicità della soluzione

$$\phi_{s+t}(x_0) = \chi(s+t) = \phi(s, \phi_t(x_0)) = \phi_s(\phi_t(x_0))$$

Se $s=0$ il risultato è immediato. Se $s < 0$, allora si definisca $\chi: [s+t, \beta) \rightarrow E$ come

$$\chi(\tau) = \begin{cases} \phi(\tau; x_0) & \text{se } t \leq \tau < \beta \\ \phi(\tau-t, \phi_t(x_0)) & \text{se } s+t \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Allora $x(x)$ è una soluzione del problema di Cauchy (2) su $[s+t, \beta)$ e l'ultimo asserto del teorema segue dall'unicità delle soluzioni come prima.

TEOREMA 3. Sotto le ipotesi del Teorema 1, se $(t; x_0) \in \Omega$, allora esiste un intorno U di x_0 t.c. $\{t\} \times U \subset \Omega$. Segue allora che l'insieme $V = \phi_t(U)$ è aperto in E e che

$$\phi_{-t}(\phi_t(x)) = x \quad \forall x \in U.$$

$$\phi_t(\phi_{-t}(y)) = y \quad \forall y \in V.$$

~~Dim.~~

~~Se $(t, x_0) \in \Omega$, allora~~

Nel capitolo 3 mostreremo che il tempo lungo ogni traiettoria di (1) può esseri riscelato senza modificare il ritratto di fase, cosicché $\forall x_0 \in E$, la soluzione $\phi(t; x_0)$ del pb di Cauchy (2) è definita $\forall t \in \mathbb{R}$; cioè, $\forall x_0 \in E, I(x_0) = (-\infty, +\infty)$. Tale riscalamento evita alcune complicazioni trovate nell'esporre i teoremi precedenti. Una volta fatti tali riscalamenti, segue che $\Omega = \mathbb{R} \times E$, $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times E)$, $\phi_t \in C^1(E) \forall t \in \mathbb{R}$ e le proprietà (i)-(iii) per il flusso del sistema non lineare (1) valgono $\forall t \in \mathbb{R}$ e $x \in E$ così come per il flusso lineare e^{At} . Nel seguito di questo capitolo, e in particolare nei paragrafi 2.4 e 2.8, assumeremo che è stato fatto il riscalamento cosicché $x_0 \in E$, $\phi(t; x_0)$ è definito $\forall t \in \mathbb{R}$; cioè enunceremo che il flusso del sistema non lineare (1) $\phi_t \in C^1(E) \forall t \in \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 2. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $f \in C^1(E)$ e

$\phi_t: E \rightarrow E$ il flusso dell'equazione differenziale (1) definito $\forall t \in \mathbb{R}$.

Allora un insieme $S \subset E$ si dice invariante rispetto al flusso ϕ_t se $\phi_t(S) \subset S \forall t \in \mathbb{R}$ ed S si dice positivamente (o negativamente) invariante rispetto al flusso ϕ_t se $\phi_t(S) \subset S \forall t > 0$ ($0 < t \leq 0$).

~~Nella sezione~~

Nel paragrafo 1.3 ~~abbiamo~~ abbiamo mostrato che ~~gli~~ ~~gli~~ sottospazi stabile, instabile e centrale del sistema dinamico lineare $\dot{x} = Ax$ sono invarianti sotto il flusso lineare $\phi_t = e^{At}$. Nel paragrafo 2.4 dimostreremo un risultato simile per il flusso non lineare ϕ_t di (1).

ESEMPIO 2. Si consideri il sistema non lineare (1) con

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

La soluzione del problema di Cauchy (1), ~~ossia~~ con condizione iniziale $x(0) = c$, è data da

$$\phi_t(c) = \phi(t, c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^t + \frac{c_1^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{pmatrix}$$

Mostriamo adesso che l'insieme

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^2; x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2 \right\}$$

è invariante attraverso il flusso ϕ_t . Infatti, se $c \in S$,

allora $c_2 = -\frac{1}{3} c_1^2$ e si ha

$$\phi_t(c) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ -\frac{1}{3} c_1^2 e^{-2t} \end{pmatrix} \in S.$$

Perciò $\phi_t(S) \subset S \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Il ritratto di fase per il sistema non lineare (1) con ~~$f(x)$~~ $f(x)$ dato sopra è mostrato in figura 4. L'insieme S è detta varietà stabile per tale sistema. Questo viene discusso nel paragrafo 2.7.

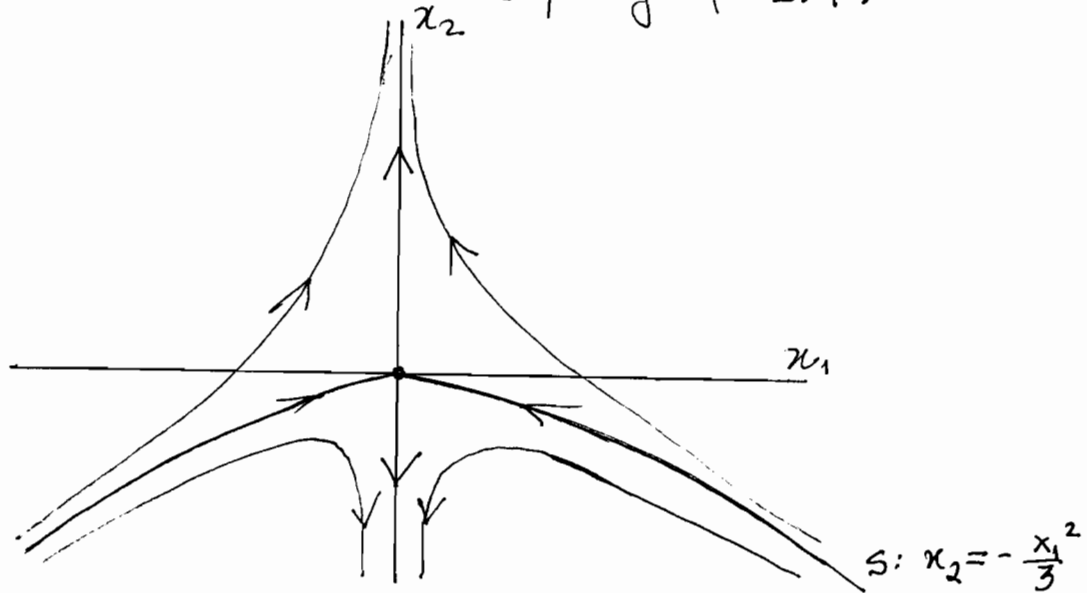


FIGURA 4 - L'insieme S invariante per il sistema (1).

2.6 - LINEARIZZAZIONE

Per iniziare ad analizzare il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

è importante determinare i punti di equilibrio di (1) e descrivere il comportamento di (1) vicino i suoi punti di equilibrio.

~~Nelle prossime~~ Nei due paragrafi che seguono si mostra come il comportamento locale del sistema non lineare (1) vicino un punto di equilibrio iperbolico x_0 è qualitativamente determinato dal comportamento del sistema lineare

$$\dot{x} = A x,$$

con la matrice $A = Df(x_0)$, vicino l'origine.

La funzione lineare $Ax = Df(x_0)x$ è chiamato parte lineare di f ad x_0 .

DEFINIZIONE 1. - Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è detto un "punto di equilibrio" o "punto critico" di (1) se $f(x_0) = 0$. Un punto di equilibrio x_0 è detto "punto di equilibrio iperbolico" di (1) se nessuno degli autovalori della matrice $Df(x_0)$ ha parte reale nulla. Il sistema lineare (2) con la matrice $A = Df(x_0)$ è detto la linearizzazione di (1) in x_0 .

Se $x_0 = 0$ è un punto di equilibrio di (1), allora $f(0) = 0$ e, dallo sviluppo di Taylor,

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2} D^2f(0)\langle x, x \rangle + \dots$$

Segue che la funzione lineare $Df(0)x$ è la prima approssimazione

per ~~la~~ la funzione non lineare $f(x)$ vicino $x=0$ ed è ragionevole aspettarsi che il comportamento del sistema non lineare (1), vicino al punto $x=0$, sia approssimato dal comportamento della sua linearizzazione in $x=0$. Nel paragrafo 2.7 si dimostra che in effetti questa è la situazione nel caso in cui $Df(0)$ ha autovalori non nulli né immaginari puri.

Si osservi che se x_0 è un punto di equilibrio di (1) e $\phi_t: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il flusso dell'equazione differenziale (1), allora $\phi_t(x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Così, x_0 è chiamato un punto fisso del flusso ϕ_t ; è anche detto uno zero, un punto critico o un punto singolare del campo vettoriale $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Diamo poi di seguito una prima classificazione dei punti di equilibrio di (1) in base al segno delle parti reali degli autovalori della matrice $Df(x_0)$. Una classificazione più precisa verrà data nel paragrafo 2.10 per i ~~campi~~ campi vettoriali planari.

DEFINIZIONE 2. Un punto di equilibrio x_0 di (1) è detto un "pozzo" se tutti gli autovalori della matrice $Df(x_0)$ hanno parte reale negativa; si dice una "sorgente" se tutti gli autovalori della matrice $Df(x_0)$ hanno parte reale positiva; si dice una "sella" se è un punto di equilibrio iperbolico e $Df(x_0)$ ha almeno un autovalore con parte reale positiva e uno con parte reale negativa.

ESEMPIO 1. Classificare tutti i punti di equilibrio del sistema non lineare (1) con

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Chiaramente $f(x) = 0$ in $x = (1, 0)^T$ e $x = (-1, 0)^T$ e questi sono gli unici punti di equilibrio di (1). Si ha poi

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Df(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Df(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Perciò $(1, 0)^T$ è una sorgente e $(-1, 0)^T$ è una sella.

Nel paragrafo 2.8 vedremo che se x_0 è un punto di equilibrio iperbolico di (1) allora il comportamento locale del sistema non lineare (1) è topologicamente equivalente al comportamento locale del sistema lineare (2), vale a dire che esiste un'applicazione continua e invertibile di un intorno di x_0 su un intorno U dell'origine, $H: N_\varepsilon(x_0) \rightarrow U$ che trasforma (1) in (2) e manda traiettorie di (1) che stanno in $N_\varepsilon(x_0)$ su traiettorie di (2) dell'aperto U e che conserva l'orientazione.

In sintesi $N_\varepsilon(x_0)$ può essere visto come la deformazione (non lineare!) dell'intorno U .

ESEMPIO 2. Si consideri l'applicazione continua

$$H(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{pmatrix}$$

che manda \mathbb{R}^2 su \mathbb{R}^2 . E' facile verificare che la sua inversa ~~è~~ è data da

$$H^{-1}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{1}{3}y_1^2 \end{pmatrix}$$

e che H^{-1} è un'applicazione continua che manda \mathbb{R}^2 su \mathbb{R}^2 .

Inoltre, l'applicazione H manda il sistema non lineare (1)

con

$$f(x) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{pmatrix}$$

nel sistema lineare (2) con

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nel senso che se $y = H(x)$, allora

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 + \frac{2}{3}x_1\dot{x}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 + \frac{2}{3}x_1(-x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

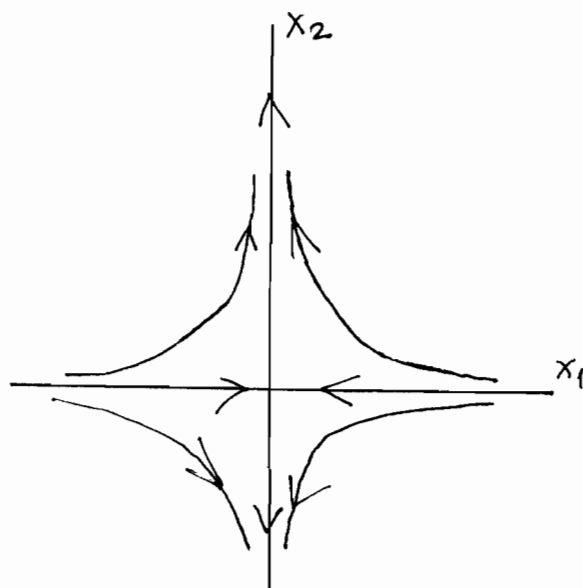
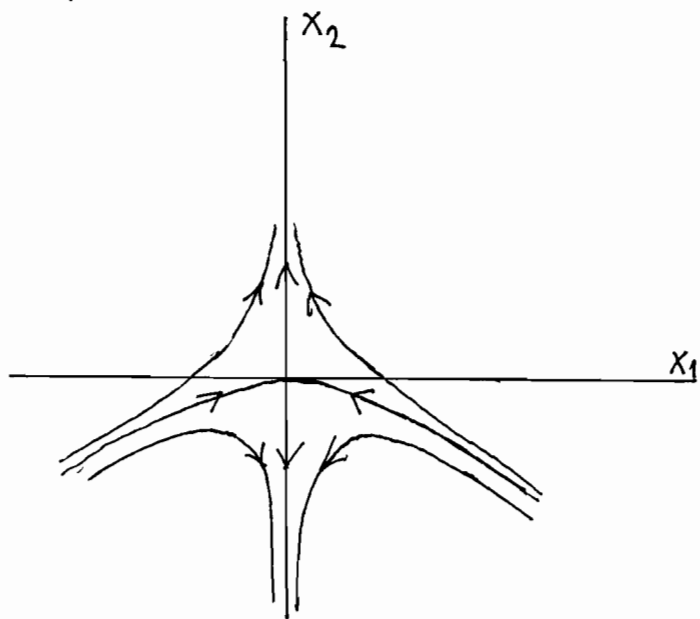
vale a dire che, banalmente

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

Abbiamo usato il fatto che $x = H^{-1}(y)$ implica

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - \frac{1}{3} y_1^2 \end{cases}$$

per ottenere le relazioni conclusive. Il ritratto di fase per il sistema non lineare di tale esempio è messo a confronto qui sotto con il ritratto di fase del sistema lineare corrispondente: si vede come i due ritratti di fase sono qualitativamente lo stesso.



2.7 - IL TEOREMA DELLA VARIETA' STABILE

Il teorema della varietà stabile è uno dei risultati più importanti nella teoria locale qualitativa delle equazioni differenziali ordinarie. Il teorema mostra che vicino a un punto di equilibrio x_0 iperbolico, il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

ha varietà stabili ed instabili S ed I tangenti in x_0 ai sottospazi stabili ed instabili E^S ed E^I del sistema linearizzato

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

dove $A = Df(x_0)$. Inoltre, S ed I hanno la stessa dimensione di E^S ed E^I , e se ϕ_t è il flusso del sistema non lineare (1), allora S ed I sono rispettivamente positivamente e negativamente invarianti mediante ϕ_t e soddisfano

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = x_0 \quad \forall c \in S,$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = x_0 \quad \forall c \in I.$$

Illustreremo prima tali idee mediante un esempio e renderemo poi l'argomento più preciso ~~dimostrando~~ ^{altrimenti} il teorema.

Assumeremo che il punto di equilibrio x_0 sia collocato nell'origine in tutto questo paragrafo: se così non fosse, basterebbe procedere con una traslazione mediante la trasformazione di coordinate $x \mapsto x - x_0$.

ESEMPIO 1. Si consideri il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1^2 \\ \dot{x}_3 = x_3 + x_1^2 \end{cases}$$

L'unico punto di equilibrio di tale sistema è l'origine.

La matrice A del sistema lineare associato è data da

$$A = Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perciò, il sottospazio stabile E^S ed instabile E^I di (2) sono il piano x_1, x_2 e l'asse x_3 rispettivamente.

Dopo aver risolto la prima equazione differenziale, $\dot{x}_1 = -x_1$, il sistema non lineare si riduce a un sistema di due equazioni differenziali lineari non omogenee (disaccoppiate) facilmente risolubili. La soluzione è data da

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{-t} + c_1^2 (e^{-t} - e^{-2t}) \\ x_3(t) = c_3 e^t + \frac{1}{3} c_1^2 (e^t - e^{-2t}) \end{cases}$$

dove $c = x(0)$. Chiaramente $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(c) = 0$ se e solo se

$$c_3 + \frac{1}{3} c_1^2 = 0. \text{ Perciò}$$

$$S = \left\{ c \in \mathbb{R}^3 \mid c_3 = -c_1^2/3 \right\}$$

Analogamente, $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(c) = 0$ se e solo se $c_1 = c_2 = 0$ e

$$\text{quindi } I = \{ c \in \mathbb{R}^3 \mid c_1 = c_2 = 0 \}$$

Le varietà stabili ed instabili per tale sistema sono mostrate in FIGURA 1. Si noti che la superficie S è tangente a E^S , vale a dire al piano x_1, x_2 ~~nell'origine~~ ^{nell'origine} mentre $I = E^I$.

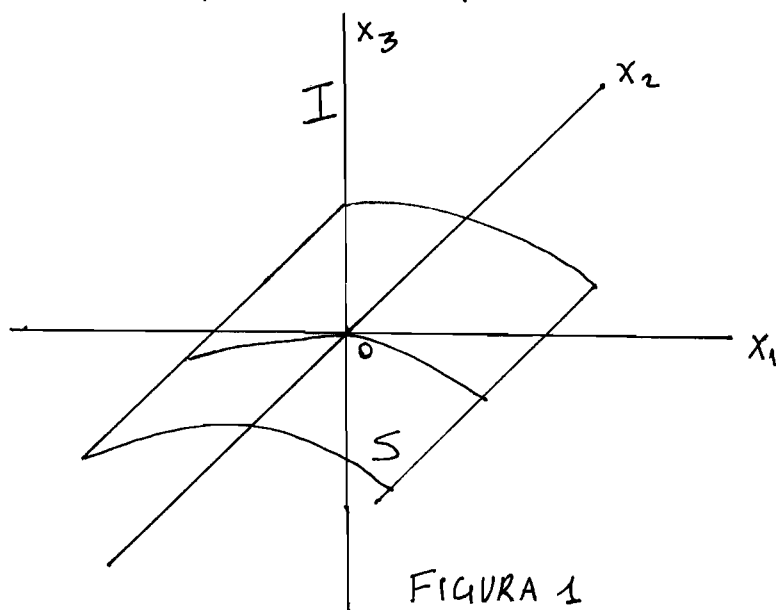


FIGURA 1

Prima di ~~enunciare~~ ^{enunciare} il teorema, introduciamo il concetto di superficie regolare e di varietà differenziabile.

DEFINIZIONE 1. Sia X uno spazio metrico e siano A e B sottoinsiemi di X . Un omeomorfismo di A su B è un'applicazione continua di A su B , $h: A \rightarrow B$ tale che $h^{-1}: B \rightarrow A$ è continua. Gli insiemi A e B sono detti omeomorfi o topologicamente equivalenti se vi è un omeomorfismo di A su B .

DEFINIZIONE 2. Una varietà differenziabile n -dimensionale M (ovvero una varietà di classe C^k) è uno spazio metrico connesso con un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}$, ovvero

$$M = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \quad \text{f. c.}$$

1) $\forall \alpha$, U_{α} è omeomorfo alla sfera unitaria aperta di \mathbb{R}^n , $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, vale a dire che $\forall \alpha \exists$ un omeomorfismo di U_{α} su B , $h_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow B$ e

2) se $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$, e $h_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow B$, $h_{\beta}: U_{\beta} \rightarrow B$

sono omeomorfismi, allora

$h_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ e $h_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ sono sottoinsiemi

di \mathbb{R}^n e l'applicazione

$$h = h_{\alpha} \circ h_{\beta}^{-1} : h_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow h_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

è differenziabile (o di classe C^k) e $\forall x \in h_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$,

il determinante jacobiano $\det Dh(x) \neq 0$. La

varietà M è detta "analitica" se $h = h_{\alpha} \circ h_{\beta}^{-1}$ è analitica.

L'applicazione cilindrica

La superficie cilindrica S dell'esempio precedente è una varietà differenziabile due-dimensionale. La proiezione del piano x_1, x_2 su S manda il disco unitario centrato nei

punti (m, n) del piano x_1, x_2 sull'immagine omeomorfa del disco unitario $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Tali insiemi $U_{mn} \subset S$ costituiscono allora un ricoprimento aperto numerabile di S in tal caso.

La coppia (U_α, h_α) è detta una "carta" per la varietà M e l'insieme di tutte le carte è detto un atlante per M .

La varietà differenziabile M è detta orientabile se esiste un atlante con $\det D(h_\alpha \circ h_\beta^{-1})(x) > 0 \quad \forall \alpha, \beta$ e $x \in h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$.

TEOREMA DELLA VARIETA' STABILE.

Sia E un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n contenente l'origine, $f \in C^1(E)$ e sia ϕ_t il flusso del sistema non lineare (1). Supponiamo che $f(0) = 0$ e che $Df(0)$ abbia k autovalori con parte reale \leq negativa ed $(n-k)$ autovalori con parte reale positiva. Allora esiste una varietà differenziabile k -dimensionale S tangente al sottospazio stabile E^s del sistema lineare (2) nell'origine tale che $\forall t \geq 0, \phi_t(S) \subset S$ e $\forall x_0 \in S,$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Inoltre esiste una varietà $(n-k)$ -dimensionale differenziabile I tangente al sottospazio instabile E^I di (2) nell'origine t.c.

$\forall t \leq 0, \phi_t(I) \subset I$ e $\forall x_0 \in I,$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0.$$

Osserviamo che se $f \in C^1(E)$ e $f(0) = 0$, allora il sistema (1) si può scrivere come

$$\dot{x} = Ax + F(x) \tag{3}$$

dove $A = Df(0)$, $F(x) = f(x) - Ax$, $F \in C^1(E)$, $F(0) = 0$ e $DF(0) = 0$.

Questo a sua volta implica che $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $|x| \leq \delta$ e $|y| \leq \delta$ implica che

$$|F(x) - F(y)| \leq \epsilon |x - y| \tag{4}$$

Inoltre, come nel paragrafo 1.8, $\exists C \in M_{n \times n}$ invertibile t.c.

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$$

dove gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ della matrice $P \in M_{n \times n}$ hanno parte reale negativa mentre gli autovalori $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ della matrice $Q \in M_{(n-k) \times (n-k)}$ hanno parte reale positiva. Possiamo allora scegliere $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo t.c.

per $j = 1, \dots, k$, $\text{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$. $\tag{5}$

Sia $y = C^{-1}x$. Allora il sistema (3) ha la forma

$$\dot{y} = By + G(y) \tag{6}$$

dove $G(y) = C^{-1}F(Cy) \in C^1(\tilde{E})$ dove $\tilde{E} = C^{-1}(E)$ e G soddisfa la precedente condizione (4) di tipo Lipschitz.

Non riportiamo in queste note la dimostrazione del teorema.

Le varietà stabili ed instabili S ed I , come meglio si evincerebbe dalla dimostrazione ~~del~~ del teorema delle varietà stabile, sono definite solo in un intorno dell'origine.

S ed I sono dette ~~anche~~ varietà stabili ed instabili locali ~~dell'origine~~ di (1) definite in un intorno dell'origine

o semplicemente come le varietà stabili ed instabili locali dell'origine. Definiamo le varietà stabili ed instabili globali di zero.

DEFINIZIONE 3. Sia ϕ_t il flusso del sistema non lineare (1).

Le varietà globali stabile e instabile ^{in zero} sono definite rispettivamente come

$$W^S(0) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S)$$

e

$$W^I(0) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(I).$$

$W^S(0)$ e $W^I(0)$ vengono anche dette ~~o~~ le varietà globali stabili e instabili dell'origine. Si può dimostrare che le varietà stabile e instabile $W^S(0)$ e $W^I(0)$ sono uniche e invarianti rispetto al flusso ϕ_t . Inoltre, $\forall x \in W^S(0), \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = 0$ e $\forall x \in W^I(0), \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = 0$.

Corollario. Sotto le ipotesi del TEOREMA DELLA VARIETA' STABILE, se S ed I sono le varietà stabili e Instabili di (1) nell'origine e se $\text{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0 < \beta < \text{Re}(\lambda_m)$ per

$j = 1, \dots, k$ ed $m = k+1, \dots, n$, allora dato $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 t.c. se $x_0 \in N_\delta^s(0) \cap S$ si ha $|\phi_t(x_0)| \leq \varepsilon e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0$
 e se $x_0 \in N_\delta^u(0) \cap I$ allora $|\phi_t(x_0)| \leq \varepsilon e^{\beta t} \quad \forall t \leq 0$.

Diamo infine un risultato che stabilisce l'esistenza di una varietà centrale invariante $W^c(0)$ tangente a E^c nell'origine.

TEOREMA DELLA VARIETA' CENTRALE

Sia $f \in C^r(E)$, dove E è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n contenente l'origine ed $r \geq 1$. Supponiamo che $f(0) = 0$ e che $Df(0)$ abbia k autovalori con parte reale negativa, j autovalori con parte reale positiva ed $m = n - k - j$ autovalori con parte reale nulla. Allora esiste una varietà centrale m -dimensionale $W^c(0)$ di classe C^r tangente al sottospazio centrale E^c di (2) nell'origine che è invariante attraverso il flusso ϕ_t di (1).

ESEMPIO. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

Il sottospazio stabile E^s del sistema linearizzato nell'origine coincide con l'asse x_2 e il sottospazio centrale E^c è l'asse x_1 . Tale sistema si risolve facilmente: il suo ritratto di fase è riportato in figura:

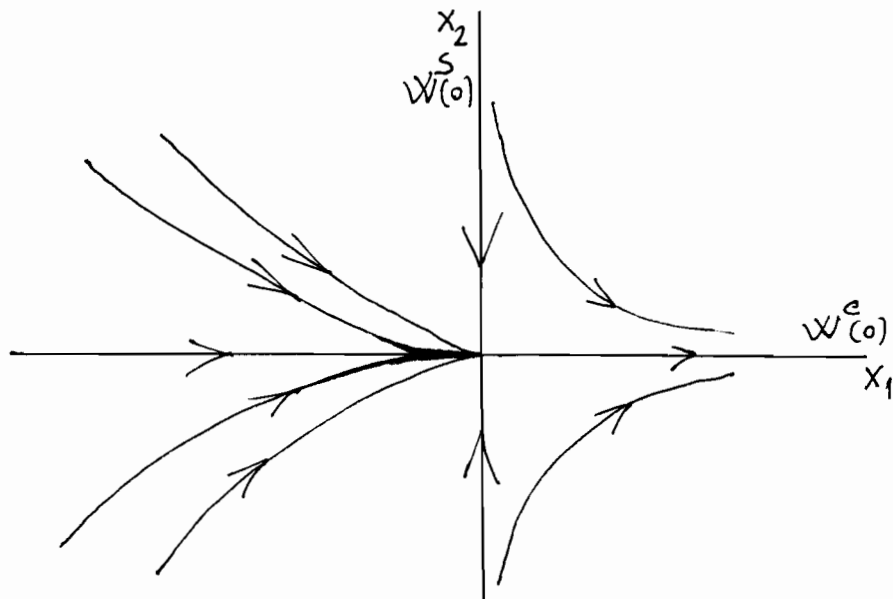


FIGURA. Ritratto di fase per il sistema dell'esempio.

Ogni curva soluzione di tale sistema a sinistra dell'origine si schiaccia sull'asse delle x_1 nell'origine dando luogo ad una varietà centrale C^∞ uno-dimensionale tangente a E^c nell'origine. Questo mostra che in generale la varietà centrale $W^c(0)$ non è unica. ~~È~~ Comunque nell'esempio vi è soltanto una varietà centrale analitica, ovvero l'asse x_1 .

2.8. IL TEOREMA DI HARTMAN-GROBMAN

Il teorema di Hartman-Grobman è un altro risultato molto importante nella teoria ~~locale~~ qualitativa locale delle equazioni differenziali ordinarie. Il teorema mostra che vicino un punto di equilibrio iperbolico x_0 , il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

ha la stessa struttura qualitativa del sistema lineare

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

con $A = Df(x_0)$. In questo paragrafo assumeremo che il punto di equilibrio x_0 sia stato traslato nell'origine.

DEFINIZIONE 1. Due sistemi autonomi come (1) e (2) sono detti topologicamente equivalenti in un intorno dell'origine o ~~che~~ avere la stessa struttura qualitativa vicino l'origine se esiste un omeomorfismo H che manda un aperto U contenente l'origine su un aperto V contenente l'origine e manda traiettorie di (1) dentro U su traiettorie di (2) dentro V conservando l'orientazione. Se l'omeomorfismo H conserva la parametrizzazione rispetto al tempo, allora (1) e (2) sono detti ~~è~~ coniugati topologicamente in un intorno dell'origine.

Prima del teorema vediamo un esempio di sistemi lineari topologicamente coniugati.

2.8. IL TEOREMA DI HARTMAN-GROBMAN

Il teorema di Hartman-Grobman è un altro risultato molto importante nella teoria ~~locale~~ qualitativa locale delle equazioni differenziali ordinarie. Il teorema mostra che vicino un punto di equilibrio iperbolico x_0 , il sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

ha la stessa struttura qualitativa del sistema lineare

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

con $A = Df(x_0)$. In questo paragrafo assumeremo che il punto di equilibrio x_0 sia stato traslato nell'origine.

DEFINIZIONE 1. Due sistemi autonomi come (1) e (2) sono detti topologicamente equivalenti in un intorno dell'origine o ~~che~~ avere la stessa struttura qualitativa vicino l'origine se esiste un omeomorfismo H che manda un aperto U contenente l'origine su un aperto V contenente l'origine e manda traiettorie di (1) dentro U su traiettorie di (2) dentro V conservando l'orientazione. Se l'omeomorfismo H conserva la parametrizzazione rispetto al tempo, allora (1) e (2) sono detti ~~è~~ coniugati topologicamente in un intorno dell'origine.

Prima del teorema vediamo un esempio di sistemi lineari topologicamente coniugati.

ESEMPIO 1 - Si considerino i sistemi lineari:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{e} \quad \dot{y} = By, \quad \text{dove} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Sia $H(x) = Rx$ dove la matrice

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Allora $B = RAR^{-1}$ e sia $y = H(x) = Rx$ ovvero $x = R^{-1}y$
 data da

$$\dot{y} = RAR^{-1}y = By.$$

Allora, se $x(t) = e^{At}x_0$ è la soluzione del primo sistema che parte da x_0 , allora $y(t) = H(x(t)) = Rx(t) = R e^{At}x_0 = e^{Bt}Rx_0$ è la soluzione del secondo sistema che parte da Rx_0 ;

vale a dire che H manda traiettorie del primo sistema su traiettorie del secondo sistema e conserva la parametrizzazione visto che

$$H e^{At} = e^{Bt} H.$$

L'applicazione $H(x) = Rx$ è semplicemente una rotazione di 45° ed è chiaramente un omeomorfismo. I ritratti di fase dei due sistemi sono mostrati in FIGURA 1.

TEOREMA DI HARTMAN-GROBMAN. — Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $0 \in E$ e sia $f \in C^1(E)$ e sia ϕ_t il flusso del sistema non lineare (1).

Supponiamo che $f(0) = 0$ e che la matrice $A = Df(0)$ non abbia autovalori con parte reale nulla. Allora esiste un omeomorfismo H di un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in U$ in un aperto $V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in V$ tale che $\forall x_0 \in U$ esiste un intervallo aperto $I_0 \subset \mathbb{R}$, $0 \in I_0$ t.c. $\forall x_0 \in U$ e $t \in I_0$ si abbia

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0),$$

vale a dire che H manda traiettorie di (1) che stanno ~~vicino~~ vicino all'origine su traiettorie di (2) vicino all'origine e conserva la parametrizzazione.

ESEMPIO 2. — Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{y} = -y \\ \dot{z} = z + y^2 \end{cases}$$

Il sistema è semi-accoppiato e la soluzione del problema di Cauchy associato con dati $y(0) = y_0$ e $z(0) = z_0$ è dato da

$$\begin{cases} y(t) = y_0 e^{-t} \\ z(t) = z_0 e^t + \frac{y_0^2}{3} (e^t - e^{-2t}) \end{cases}$$

Il ritratto di fase per i sistemi non lineare e lineare associato sono riportati in FIGURA 2. Il sottospazio stabile

$E^s = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = 0\}$ viene mandato sulla varietà stabile

$W^s(0) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = -\frac{1}{3}y^2\}$ attraverso l'omeomorfismo H^{-1} ;

FIGURA 2

e il sottospazio instabile $E^I = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ viene mandato sulle varietà instabili $W^I(0) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ attraverso H^{-1} .
 Le traiettorie, come la $z = \frac{1}{y}$, del sistema lineare ~~vengono~~ mandate da H^{-1} su traiettorie, come la $z = \frac{1}{y} - \frac{1}{3}y^2$ e H conserva la parametrizzazione.

2.9 - STABILITÀ E FUNZIONI DI LIAPUNOV

In questo paragrafo discuteremo la stabilità dei punti di equilibrio del sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x). \quad (1)$$

La stabilità di ogni punto di equilibrio iperbolico x_0 del sistema (1) è determinata dai segni delle parti reali degli autovalori λ_j della matrice $Df(x_0)$. Un punto di equilibrio iperbolico x_0 è asintoticamente stabile se e solo se $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ per $j = 1, \dots, n$, ovvero se e solo se x_0 è un pozzo. E un punto di equilibrio iperbolico x_0 è instabile se e solo se è o una sorgente o una sella.

La stabilità dei punti di equilibrio non iperbolico è tipicamente più difficile da stabilire. Un metodo, dovuto a LIAPUNOV, che sarà molto utile per decidere la stabilità dei punti di equilibrio non iperbolico è presentato in questo paragrafo.

DEFINIZIONE 1. - Sia ϕ_t il flusso del sistema (1) definito $\forall t \in \mathbb{R}$.

Un punto di equilibrio x_0 di (1) è STABILE se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in N_\delta(x_0)$ e $t \geq 0$ si ha

$$\phi_t(x) \in N_\varepsilon(x_0)$$

Il punto di equilibrio x_0 è INSTABILE se non è stabile.

E x_0 è ASINTOTICAMENTE STABILE se $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in N_\delta(x_0)$

si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = x_0.$$

È una conseguenza immediata della definizione che se un punto di equilibrio x_0 di (1) è ASINTOTICAMENTE STABILE, allora x_0 è STABILE.

Dai ritratti di fase del paragrafo 1.5 si può vedere che un nodo ~~o fuoco~~ o fuoco stabile di un sistema lineare in \mathbb{R}^2 è un punto di equilibrio ~~stabile~~ asintoticamente stabile; un nodo o fuoco instabile o una sella di un sistema lineare in \mathbb{R}^2 è un punto di equilibrio instabile; e un centro di un sistema lineare in \mathbb{R}^2 è un punto di equilibrio stabile che è non asintoticamente stabile.

Segue ~~dal~~ Teorema delle Varietà Stabili ed il Teorema di Hartman-Grobman che ogni pozzo di (1) è asintoticamente stabile e ogni sorgente o sella di (1) è instabile.

Dunque, ogni punto di equilibrio iperbolico di (1) è o asintoticamente stabile oppure instabile.

Il corollario riportato nel paragrafo 2.7 ci dà persino ulteriori informazioni riguardo il comportamento locale delle soluzioni vicino un pozzo:

TEOREMA 1. Se x_0 è un pozzo per il sistema non lineare (1) e $\operatorname{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$ per ogni autovalore λ_j della matrice $Df(x_0)$, allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in N_\delta(x_0)$, il flusso $\phi_t(x)$ di (1) verifica

$$|\phi_t(x) - x_0| \leq \varepsilon e^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Visto che i punti di equilibrio iperbolici sono asintoticamente stabili oppure instabili, l'unico caso in cui un punto di equilibrio x_0 di (1) può essere stabile ma non asintoticamente stabile se quando $Df(x_0)$ ha un autovalore nullo o una coppia di autovalori complessi-coniugati, immaginari puri $\lambda = \pm i b$. Segue che, come ~~è~~ riportato nel prossimo teorema, che tutti gli altri autovalori λ_j di $Df(x_0)$ deve soddisfare $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ se x_0 è stabile.

TEOREMA 2. Se x_0 è un punto di equilibrio stabile di (1), nessun autovalore di $Df(x_0)$ ha parte reale positiva.

Vedremo che ~~gli~~ punti di equilibrio stabile che non sono asintoticamente stabile ~~può~~ possono presentarsi nel caso di punti di equilibrio non iperbolico. Ma la questione di stabilire se un punto di equilibrio non iperbolico è stabile, asintoticamente stabile o instabile è molto delicata.

Il metodo che segue, dovuto a Liapunov, è molto utile per rispondere a tale domanda.

DEFINIZIONE 2. Se $f \in C^1(E)$, $V \in C^1(E)$ e ϕ_t è il flusso dell'equazione differenziale (1), allora per $x \in E$ la derivata della funzione $V(x)$ lungo la soluzione $\phi_t(x)$ è definita come

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(\phi_t(x)) \right|_{t=0} = DV(x) f(x).$$

L'ultima uguaglianza segue dalle regole della catena.

Se $\dot{V}(x)$ è negativa in E , allora $V(x)$ decresce lungo la soluzione $\phi_t(x_0)$ che parte da $x_0 \in E$ per $t=0$.

Inoltre, in \mathbb{R}^2 , se $\dot{V}(x) < 0$ con uguaglianza valida solo per $x=0$, allora per $C > 0$ ~~per~~ sufficientemente piccolo, la famiglia $V(x) = C$ costituisce una famiglia di curve chiuse che ~~circonda~~ circonda l'origine e le traiettorie di (1) attraversano tali curve dall'esterno verso l'interno al crescere di t ; vale a dire che (1) è asintoticamente stabile. Una funzione $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ che verifica le ipotesi del teorema che segue viene detta **FUNZIONE DI LIAPUNOV**.

TEOREMA DI LIAPUNOV - Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto contenente x_0 .

Supponiamo che $f \in C^1(E)$ e che $f(x_0) = 0$. Supponiamo inoltre che esista una funzione $V \in C^1(E)$ che verifica le condizioni

i) $V(x_0) = 0$ e ii) $V(x) > 0 \quad \forall x \neq x_0$.

Allora

- a) se $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in E$, x_0 è stabile;
 b) se $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in E \setminus \{x_0\}$, x_0 è asintoticamente stabile;
 c) se $\dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in E \setminus \{x_0\}$, x_0 è instabile.

OSSERVAZIONE - Se $\dot{V}(x) = 0 \quad \forall x \in E$, allora le traiettorie di (1) appartengono ad una superficie di \mathbb{R}^n (o curva di \mathbb{R}^2) definite ~~da~~ da $V(x) = c$.

ESEMPIO 1. Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^3 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \end{cases}$$

L'origine è un punto di equilibrio non iperbolico e

$$V(x) = x_1^4 + x_2^4$$

è una funzione di Liepunov per tale sistema. Infatti

$$\dot{V}(x) = 4x_1^3 \dot{x}_1 + 4x_2^3 \dot{x}_2 = 0.$$

Quindi le curve soluzione appartengono alle curve chiuse

$$x_1^4 + x_2^4 = c^2$$

che circondano l'origine. L'origine è dunque un punto di equilibrio stabile di tale sistema che non è asintoticamente stabile. Si osservi che $Df(0) = 0$ per tale esempio, ovvero che $Df(0)$ ha due autovalori nulli.

ESEMPIO 2. Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + x_2x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 \end{cases}$$

L'origine è un punto di equilibrio per tale sistema e

$$Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Però $Df(0)$ ha autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$, vale a dire che $x=0$ è un punto di equilibrio non iperbolico. Usiamo il metodo di Liepunov: ma come facciamo a definire una funzione di Liepunov? Vale la pena fare una di solito con una funzione delle forme

$$V(x) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + c_3 x_3^2$$

con $c_1, c_2, c_3 > 0$ (è tentativo è opportuno ~~per~~ almeno pseudo c'è qualche termine lineare).

Calcolando $\dot{V}(x) = DV(x)f(x)$ si ha

$$\dot{V}(x) = (c_1 - c_2 + c_3)x_1x_2x_3 + (-2c_1 + c_2)x_1x_2.$$

Quindi se $c_2 = 2c_1$ e $c_3 = c_1 > 0$ si ha $V(x) > 0 \forall x \neq 0$ e $\dot{V}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}^3$, per cui è verificato il teorema di Liepunov, caso a): dunque $x=0$ è stabile.

Inoltre, scegliendo $c_1 = c_3 = 1$ e $c_2 = 2$ si vede che le traiettorie di tale sistema appartengono ^{agli} ellissoidi

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 = C^2.$$

Abbiamo prima osservato che tutti i pozzi sono asintoticamente stabili. Però, come ha mostrato l'esempio precedente, non tutti i punti di equilibrio asintoticamente stabili sono dei pozzi. Naturalmente, un punto di equilibrio IPERBOLICO è asintoticamente stabile se e solo se è un pozzo.

ESEMPIO 3. Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - x_3^3, \end{cases}$$

che ~~è~~ ^{differsa da} quello dell'esempio 2 per i termini di terzo ordine.

Le funzioni di Lyapunov dell'esempio 2,

$$V(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2,$$

verifica $V(x) > 0$ e

$$\dot{V}(x) = -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Quindi, dal teorema 3, l'origine è asintoticamente stabile, ma non si tratta di un pozzo visto che $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, $\lambda_3 = -2i$ che non hanno parte reale negativa.

ESEMPIO 4. Si consideri l'equazione differenziale del secondo ordine

$$\ddot{x} + q(x) = 0,$$

dove q è una funzione continua t.c. $xq(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Tale equazione differenziale può essere scritta sotto forma di sistema come

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -q(x_1), \end{cases}$$

dove $x_1 = x$. L'energia totale del sistema,

$$V(x) = \frac{1}{2} x_2^2 + \int_0^{x_1} q(s) ds$$

(che è la somma dell'energia cinetica $\frac{1}{2} \dot{x}_1^2$ e dell'energia potenziale) svolge il ruolo di funzione di Liapunov di tale sistema:

$$\dot{V}(x) = q(x_1) x_2 + x_2 (-q(x_1)) = 0.$$

~~Le~~ Le curve soluzioni sono date da $V(x) = c$, ovvero l'energia è costante sulle curve soluzioni (o traiettorie) del sistema. L'origine è un punto di equilibrio stabile.

2.10 - SELLE, NODI, FUOCHI E CENTRI

Nel paragrafo 1.5, abbiamo detto che un sistema lineare

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

ha una sella, un nodo, un fuoco o un centro nell'origine se il suo ritratto di fase è linearmente equivalente ad uno dei ritratti di fase riportati nelle Figure da 1 a 4 di tale ~~sempre~~ paragrafo rispettivamente. Vale a dire ~~se~~ se esisteva una trasformazione lineare non singolare che riduce la matrice A ad una forma canonica B relativa ai casi da 1 a 4 di tale paragrafo rispettivamente.

Per esempio, il sistema lineare (1) dell'esempio del paragrafo 2.8 ha una sella nell'origine.

Nel paragrafo 2.6, per un sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

si è detto che in un punto di equilibrio iperbolico x_0 vi era una sella, un pozzo o una sorgente se la parte lineare di f in x_0 aveva autovalori ~~con~~ ^{rispettivamente} ~~una parte reale~~ ^{uno} con parte reale positiva e l'altro con parte reale negativa, entrambi con parte reale negativa o entrambi con parte reale positiva.

In questo paragrafo definiamo il concetto di sella topologica per il sistema non lineare (2) con $x \in \mathbb{R}^2$ e mostriamo che, se x_0 è un punto di equilibrio iperbolico di (2), allora è un punto di sella topologica se e solo se è una sella per (2), ovvero: un punto di equilibrio iperbolico x_0 è una sella topologica per (2) se e solo se l'origine è una sella per (1) con $A = Df(x_0)$. Discuteremo poi il caso non iperbolico nel paragrafo successivo.

Raffineremo anche la classificazione di pozzi dei sistemi non lineari (2) dividendoli in NODI STABILI e FUOCHI e mostheremo che, sotto ipotesi leggermente più forti sulle funzione f , ossia più forti che $f \in C^1(E)$, un punto ~~critico~~ iperbolico x_0 è un NODO STABILE o un FUOCO ^{STABILE} per il sistema non lineare (2) se e solo se è rispettivamente un nodo stabile o un fuoco ^{stabile} per il sistema lineare (1)

con $A = Df(x_0)$. Analogamente, una sorgente di (2) è o un nodo instabile o un fuoco instabile per (2).

Infine, definiremo il concetto di centro e di fuoco centrale per il sistema non lineare (2) e mostreremo che, ~~sebbene~~ ^{anche se} con l'aggiunta di termini non lineari, un centro del sistema lineare (1) può diventare o un centro, o un fuoco centrale o un fuoco stabile o un fuoco instabile per (2).

Prima di definire questi vari tipi di punti di equilibrio per i sistemi 2×2 non lineari (2), è conveniente introdurre le coordinate polari (r, ϑ) e riscrivere il sistema (2) in coordinate polari. In questo paragrafo $x = (x, y)^T$, $f_1(x) = P(x, y)$ e $f_2(x) = Q(x, y)$. Il sistema dinamico non lineare (2) può allora essere scritto come

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

Se poniamo $r^2 = x^2 + y^2$ e $\vartheta = \arctg(y/x)$, allora

si ha
$$r \dot{r} = x \dot{x} + y \dot{y}$$

e
$$r^2 \dot{\vartheta} = x \dot{y} - y \dot{x}.$$

Segue che per $r > 0$, il sistema non lineare (3) può essere riscritto in coordinate polari come

$$\begin{cases} \dot{r} = P(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cos \vartheta + Q(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \sin \vartheta \\ r \dot{\vartheta} = Q(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cos \vartheta - P(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \sin \vartheta \end{cases} \quad (4)$$

ovvero come

$$\frac{d r}{d \vartheta} = F(r, \vartheta) = \frac{r [P(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cos \vartheta + Q(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \sin \vartheta]}{Q(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cos \vartheta - P(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \sin \vartheta}$$

Riscrivendo il sistema dinamico (3) in coordinate polari spesso si scopre la natura del punto di equilibrio, come avviene in alcuni prossimi tre esempi.

ESEMPIO 1. Scrivere il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \kappa y \\ \dot{y} = x + \kappa^2 y \end{cases}$$

in coordinate polari. Per $r > 0$ si ha

$$\dot{r} = \frac{x \dot{x} + y \dot{y}}{r} = \frac{-x y - \kappa^2 y + \kappa y + \kappa^2 y}{r} = 0$$

$$e \quad \dot{\vartheta} = \frac{x \dot{y} - y \dot{x}}{r^2} = \frac{x^2 + \kappa^3 y^2 + \kappa y}{r^2} = 1 + \kappa > 0 \quad \text{per } \kappa > -1.$$

Però lungo ogni traiettoria del sistema nel semipiano $\kappa > -1$, $r(t)$ è costante e $\vartheta(t)$ cresce senza limite né superiore per $t \rightarrow \infty$. Ovvero, il ritratto di fase in un intorno dell'origine è equivalente al ritratto di fase della Figura 4 del paragrafo 1.5 e l'origine è detto un CENTRO per tale sistema non lineare.

ESEMPIO 2. Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^3 - x y^2 \\ \dot{y} = x - y^3 - x^2 y \end{cases}$$

In coordinate polari, per $r > 0$, si ha

$$\dot{r} = -r^3$$

$$\text{e } \dot{\theta} = 1.$$

Perciò $r(t) = r_0 (1 + 2r_0^2 t)^{-1/2}$ per $t > -\frac{1}{2r_0^2}$ e

$\theta(t) = \theta_0 + t$. Si vede che $r(t) \rightarrow 0$ e $\theta(t) \rightarrow \infty$

quando $t \rightarrow \infty$ e il ritratto di fase per tale sistema

in un intorno dell'origine è qualitativamente equivalente

alla prima figura della FIGURA 3 del paragrafo 1.5.

L'origine è detto un fuoco stabile per tale sistema non

lineare.

ESEMPIO 3. Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x^3 + x y^2 \\ \dot{y} = x + y^3 + x^2 y \end{cases}$$

In tal caso si ha, per $r > 0$,

$$\dot{r} = r^3 \text{ e } \dot{\theta} = 1.$$

Perciò $r(t) = r_0 (1 - 2r_0^2 t)^{-1/2}$ per $t < \frac{1}{2r_0^2}$ e

$\theta(t) = \theta_0 + t$. Si vede che $r(t) \rightarrow 0$ e $|\theta(t)| \rightarrow \infty$

per $t \rightarrow -\infty$.

Il ritratto di fase in un intorno dell'origine è qualitativamente equivalente alla seconda figura della FIGURA 3 del paragrafo 1.5 con le frecce sulle traiettorie rovesciate, ~~per cui~~ e l'origine è detto un fuoco instabile per tale sistema non lineare.

Diamo ora le definizioni esatte per un centro, un fuoco centrale, un fuoco stabile e instabile, un nodo stabile e instabile e una sella topologica del sistema non lineare (3).

Assumiamo $x_0 \in \mathbb{R}^2$ punto di equilibrio isolato per il sistema non lineare (3) e operiamo la trasformazione per portarlo nell'origine. Indichiamo con $\pi(t, \pi_0, \nu_0)$ e $\nu(t, \pi_0, \nu_0)$ le soluzioni del sistema non lineare (4) con $\pi(0) = \pi_0$ e $\nu(0) = \nu_0$.

DEFINIZIONE 1. L'origine è detto un CENTRO per il sistema non lineare (2) se $\exists \delta > 0$ t.c. ogni curva soluzione di (2) in un intorno bucoato $N_\delta(0) \setminus \{0\}$ è una curva chiusa che contiene 0 al suo interno.

DEFINIZIONE 2. L'origine è detto un FUOCO CENTRALE per (2) se esiste una successione di curve soluzione chiuse $\{\Gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con Γ_{n+1} interna a Γ_n t.c. $\Gamma_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ e t.c. ogni traiettoria tra Γ_n e Γ_{n+1} ruota a spirale su Γ_n o Γ_{n+1} per $t \rightarrow \mp \infty$.

DEFINIZIONE 3. L'origine è detto un FUOCO STABILE per (2) se esiste $\delta > 0$ t.c. per $0 < \pi_0 < \delta$ e $\nu_0 \in \mathbb{R}$, $\pi(t; \pi_0, \nu_0) \rightarrow 0$ e $|\nu(t; \pi_0, \nu_0)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow -\infty$. Ogni traiettoria di (2) che verifica $\pi(t) \rightarrow 0$ e $|\nu(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \pm \infty$

è detta ~~una spirale~~ che ruota a spirale attorno all'origine per $t \rightarrow \pm \infty$.

DEFINIZIONE 4. L'origine è detto un NODO STABILE per (2) se esiste un $\delta > 0$ t.c. per $0 < r_0 < \delta$ e $N_0 \in \mathbb{R}$, $r(t; r_0, N_0) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t; r_0, N_0)$ esiste. In tal caso ogni traiettoria in un intorno buco dell'origine tende verso l'origine lungo una retta tangente ben definita per $t \rightarrow \infty$. L'origine è detto un nodo instabile se $r(t; r_0, N_0) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow -\infty} \theta(t; r_0, N_0)$ esiste $\forall r_0 \in (0, \delta)$ e $N_0 \in \mathbb{R}$.

L'origine viene detto un NODO PROPRIO per (2) se è un nodo e se ogni raggio uscente dall'origine è tangente a qualche traiettoria di (2).

DEFINIZIONE 5. L'origine è una SELLA TOPOLOGICA per (2) se esistono due traiettorie Γ_1 e Γ_2 che tendono verso l'origine per $t \rightarrow \infty$ e due traiettorie Γ_3 e Γ_4 che tendono verso l'origine per $t \rightarrow -\infty$ e se $\exists \delta > 0$ t.c. tutte le traiettorie che ~~passano~~ originano nell'intorno buco dell'origine $N_\delta(0) \setminus \{0\}$ escono da $N_\delta(0)$ per $t \rightarrow \pm \infty$. Le traiettorie speciali $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ sono dette separatrici.

Per una sella topologica, la varietà stabile nell'origine è data da $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{0\}$ mentre la varietà instabile da $I = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \{0\}$. Se la traiettoria Γ_i tende verso l'origine lungo un raggio di angolo θ_i , rispetto

el semiasse positivo delle x , $\vartheta_i \in (-\pi, \pi]$ per $i = 1, \dots, 4$, allora $\vartheta_2 = \vartheta_1 \pm \pi$ e $\vartheta_4 = \vartheta_3 \pm \pi$.

Ciò segue considerando le possibili direzioni in cui una traiettoria di (2), scritta nella forma polare (4), può tendere verso l'origine.

TEOREMA 1 (BENDIXSON). Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, $0 \in E$ ed $f \in C^1(E)$. Se l'origine è un punto critico isolato di (2), allora o ogni intorno dell'origine contiene una curva soluzione chiusa con zero al suo interno oppure esiste una traiettoria che ~~proprio~~ tende verso l'origine quando $t \rightarrow \pm \infty$.

TEOREMA 2. Supponiamo che $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ in (3) siano funzioni analitiche di x ed y in qualche aperto $E \subset \mathbb{R}^2$ contenente l'origine e supponiamo che le espansioni di Taylor di P e Q centrate in $(0, 0)$ partano con termini di grado m $P_m(x, y)$ e $Q_m(x, y)$, $m \geq 1$. Allora ogni traiettoria di (3) che tende verso l'origine per $t \rightarrow \infty$ o gira intorno l'origine a spirale per $t \rightarrow \infty$ oppure tende verso l'origine lungo una direzione definita $\vartheta = \vartheta_0$ per $t \rightarrow \infty$. Se $x Q_m(x, y) - y P_m(x, y)$ non è identicamente nullo, allora tutte le direzioni lungo cui può tendere verso l'origine verificano l'equazione

$$\cos(\vartheta_0) Q_m(\cos(\vartheta_0), \sin(\vartheta_0)) - \sin(\vartheta_0) P_m(\cos(\vartheta_0), \sin(\vartheta_0)) = 0.$$

Inoltre, se ogni traiettoria di (3) gira a spirale intorno all'origine per $t \rightarrow \infty$, allora TUTTE le traiettorie di (3) in un intorno bucato dell'origine girano a spirale verso l'origine per $t \rightarrow \infty$.

Segue da tale teorema che se P e Q hanno sviluppi che partono da termini del 1° ordine, ovvero se

$$\begin{cases} P_1(x, y) = ax + by \\ Q_1(x, y) = cx + dy \end{cases}$$

con a, b, c, d non tutti nulli, allora le uniche direzioni possibili lungo cui le traiettorie del sistema possono tendere verso l'origine sono date dalle direzioni θ t. c.

$$b \sin^2 \theta + (a - d) \sin \theta \cos \theta - c \cos^2 \theta = 0 \quad (6)$$

Per $\cos \theta \neq 0$, ovvero nel caso in cui $b \neq 0$, tale equazione è equivalente a

$$b \operatorname{tg}^2 \theta + (a - d) \operatorname{tg} \theta - c = 0 \quad (6')$$

Tale equazione ha al più due soluzioni

$\theta \in (-\pi/2, \pi/2]$ e se $\theta = \theta_1$ è una soluzione, allora

anche $\theta = \theta_1 \pm \pi$ è anche soluzione. Trovare le soluzioni

di (6') è equivalente a trovare le direzioni determinate

dagli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Il prossimo teorema segue immediatamente dal Teorema della varietà stabile e dal Teorema di Hartman-Grobman. Esso stabilisce che, se l'origine è un punto di equilibrio iperbolico del sistema non lineare (2), allora è una sella topologica se e solo se è una sella per (2). Inoltre, le direzioni \mathcal{N}_j lungo cui le separatrici tendono all'origine sono soluzioni di (6).

TEOREMA 3. Supponiamo che $E \subset \mathbb{R}^2$ sia un aperto contenente l'origine e che $f \in C^1(E)$. Se l'origine è un punto di equilibrio iperbolico del sistema non lineare (2), allora l'origine è una sella topologica per (2) se e solo se l'origine è una sella per il sistema lineare (1) con $A = Df(0)$.

ESEMPIO 4. In base al teorema precedente, l'origine è una sella topologica o sella per il sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 3x + 4y - 2xy \end{cases}$$

visto che il determinante della matrice del sistema lineare associato è dato da $-2 < 0$. Inoltre, le direzioni in cui le separatrici vanno verso l'origine per $t \rightarrow \infty$ sono date dalle soluzioni di (6'):

$$2 \operatorname{tg}^2 \mathcal{N} - 3 \operatorname{tg} \mathcal{N} - 3 = 0,$$

vale a dire

$$\mathcal{N} = \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \mp \sqrt{33}}{4} \right)$$

In ogni punto del semiasse positivo delle x vicino l'origine il campo vettoriale definito dal sistema punta verso l'alto visto che $\dot{y} > 0$ in tale zona. Ciò determina la direzione del flusso definito dal sistema. Il ritratto di fase locale per il sistema non lineare e per il sistema dinamico lineare associato hanno lo stesso comportamento qualitativo vicino l'origine.

L'esempio successivo, dovuto a Poincaré, mostra che un nodo per un sistema lineare può cambiare in un fuoco con l'aggiunta dei termini non lineari. Si osservi che il campo vettoriale definito ha una f di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ ma che $f \notin C^2(\mathbb{R}^2)$. Tale esempio mostra che l'ipotesi $f \in C^1(E)$ non è abbastanza forte da implicare che il ritratto di fase di un sistema non lineare (2) è diffeomorfo al ritratto di fase del suo linearizzato.

ESEMPIO 5. - Si consideri il sistema dinamico non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - \frac{y}{\log(\sqrt{x^2+y^2})} \\ \dot{y} = -y + \frac{x}{\log(\sqrt{x^2+y^2})} \end{cases}$$

per $x^2+y^2 \neq 0$ e definiamo $f(0)=0$. In coordinate polari si ha

$$\begin{cases} \dot{r} = -r \\ \dot{\theta} = \frac{1}{\log r} \end{cases} \quad \text{per cui} \quad \begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t} \\ \theta(t) = \theta_0 - \log\left(1 - \frac{t}{\log r_0}\right) \end{cases}$$

Si noti che, per $\tau_0 < 1$, $\tau(t) \rightarrow 0$ e $|N(t)| \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$. Perciò, in base alla definizione 4, l'origine è un fuoco stabile per tale sistema non lineare. D'altra parte esso è un nodo proprio stabile per il sistema lineare associato.

Il prossimo teorema mostra che, sotto ipotesi più forti sulle f , vale a dire $f \in C^2(E)$ si ha che un nodo e un fuoco per il lineare rimangono tali con l'aggiunta di termini di ordine superiore.

TEOREMA 4. - Sia $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 \in E$, $f \in C^2(E)$. Supponiamo che l'origine sia un punto critico iperbolico per (2). Allora l'origine è un nodo STABILE (o instabile) per il sistema non lineare (2) se e solo se è ~~stabile~~ ~~un nodo stabile (o instabile)~~ un nodo stabile (o instabile) per il sistema lineare (1) con $A = Df(0)$. E l'origine è un fuoco stabile (o instabile) per il sistema non lineare (2) se e solo se esso è un fuoco stabile (o instabile) per il sistema lineare (1) con $A = Df(0)$.

OSSERVAZIONE. Sotto le ipotesi del Teorema 4 segue che l'origine è un nodo proprio per il sistema non lineare (2) se e solo se è un nodo proprio per il sistema lineare (1) con $A = Df(0)$. E sotto l'ipotesi più debole $f \in C^1(E)$ segue ancora che se l'origine è un fuoco per il lineare (1) con $A = Df(0)$, allora è un fuoco per il non lineare (2).

è un fuoco centrale per tale sistema non lineare in base alla definizione 2.

TEOREMA 5. Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un aperto, $0 \in E$, $f \in C^1(E)$.

Supponiamo che l'origine è un centro per il sistema lineare (1) con $A = Df(0)$. Allora l'origine è o un centro, o un fuoco centrale, o un fuoco per il sistema non lineare.

Un fuoco centrale non può presentarsi nel caso di sistemi analitici. Abbiamo perciò il seguente

COROLLARIO. Sia $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 \in E$, f è analitica su E .

Supponiamo che l'origine è un centro per il sistema lineare (1) con $A = Df(0)$. Allora l'origine è o un centro oppure un fuoco per il sistema non lineare (2).

Come abbiamo osservato nel paragrafo precedente, il metodo di Liepunov è uno strumento che può essere usato per distinguere un centro da un fuoco per un sistema non lineare.

Un altro approccio è quello di scrivere il sistema in coordinate polari (si pensi agli esempi 1, 2, 3). Un altro approccio ancora è di guardare le simmetrie delle equazioni differenziali. Le simmetrie più facili da vedere sono quelle rispetto agli assi x ed y .

DEFINIZIONE 6. Il sistema (3) si dice SIMMETRICO rispetto all'asse x se è invariante sotto la trasformazione

$$(t, y) \longrightarrow (-t, -y);$$

si dice simmetrico rispetto all'asse y se è invariante rispetto alle trasformazioni

$$(t, u) \longrightarrow (-t, -u).$$

Si osserva che il sistema dell'esempio 1 è simmetrico rispetto all'asse u ma non rispetto all'asse delle y .

TEOREMA 6. Sia $E \subset \mathbb{R}^2$, $0 \in E$, $f \in C^1(E)$. Se il sistema non lineare (2) è simmetrico rispetto all'asse u o all'asse y e se l'origine è un centro per il sistema lineare (1) con $A = Df(0)$, allora l'origine è un centro per il sistema non lineare ~~(1)~~ (2).

L'idea della dimostrazione è che, in base al Teorema 5, ogni traiettoria di (3) in $N_\delta(0)$ che attraversa l'asse delle u positive deve anche attraversare l'asse delle u negative. Se il sistema (3) è simmetrico rispetto all'asse u , allora le traiettorie di (3) in $N_\delta(0)$ saranno simmetriche rispetto all'asse u e quindi tutte le traiettorie di (3) in $N_\delta(0)$ saranno chiuse: perciò l'origine è un centro per (3).

2.11 - PUNTI CRITICI NON IPERBOLICI IN \mathbb{R}^2

In questo paragrafo presentiamo alcuni risultati sui punti critici non iperbolici per sistemi analitici 2×2 .

Assumiamo che l'origine è un punto critico isolato per il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

dove P e Q sono analitiche in un intorno dell'origine. Assumiamo che la matrice $A = Df(0)$ del sistema lineare associato in un intorno dell'origine abbia uno o due autovalori nulli sebbene $A \neq 0$.

Per prima cosa, si osserva che se P e Q iniziano con termini di grado m P_m e Q_m , allora dal teorema 2 del paragrafo 2.10 segue che, se le funzioni

$$g(\vartheta) = \cos \vartheta Q_m(\cos \vartheta, \sin \vartheta) - \sin \vartheta P_m(\cos \vartheta, \sin \vartheta)$$

non è identicamente zero, allora vi sono al più $2(m+1)$ direzioni $\vartheta = \vartheta_0$ lungo cui una traiettoria di (1) può tendere verso l'origine.

Tali direzioni sono date dalle soluzioni dell'equazione $g(\vartheta) = 0$.

Supponiamo che $g(\vartheta)$ non sia identicamente nulla: allora, le curve soluzione del sistema dinamico (1) ^{che} tendono verso l'origine lungo tali tangenti, dividono un intorno dell'origine in un numero finito di regioni aperte dette settori. Tali settori saranno

classificati in tre tipi come vedremo nelle prossime definizioni. Le traiettorie che stanno al bordo di un settore iperbolico prendono il nome di separatrici.

DEFINIZIONE. Un settore che è topologicamente equivalente al settore mostrato in FIGURA (1a) è detto settore iperbolico. Un settore che è topologicamente equivalente al settore mostrato in FIGURA (1b) prende il nome di SETTORE PARABOLICO. Un settore che è topologicamente equivalente al settore mostrato in FIGURA (1c) prende il nome di SETTORE ELLITTICO.

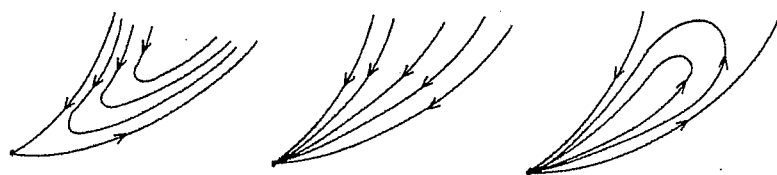


FIGURA 1. (a) settore iperbolico; (b) settore parabolico; (c) settore ellittico

Nella definizione qui sopra l'omeomorfismo che stabilisce l'equivalenza topologica di un settore con uno dei settori della FIGURA 1 non conserva necessariamente la direzione del flusso. Vale a dire che ogni settore della FIGURA 1 ~~con~~ con le frecce nella direzione opposta è un settore dello stesso tipo. Per esempio, una sella ha un intorno beccato costituito da quattro settori iperbolici e quattro separatrici; Un nodo proprio ha un intorno beccato costituito da un settore parabolico. In base al teorema 2 che vedremo più avanti, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x^3 + 4xy \end{cases}$$

ha un settore ellittico nell'origine. Il ritratto di fase per tale sistema è riportato in FIGURA 2. Ogni traiettoria che tende verso l'origine diviene asintotica all'asse x nel tendere a zero.

Un intorno bucoato dell'origine consiste di un settore ellittico, un settore iperbolico e due separatrici. Tale tipo di punto critico è detto un punto critico con un dominio ellittico.

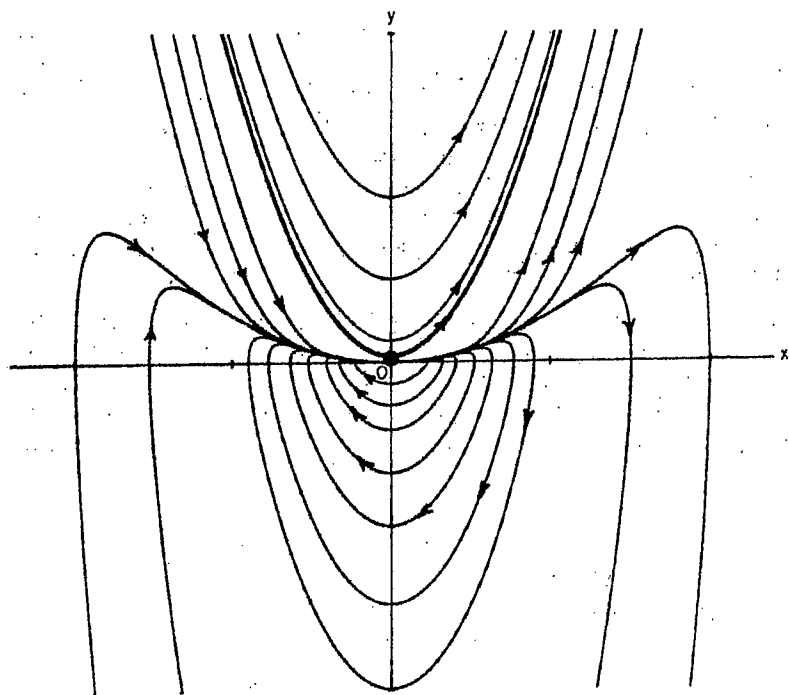


FIGURA 2. Un punto critico con un dominio ellittico nell'origine

Un altro tipo di punto critico non iperbolico per un sistema 2×2 è ~~il nodo~~ la sella-nodo. Una sella-nodo consiste di due settori iperbolici e un settore parabolico (così come tre separatrici e il punto critico stesso).

In base al prossimo teorema 1, il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

ha una sella-nodo nell'origine. Anche senza ~~il~~ far uso del teorema 1, tale sistema si può discutere facilmente visto che si può risolvere esplicitamente

$$\begin{cases} x(t) = (1/x_0 - t)^{-1} \\ y(t) = y_0 e^t \end{cases}$$

Il ritratto di fase per tale sistema è riportato in FIGURA 3.

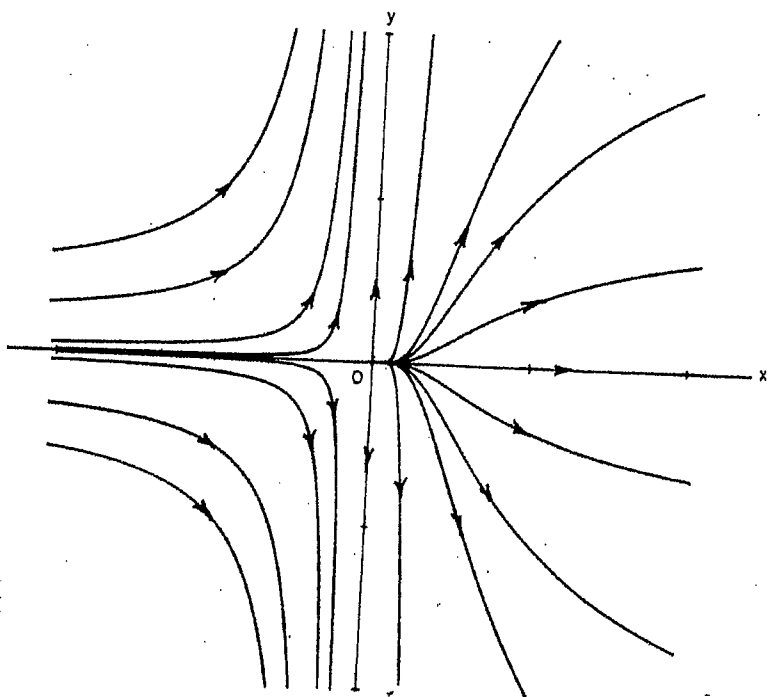


FIGURA 3. Una sella-nodo nell'origine

Un altro tipo di comportamento che si può avere in un punto critico non iperbolico è illustrato nel seguente esempio

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x^2 \end{cases}$$

Il ritratto di fase per tale sistema è riportato in FIGURA 4.

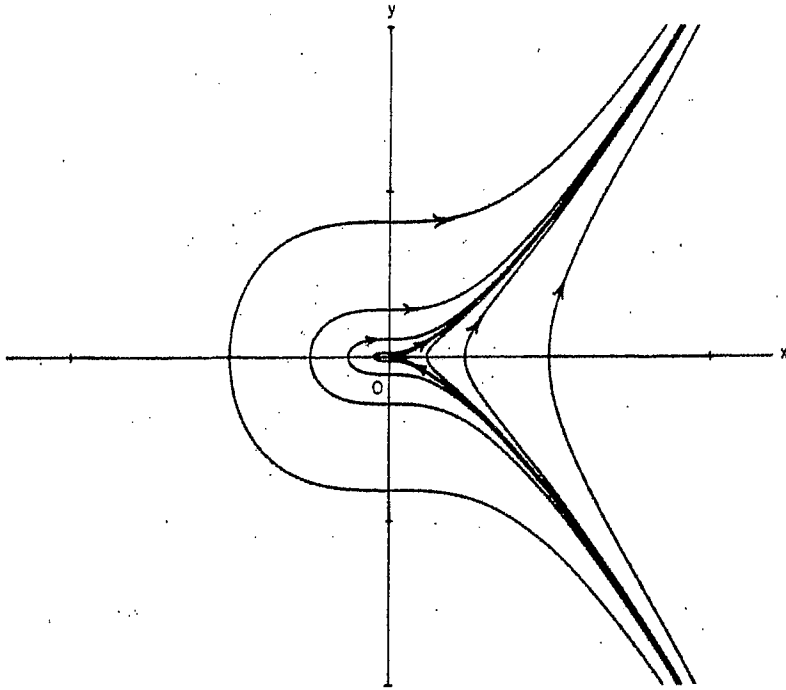


FIGURA 4 - UNA CUSPIDE NELL'ORIGINE

Vediamo che ~~in~~ un intorno loricato dell'origine è costituito da due settori iperbolici e due separatrici. Tale tipo di punto critico è detto cuspidale.

Come vedremo, oltre ai classici tipi di punti critici per sistemi 2×2 analitici discussi nel paragrafo 2.10, vale a dire nodi, fuochi o spirali, selle topologiche e centri, gli unici tipi di punti critici che possono presentarsi per (1) quando ~~la matrice A è~~ ^{la matrice A} ~~è~~ ^è ~~non nulla~~ ^{non nulla} ~~del sistema~~ ^{del sistema} linearizzato ~~è~~ ^è ~~non nulla~~ ^{non nulla}, sono selle-nodi, punti critici con domini ellittici e cuspidi.

Per primo consideriamo il caso in cui la matrice A ha un autovalore nullo, vale a dire quando $\det A = 0$ ma $\text{tr} A \neq 0$. In tal caso il sistema (1) può essere scritto nella forma "normale"

$$\begin{cases} \dot{x} = p_2(x, y) \\ \dot{y} = y + q_2(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

dove p_2 e q_2 sono analitiche in un intorno dell'origine ed hanno espansioni che partono con termini di secondo grado in x ed y .

TEOREMA 1. Supponiamo che l'origine sia un punto critico isolato per il sistema analitico (2). Sia $y = \phi(x)$ la soluzione dell'equazione $y + q_2(x, y) = 0$ in un intorno dell'origine e supponiamo che l'espansione della funzione $\psi(x) = p_2(x, \phi(x))$ in un intorno di $x=0$ abbia la forma $\psi(x) = a_m x^m + \dots$, dove $m \geq 2$ e $a_m \neq 0$. Allora ~~la~~

- 1) per m dispari e $a_m > 0$ l'origine è un nodo;
- 2) per m ~~dispari~~ e $a_m < 0$ l'origine è una sella topologica;
- 3) per m pari, l'origine è una sella-nodo.

Consideriamo ora il caso ~~in~~ quando A ha due autovalori nulli, vale a dire $\det A = 0$, $\text{tr} A = 0$ ma $A \neq 0$. In tal caso il sistema (2) si può riscrivere nelle forme normali

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = a_k x^k (1 + h(x)) + b_n x^n y (1 + g(x)) + y^2 R(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

dove h , g ed R sono analitiche in un intorno dell'origine,

$h(0) = g(0) = 0$, $k \geq 2$, $a_k \neq 0$ ed $n \geq 1$.

TEOREMA 2. Sia $k = 2m + 1$ con $m \geq 1$ in (3) e sia

$\lambda = b_n^2 + 4(m+1)a_k$. Allora se $a_k > 0$, l'origine è una sella topologica. Se $a_k < 0$, l'origine è

- 1) un fuoco o un centro se $b_n = 0$ ed anche se $b_n \neq 0$ e $n > m$ oppure se $n = m$ e $\lambda < 0$;
- 2) un nodo se $b_n \neq 0$, n è un numero pari e $n < m$ ed anche se $b_n \neq 0$, n è un numero pari, $n = m$ e $\lambda \geq 0$;
- 3) un punto critico con un dominio ellittico se $b_n \neq 0$, n è dispari ed ~~non~~ $n < m$ ed anche se $b_n \neq 0$, n dispari, $n = m$ e $\lambda \geq 0$.

TEOREMA 3. Sia $k = 2m$ con $m \geq 1$ in (3). Allora l'origine è

- 1) una cuspidale se $b_n = 0$ ed anche se $b_n \neq 0$ ed $n \geq m$;
- 2) una sella-nodo se $b_n \neq 0$ ed $n < m$.

Vediamo che, se $Df(x_0)$ ha un autovalore nullo, allora il punto critico x_0 è o un nodo, una sella topologica oppure una sella-nodo. E se $Df(x)$ ha due autovalori nulli, allora il punto critico x_0 è o un ~~nodo~~ fuoco, un centro, un nodo, una sella topologica, una sella-nodo, una cuspidale o un punto critico con dominio ellittico.

Infine, che succede nel caso in cui $A = 0$? In tal caso, il comportamento vicino al punto ~~critico~~ l'origine può essere complesso. Se P e Q iniziano con termini di grado m , allora

le separatrici possono dividere un intorno dell'origine in $2(m+1)$ settori di vari tipi. Il numero di settori ellittici meno il numero di settori iperbolici è sempre un numero pari. ~~Per esempio, il sistema quadratico omogeneo~~ Per esempio, il sistema quadratico omogeneo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy \\ \dot{y} = \frac{1}{2}y^2 + xy \end{cases}$$

ha il ritratto di fase riportato in FIGURA 5.

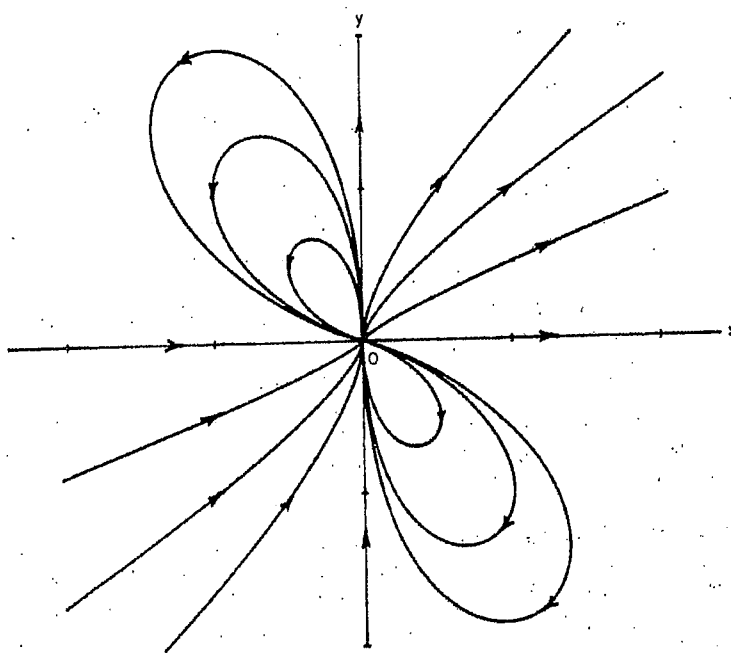


FIGURA 5. Un punto critico non iperbolico con due settori ellittici e due settori parabolici

Vi sono due settori ellittici e due settori parabolici nell'origine.

OSSERVAZIONE. Un punto critico x_0 di (1) per il quale $Df(x_0)$ ha un autovalore nullo è detto spesso un punto critico multiplo. La regione di cui si è ^{già} chiarita nel paragrafo 4.2 quando mostriamo che un punto critico multiplo di (1) può essere ~~staccato~~ splittato in un ^{certo} numero di punti critici iperbolici attraverso un'opportuna perturbazione di (1).

2.12 - SISTEMI HAMILTONIANI E SISTEMI GRADIENTE

In questo paragrafo studieremo due tipi interessanti di sistemi dinamici che si incontrano nei problemi fisici ~~particolari~~ ^{mediante i} quali la teoria si arricchisce di molti esempi.

DEFINIZIONE 1. Sia $E \subset \mathbb{R}^{2n}$ ^{un aperto} ed $H \in C^2(E)$, dove $H = H(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Un sistema della forma

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases},$$

dove $\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T$, $\frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)$,

è detto un sistema hamiltoniano con n gradi di libertà su E .

Per esempio, la funzione hamiltoniana

$$H(x, y) = (x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) / 2$$

è la funzione energia per il pendolo sferico

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_1 = -x_1 \\ \dot{y}_2 = -x_2 \end{cases}$$

che verrà studiato nel paragrafo 3.6. Tale sistema è equivalente alla coppia di oscillatori armonici disaccoppiati

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + x_1 = 0 \\ \ddot{x}_2 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Tutti i sistemi hamiltoniani sono conservativi nel senso la funzione hamiltoniana o energia totale ~~del sistema~~ $H(x, y)$ resta costante lungo le traiettorie del sistema.

TEOREMA 1 (Conservazione dell'energia). L'energia totale $H(x, y)$ del sistema hamiltoniano (1) resta costante lungo le traiettorie di (1).

DIMOSTRAZIONE

La derivata totale della funzione hamiltoniana lungo le traiettorie $(x(t), y(t))$ è

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

Perciò $H(x, y)$ è costante lungo ogni curva soluzione di (1) e le traiettorie di (1) appartengono alle superfici $H(x, y) = \text{costante}$.

Nel seguito stabiliremo alcuni risultati molto specifici sulla natura dei punti critici dei sistemi hamiltoniani con un grado di libertà. Si osserva che i punti di equilibrio del sistema (1) corrispondono ai punti critici della funzione hamiltoniana $H(x, y)$. Senza perdita di generalità possiamo assumere che il punto critico in questione venga traslato nell'origine.

LEMMA. Se l'origine è un fuoco del sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = H_y(x, y) \\ \dot{y} = -H_x(x, y), \end{cases} \quad (1')$$

allora l'origine non è un non è un massimo o un minimo locale stretto per la funzione hamiltoniana $H(x, y)$.

DEFINIZIONE 2. Un punto critico per il sistema

$$\dot{x} = f(x)$$

in cui $Df(x_0)$ non ha autovalori nulli è detto un punto critico non degenere del sistema, altrimenti è detto punto critico degenere.

Si osserva che ogni punto critico non degenere di un sistema dinamico 2×2 o è un punto critico iperbolico oppure un centro del sistema linearizzato.

TEOREMA 2. Ogni punto critico non degenere di un sistema hamiltoniano analitico (1') è o una sella (topologica) o un centro; inoltre, (x_0, y_0) è una sella (topologica) per (1') se e solo se è una sella per la funzione hamiltoniana $H(x, y)$ e un massimo o minimo locale ~~la~~ stretto della funzione $H(x, y)$ è un centro per (1').

Un tipo particolare di sistema hamiltoniano ~~con~~ con un grado di libertà è il sistema newtoniano con un grado di libertà,

$$\ddot{x} = f(x),$$

dove $f \in C^1(a, b)$. Queste equazioni differenziali possono essere scritte come un sistema in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases} \quad (3)$$

L'energia totale per tale sistema è data da

$$H(x, y) = T(y) + U(x),$$

dove

$T(y) = \frac{1}{2} y^2$ è l'energia cinetica e

$U(x) = - \int_{x_0}^x f(y) dy$ è l'energia potenziale.

Con tale definizione di $H(x, y)$ si vede che il sistema newtoniano (3) può essere scritto come un sistema hamiltoniano.

TEOREMA 3. I punti critici di un sistema Newtoniano (3) stanno tutti sull'asse x . Il punto $(x_0, 0)$ è un punto critico del sistema Newtoniano (3) se e solo se è un punto critico della funzione $U(x)$, ovvero uno zero della funzione f .

Se $(x_0, 0)$ è un massimo locale stretto della funzione analitica $U(x)$, allora è una sella per (3); se $(x_0, 0)$ è un minimo locale stretto per la funzione analitica $U(x)$, allora è un centro per (3).

Se $(x_0, 0)$ è un punto di flesso orizzontale della $U(x)$, allora è una cuspidine per il sistema (3). Infine, ~~sen~~ il ritratto di fase di (3) è simmetrico rispetto all'asse delle x .

ESEMPIO 4. Costruiamo il ritratto di fase per il pendolo senza attrito

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Tale equazione differenziale può essere scritta come un sistema

Newtoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

dove l'energia potenziale è data da

$$U(\alpha) = \int_0^\alpha \sin t \, dt = 1 - \cos \alpha$$

Il grafico della funzione $U(\alpha)$ e il ritratto di fase per il sistema, che segue dal teorema 3, sono riportati in FIGURA 1.

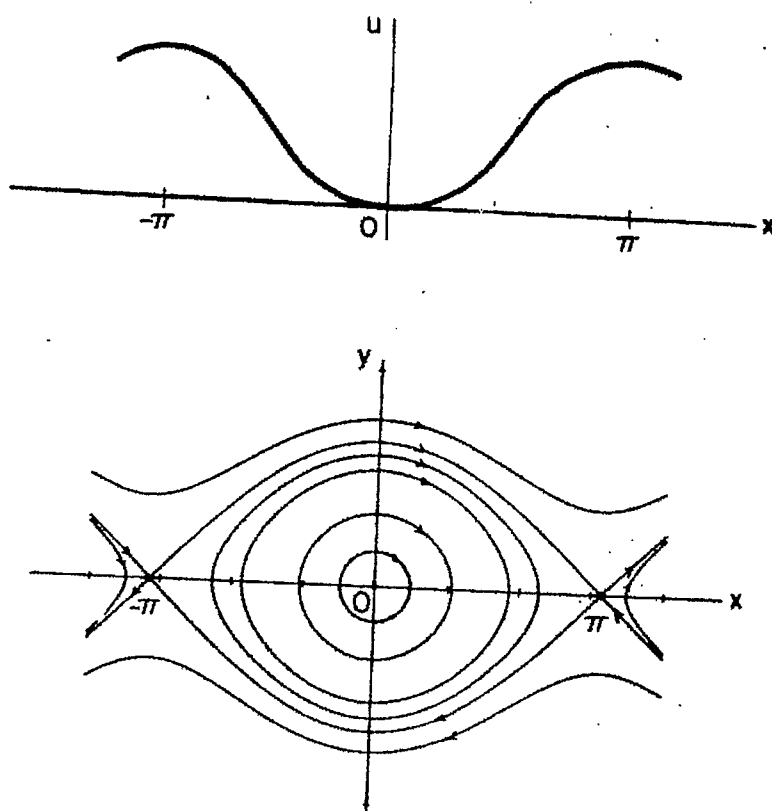


FIGURA 1. Il ritratto di fase per il pendolo senza attrito.

Si osservi che l'origine nel ritratto di fase qui sopra corrisponde alla posizione di equilibrio stabile del pendolo senza attrito verticale verso giù. I punti critici in $(\pm\pi, 0)$ corrispondono alla posizione di equilibrio instabile in cui il pendolo sta verticale verso l'alto.

Traiettorie vicino l'origine sono cicli e sono approssimate dalle curve soluzione del pendolo lineare

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Le traiettorie chiuse che circondano l'origine descrivono i moti periodici usualmente associati con un pendolo dove il pendolo va avanti e indietro. Le separatrici che uniscono le selle $(\pm\pi, 0)$ corrispondono ai moti con energia totale $H=2$ nel qual caso il pendolo tende verso la posizione instabile verticale per $t \rightarrow \pm\infty$. E le traiettorie esterne alle orbite separatrici, dove $H > 2$, corrispondono ai moti dove il pendolo gira oltre la posizione verticale.

DEFINIZIONE 3. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $V \in C^2(E)$. Un sistema del tipo

$$\dot{x} = - \text{grad } V(x) \quad (4)$$

dove $\text{grad } V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right)^T$, è detto un sistema gradiente

su E .

Si osservi che i punti di equilibrio del sistema gradiente (4) corrispondono ai punti critici della funzione $V(x)$ dove $\text{grad } V(x) = 0$. I punti dove $\text{grad } V(x) \neq 0$ sono detti punti regolari della funzione $V(x)$. Nei punti regolari di $V(x)$, il vettore $\text{grad } V(x)$ è perpendicolare alle curve di livello $V(x) = \text{costante}$. È poi facile vedere che in un punto critico x_0 di $V(x)$, che sia un punto di minimo stretto per $V(x)$, la funzione $V(x) - V(x_0)$ è una funzione di Lyapunov per (4) in un opportuno intorno di x_0 .

TEOREMA 4. Nei punti regolari della funzione $V(x)$, le traiettorie del sistema gradiente (4) attraversano la superficie di livello $V(x) = \text{costante}$ ortogonalmente. E minimi locali stretti della $V(x)$ ^(punti di equilibrio) sono asintoticamente stabili per (4).

Visto che la linearizzazione di (4) in ogni punto critico x_0 di (4) ha una matrice

$$A = \left(\frac{\partial^2 V(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

che è simmetrica, gli autovalori di A sono tutti reali e A è diagonalizzabile rispetto ad una base ortonormale.

Nel caso di sistemi gradienti 2×2 possiamo essere molto specifici sulla natura dei punti critici

TEOREMA 5. Ogni punto critico non degenere di un sistema gradiente analitico (4) in \mathbb{R}^2 o è una sella oppure un nodo. Inoltre, se (x_0, y_0) è una sella per la funzione $V(x, y)$, allora è una sella di (4) e se (x_0, y_0) è un massimo o minimo locale stretto per la $V(x, y)$, allora è rispettivamente un nodo instabile o stabile per (4).

ESEMPIO 2. Sia $V(x, y) = x^2(x-1)^2 + y^2$.
Il sistema gradiente (4) ha allora la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x(x-1)(x-1/2) \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

Questo ammette punti critici in $(0,0)$, $(1/2, 0)$ e $(1, 0)$.

Segue dal teorema 5 che $(0,0)$ e $(1,0)$ sono nodi stabili mentre $(1/2, 0)$ è una sella. Le curve di livello $V(x,y) = \text{costante}$ e le traiettorie del sistema sono riportate nella Figura 2.

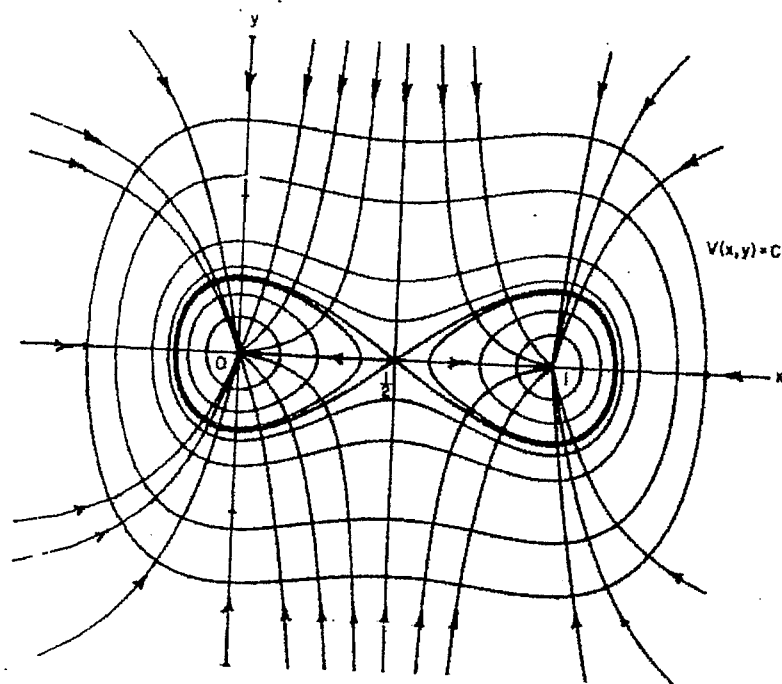


FIGURA 2. Curve di livello e traiettorie del sistema gradiente dell'esempio 2.

~~Un altro~~ Diciamo infine un anno al legame tra i sistemi gradienti e hamiltoniani almeno nel caso 2×2 .

DEFINIZIONE 4. Si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \quad (5)$$

Il sistema ortogonale a (5) è definito come

$$\begin{cases} \dot{x} = Q(x, y) \\ \dot{y} = -P(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

Ovviamente (5) e (6) hanno gli stessi punti critici. Nei punti regolari poi le traiettorie di (5) sono ortogonali alle traiettorie di (6). Inoltre, i centri di (5) corrispondono ai nodi di (6), le selle di (5) corrispondono alle selle di (6), i fuochi di (5) corrispondono ai fuochi di (6). Inoltre, se (5) è un sistema hamiltoniano con $P = H_y$ e $Q = -H_x$, allora (6) è un sistema gradiente e viceversa.

TEOREMA 6. Il sistema (5) è un sistema hamiltoniano se e solo se il sistema (6) ortogonale a (5) è un sistema gradiente.

In dimensione maggiore si ha che (1) è hamiltoniano con n gradi di libertà, allora

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{cases} \quad (7)$$

ortogonale a (1) è un sistema gradiente in \mathbb{R}^{2n} e le traiettorie del sistema gradiente (7) attraversano le superfici $H(x, y) = \text{costante}$ ortogonalmente. Nell'esempio 2 se prendiamo $H(x, y) = V(x, y)$, allora la FIGURA 2 illustra l'ortogonalità delle traiettorie dei flussi gradiente e hamiltoniano, il flusso hamiltoniano che ruota in senso orario.

SISTEMI NON LINEARI: TEORIA GLOBALE

Nel capitolo 2 abbiamo visto che ogni sistema non lineare

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

con $f \in C^1(E)$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto, ha un'unica soluzione $\phi_t(x_0)$, passando dal punto $x_0 \in E$ per $t=0$ definita $\forall t \in I(x_0)$, intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Inoltre, il flusso ϕ_t del sistema soddisfa

$$i) \phi_0(x) = x$$

$$ii) \phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x)) \quad \forall x \in E$$

e la funzione $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ definisce un'applicazione C^1 $\phi: \Omega \rightarrow E$ dove $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in I(x)\}$.

In questo capitolo definiamo un sistema dinamico come un'applicazione

$$\phi: \mathbb{R} \times E \rightarrow E \text{ di classe } C^1 \text{ che verifica i punti (i) ed (ii)}$$

precedenti. Per prime cose vedremo che possiamo riscalare il tempo per ogni sistema di classe C^1 di tipo (1) cosicchè $\forall x \in E$, l'intervallo massimale di esistenza $I(x) = (-\infty, +\infty)$. Perciò ogni sistema di classe C^1 di tipo (1), dopo un'opportuno riscalamento del tempo, definisce un sistema dinamico $\phi: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ dove $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ è ~~sempre~~ la soluzione di (1) con $\phi_0(x) = x$. Consideriamo poi insiemi limite e attrattori di sistemi dinamici. ~~Inoltre~~ ai punti di equilibrio e alle orbite periodiche, un sistema dinamico può avere cicli omoclinici o cicli separatori così come ~~anche~~ attrattori sconosciuti come gli insiemi limite. Studieremo orbite periodiche in un certo dettaglio e ~~anche~~ il teorema della varietà stabile per orbite periodiche così come

svariati esempi che illustrano la teoria generale di questo capitolo.

L'ultima parte di questo capitolo è dedicata ai sistemi planari dove la teoria è più completa. Il teorema di Poincaré-Bendixon, ^{presentato} ~~presentato~~ nel paragrafo 3.4, implica che per i sistemi piani ogni ~~non~~ insieme ω -limite è o un punto critico, un ciclo limite o l'unione di cicli separatrici. ~~Determinare il numero di cicli limite~~ Alcuni risultati sul numero di cicli limite di sistemi piani sono stabiliti nel paragrafo 3.8. Il capitolo si conclude con una tecnica, basata sul teorema di Poincaré-Bendixon, per costruire il ritratto di fase globale per un sistema dinamico piano. Il ritratto di fase globale determina il comportamento qualitativo di ogni soluzione $\phi_t(x)$ del sistema (1) $\forall t \in \mathbb{R}$ così come $\forall x \in \mathbb{R}^2$.

3.1 - SISTEMI DINAMICI E TEOREMI DI ESISTENZA GLOBALE

Un sistema dinamico di una descrizione funzionale delle soluzioni di un problema fisico o del modello matematico che descrive il sistema fisico. Per esempio, il moto di un pendolo ideale discusso nel paragrafo 2.12 è un sistema dinamico nel senso che il moto del pendolo si descrive attraverso le sue posizione e velocità funzioni del tempo e delle condizioni iniziali.

Dal punto di vista matematico, un sistema dinamico è una funzione $\phi(t, x)$, definita $\forall t \in \mathbb{R}$ e $x \in E \subset \mathbb{R}^n$, che descrive come i punti $x \in E$ si muovono rispetto al tempo. Richiediamo che la famiglia di applicazioni $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ abbia le proprietà di un flusso definite nel paragrafo 2.5.

DEFINIZIONE 1. Un sistema dinamico su E è un'applicazione C^1

$$\phi: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

dove E è un aperto di \mathbb{R}^n e se $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, allora ϕ_t verifica

i) $\phi_0(x) = x \quad \forall x \in E$ e

ii) $\phi_t \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \forall x \in E.$

OSSERVAZIONE 1. Dalla definizione 1 segue che $\forall t \in \mathbb{R}$, ϕ_t è un'applicazione C^1 di E in E con inverse C^1 , ϕ_{-t} ; vale a dire che ϕ_t con $t \in \mathbb{R}$ è una famiglia ad 1-parametro di diffeomorfismi su E .

È facile vedere che se A è una matrice $n \times n$, allora la funzione

$$\phi(t, x) = e^{At} x$$

definisce un sistema dinamico su \mathbb{R}^n ed anche, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi(t, x_0)$ è la soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

In generale, se $\phi(t, x)$ è un sistema dinamico su $E \subset \mathbb{R}^n$, allora la funzione

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \phi(t, x) \right|_{t=0}$$

definisce un campo vettoriale di classe C^1 su E e, per ogni $x_0 \in E$, $\phi(t, x_0)$ è la soluzione del problema di Cauchy

Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Inoltre, $\forall x_0 \in E$, l'intervallo massimale di esistenza di $\phi(t, x_0)$ è dato da $I(x_0) = \mathbb{R}$. Perciò, ogni sistema dinamico generato da un campo vettoriale $C^1 f$ è il sistema dinamico descritto dall'insieme soluzioni dell'equazione differenziale definita da tale campo vettoriale. Al contrario, data un'equazione differenziale (1) con $f \in C^1(E)$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto di \mathbb{R}^n , la soluzione $\phi(t, x_0)$ del problema di Cauchy (1) con $x_0 \in E$ sarà un sistema dinamico su E se e solo se $\forall x_0 \in E$, $\phi(t, x_0)$ è definito $\forall t \in \mathbb{R}$. Vale a dire se e solo se $\forall x_0 \in E$ l'intervallo massimale di esistenza $I(x_0)$ di $\phi(t, x_0)$ è \mathbb{R} . In tal caso diremo che $\phi(t, x_0)$ è il sistema dinamico su E definito da (1).

Il prossimo teorema mostra che ogni campo vettoriale $C^1 f$ definito su tutto \mathbb{R}^n genera un campo vettoriale su \mathbb{R}^n . Mentre le soluzioni $\phi(t, x_0)$ del sistema (1) di partenza potrebbe non essere definite $\forall t \in \mathbb{R}$, il tempo t può essere riscelto lungo le traiettorie di (1) per ottenere un sistema topologicamente equivalente per il quale le soluzioni sono definite $\forall t \in \mathbb{R}$.

Prima di enunciare tale teorema, generalizziamo la nozione di sistemi topologicamente equivalenti definiti nel paragrafo 2.8 per un intorno dell'origine.

DEFINIZIONE 2. Supponiamo che $f \in C^1(E_1)$ e $g \in C^1(E_2)$, dove $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^n$ sono aperti. Allora i due sistemi dinamici:

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

$$\dot{x} = g(x) \quad (2)$$

si dicono topologicamente equivalenti se esiste un omeomorfismo $H: E_1 \rightarrow E_2$ che conserva l'orientazione e manda traiettorie di (1) su traiettorie di (2). In tal caso i campi vettoriali f e g sono anche detti topologicamente equivalenti. Se $E = E_1 = E_2$, allora i sistemi (1) e (2) si dicono topologicamente equivalenti su E e i campi vettoriali f e g si dicono topologicamente equivalenti su E .

OSSERVAZIONE 2. Si osserva che, mentre l'omeomorfismo H in tale definizione conserva l'orientazione in \mathbb{R}^n e ci dà una deformazione continua del ritratto di fase di (1) nello spazio delle fasi E_1 , ~~nel~~ ritratto di fase di (2) nello spazio delle fasi E_2 , esso non deve necessariamente conservare la parametrizzazione rispetto al tempo lungo le traiettorie. Infatti, se ϕ_t è il flusso su E_1 definito da (1) e assumiamo che (2) definisca un sistema dinamico ψ_t su E_2 , allora i sistemi (1) e (2) sono topologicamente equivalenti se e solo se esiste un omeomorfismo $H: E_1 \rightarrow E_2$ e $\forall x \in E_1$ esiste una funzione continua strettamente crescente $t(x, \tau)$ definita ~~per~~ $\forall \tau \in \mathbb{R}$ tale che

$$H \circ \phi_{t(x, \tau)}(x) = \Psi_{\tau} \circ H(x)$$

$\forall x \in E$, e $\tau \in \mathbb{R}$. E, in generale, due sistemi autonomi sono topologicamente equivalenti su E se e solo se sono entrambi equivalenti e qualche sistema autonomo di equazioni differenziali che definisce un sistema dinamico su E (vedi teoremi 2 seguenti). Come è stato notato nelle definizioni precedenti, se i due sistemi (1) e (2) sono topologicamente equivalenti, allora i campi vettoriali f e g sono detti topologicamente equivalenti; d'altra parte, se l'omeomorfismo H conserva la parametrizzazione rispetto al tempo, allora i campi vettoriali f e g si dicono topologicamente coniugati. Chiamamente, se due campi vettoriali f e g sono topologicamente coniugati, essi sono topologicamente equivalenti.

TEOREMA 1 (TEOREMA DI ESISTENZA GLOBALE). Per $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3)$$

ha un'unica soluzione $x(t)$ definita $\forall t \in \mathbb{R}$. Vale a dire che (3) definisce un sistema dinamico su \mathbb{R}^n . Inoltre (3) è topologicamente equivalente a (1) su \mathbb{R}^n .

OSSERVAZIONE 3. I sistemi (1) e (3) sono topologicamente equivalenti su \mathbb{R}^n poiché il tempo t lungo le soluzioni $x(t)$ di (1) ~~non~~ è stato semplicemente riscritto in base alle formule

$$\tau = \int_0^t [1 + |f(x(s))|] ds; \quad (4)$$

Perché l'omeomorfismo H della definizione 2 è semplicemente l'identità su \mathbb{R}^n in questo caso. La soluzione $x(t)$ di (1), rispetto al nuovo tempo τ , verifica allora

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{d\tau}{dt}} = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|},$$

vale a dire che $x(t(\tau))$ è la soluzione di (3) dove $t(\tau)$ è l'inversa della funzione strettamente crescente $\tau(t)$ definita da (4). La funzione $\tau(t)$ manda l'intervallo massimale di esistenza (α, β) della soluzione $x(t)$ di (1) biunivocamente su $(-\infty, \infty)$, l'intervallo massimale di esistenza di (3).

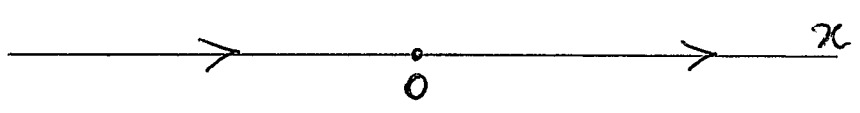
ESEMPIO 1. L'intervallo massimale di esistenza della soluzione

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$$

del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

è $(-\infty, 1/x_0)$ per $x_0 > 0$, $(1/x_0, \infty)$ per $x_0 < 0$ e $(-\infty, \infty)$ per $x_0 = 0$. Il ritratto di fase in \mathbb{R}^1 è semplicemente



Il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $x(t)$ definita da

$$2x(t) = t + x_0 - \frac{1}{x_0} + \frac{x_0}{|x_0|} \sqrt{t^2 + 2\left(x_0 - \frac{1}{x_0}\right)t + \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)^2}$$

su \mathbb{R} purché $x_0 \neq 0$ e da $x(t) \equiv 0$ per $x_0 = 0$.

Segue che per $x_0 > 0$, $x(t) \rightarrow x_0$ per $t \rightarrow \infty$ e $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow -\infty$; per $x_0 < 0$ invece $x(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$ e $x(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow -\infty$. Il ritratto di fase per il secondo sistema è esattamente lo stesso che per il primo sistema.

In tale esempio, la funzione $\tau(t)$ definita da (4) è data da

$$\tau(t) = t + \frac{x_0^2 t}{1 - x_0 t}$$

Per $x_0 = 0$, $\tau(t) = t$; per $x_0 > 0$, $\tau(t)$ manda l'intervallo massimale $(-\infty, 1/x_0)$ biunivocamente su \mathbb{R} ; e per $x_0 < 0$, $\tau(t)$ manda l'intervallo massimale $(1/x_0, +\infty)$ biunivocamente su \mathbb{R} .

Se $f \in C^1(E)$ con $E \subset \mathbb{R}^n$ sottoinsieme proprio, la normalizzazione precedente non conduce a un sistema dinamico in generale!

ESEMPIO 2. Per $x_0 > 0$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2x} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha un'unica soluzione $x(t) = \sqrt{t + x_0^2}$ definita nell'intervallo massimale $I(x_0) = (-x_0^2, +\infty)$. La funzione $f(x) = \frac{1}{2x} \in C^1(E)$, dove $E = (0, +\infty)$. Si ha $x(t) \rightarrow 0$ (appartenente ai punti di accumulazione di E) per $t \rightarrow -x_0^2$.

Il problema di Cauchy correlato

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1/2x}{1 + (1/2x)} = \frac{1}{2x + 1} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ammette l'unica soluzione

$$x(t) = -\frac{1}{2} + \sqrt{t + (x_0 + 1/2)^2}$$

definita sul suo intervallo massimale di esistenza $I(x_0) = (- (x_0 + 1/2)^2, +\infty)$. Si vede che in questo caso $I(x_0) \neq \mathbb{R}$.

Comunque un risvolgimento più opportuno del tempo lungo la traiettoria di (1) porta a un sistema dinamico equivalente a (1) perfino quando E è un sottoinsieme proprio di \mathbb{R}^n .

TEOREMA 2. Si supponga che E è un sottoinsieme proprio di \mathbb{R}^n e che $f \in C^1(E)$. Allora esiste una funzione

$F \in C^1(E)$ t. c.

$$\dot{x} = F(x) \quad (5)$$

definisce un sistema dinamico su E e tale che (5) è topologicamente equivalente a (1) su E .

Per $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto, il teorema 2 implica che non vi è perdita di generalità nell'assumere che il sistema (1) definisce

un sistema dinamico $\phi(t, x_0)$ su E . Perciò d'ora in avanti faremo tale assunzione, ovvero assumeremo che $\forall x_0 \in E$, l'intervallo massimale di esistenza sia $I(x_0) = \mathbb{R}$. Nel prossimo paragrafo perciò andremo avanti studiando gli insiemi limite delle traiettorie $x(t)$ di (1) per $t \rightarrow \mp \infty$.

Per finire il paragrafo presentiamo due ulteriori teoremi di esistenza globale che possono risultare utili.

TEOREMA 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e ~~si~~ supponiamo che f verifichi la seguente condizione di Lipschitz globale:

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Allora, per $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy (1) ha una soluzione unica $x = x(t)$ definita $\forall t \in \mathbb{R}$.

Se $f \in C^1(M)$, dove M è un compatto di \mathbb{R}^n , allora f verifica una condizione di Lipschitz globale su M e abbiamo un risultato simile al teorema precedente per $x_0 \in M$. Tale risultato è stato esteso alle varietà compatte. La definizione di campo vettoriale di classe C^1 su una varietà sarà data alla fine del paragrafo 3.10.

TEOREMA 4 (Chillingworth). Sia M una varietà compatta e sia $f \in C^1(M)$. Allora per $x_0 \in M$, il problema di Cauchy (1) ha un'unica soluzione $x(t)$ definita $\forall t \in \mathbb{R}$.

3.2 - INSIEMI LIMITE E ATTRATTORI

Si consideri il sistema autonomo

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

con $f \in C^1(E)$, dove $E \subset \mathbb{R}^n$ è aperto. Abbiamo visto che possiamo assumere in generale che il sistema (1) definisce un sistema dinamico $\phi(t, x)$ su E . Per $x \in E$, la funzione $\phi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow E$ definisce una curva soluzione, traiettoria oppure orbita di (1) attraverso il punto $x \in E$. Se si identifica la funzione $\phi(\cdot, x)$ col suo grafico, possiamo pensare alle traiettorie attraverso il punto $x_0 \in E$ come il moto lungo le curve

$$\Gamma_{x_0} = \{ x \in E \mid x = \phi(t, x_0), t \in \mathbb{R} \}$$

definito da (1). Ci riferiremo a Γ_{x_0} come la traiettoria di (1) passante per x_0 all'istante $t=0$. Se il punto x_0 non prende alcun ruolo, indichiamo semplicemente la traiettoria con Γ e disegniamo la curva Γ nel sottoinsieme E dello spazio delle fasi \mathbb{R}^n con una freccia che indica la direzione del moto lungo Γ al crescere del tempo.

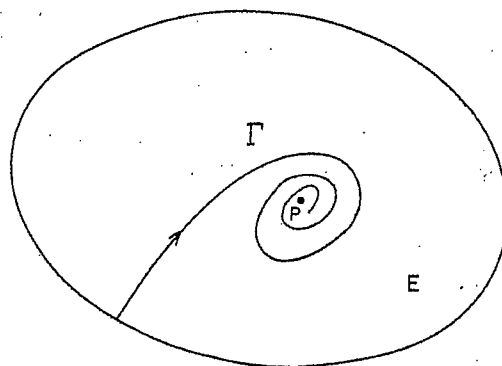


FIGURA 1. Una traiettoria Γ di (1) che tende al punto ω -limite $p \in E$ per $t \rightarrow \infty$

Attraverso la semi-traiettoria positiva attraverso il punto $x_0 \in E$, intendiamo il moto lungo la curva

$$\Gamma_{x_0}^+ = \left\{ x \in E \mid x = \phi(t, x_0), t \geq 0 \right\}$$

definita da (1). È la semi-traiettoria negativa attraverso il punto $x_0 \in E$, indicata con $\Gamma_{x_0}^-$, è definita analogamente.

Ogni traiettoria Γ è l'unione delle due, $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$.

DEFINIZIONE 1. Un punto $p \in E$ è un punto ω -limite della traiettoria $\phi(\cdot, x)$ del sistema (1) se esiste una successione $t_n \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow \infty$ t. c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = p.$$

Analogamente, se \exists una successione $t_n \rightarrow -\infty$ t. c.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(t_n, x) = q,$$

e il punto $q \in E$, allora il punto q è detto un punto α -limite della traiettoria $\phi(\cdot, x)$ di (1). L'insieme di tutti i punti ω -limite di una traiettoria Γ è detto l'insieme ω -limite di Γ e viene indicato con $\omega(\Gamma)$.

L'insieme di tutti i punti α -limite di una traiettoria Γ è detto l'insieme α -limite di Γ ed è indicato con $\alpha(\Gamma)$.

L'insieme di tutti i punti limite di Γ , $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$ è detto l'insieme limite di Γ .

TEOREMA 1. Gli insiemi α e ω limite di una traiettoria Γ di (1), $\alpha(\Gamma)$ e $\omega(\Gamma)$, sono sottoinsiemi chiusi di E e se Γ è contenuta in un compatto di \mathbb{R}^n , allora $\alpha(\Gamma)$ e $\omega(\Gamma)$ sono non vuoti, connessi e compatti di E .

TEOREMA 2. Se p è un punto ω -limite di una traiettoria Γ di (1), allora tutti gli altri punti della traiettoria $\phi(\cdot, p)$ di (1) oltreverso il punto p sono ancora punti ω -limite di Γ . Vale a dire che, se $p \in \omega(\Gamma)$, allora $\Gamma_p \subset \omega(\Gamma)$ e analogamente, se $p \in \alpha(\Gamma)$ allora $\Gamma_p \subset \alpha(\Gamma)$.

Segue ~~da~~ da tale teorema che $\forall p \in \omega(\Gamma)$, allora $\phi_t(p) \in \omega(\Gamma) \forall t \in \mathbb{R}$. Vale a dire che $\phi_t(\omega(\Gamma)) \subset \omega(\Gamma)$.

Perciò, in base alla definizione 2 del paragrafo 2.5, si ha il seguente risultato

COROLLARIO. $\alpha(\Gamma)$ e $\omega(\Gamma)$ sono invarianti rispetto al flusso ϕ_t di (1).

Gli insiemi α - e ω -limite di una traiettoria Γ di (1) sono perciò insiemi chiusi invarianti di E . Nella successiva definizione, un intorno di un insieme A è ogni aperto U contenente A . Diciamo che $x(t) \rightarrow A$ per $t \rightarrow \infty$ se la distanza $d(x(t), A) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

DEFINIZIONE 2. Un insieme invariante chiuso $A \subset E$ è detto un insieme attrattore di (1) se $\exists U$ intorno di A t.c.

$\forall x \in U, \phi_t(x) \in U \quad \forall t \geq 0$ e $\phi_t(x) \longrightarrow A$ per $t \longrightarrow \infty$.

Un attrattore di (1) è un insieme attrattore che contiene un'orbita densa.

Si noti che ogni punto di equilibrio x_0 di (1) è esso stesso un insieme α - e ω -limite visto che $\phi(t, x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. E se una traiettoria P di (1) ha un'unico punto ω -limite x_0 , allora dal corollario precedente, x_0 è un punto di equilibrio di (1).

Un ~~modo~~ modo stabile o un fuoco, definiti nel paragrafo 2.10, sono l'insieme ω -limite di ogni traiettoria in un qualche intorno del punto. E un modo stabile o un fuoco di (1) è un attrattore di (1). D'altra parte, non tutti gli insiemi ω -limite di una traiettoria di (1) è un insieme attrattore di (1): per esempio, una sella x_0 di (1) è l'insieme ω -limite di tre traiettorie in un intorno $N(x_0)$, ma nessun'altra traiettoria attraversa ~~il~~ ^{il} punto $N(x_0)$ tende a x_0 per $t \longrightarrow \infty$.

Se q è un punto regolare in $\omega(P)$, allora la traiettoria che passa per q è detta un'orbita limite di P . Perciò, attraverso il teorema 2, si ha che $\alpha(P)$ e $\omega(P)$ sono punti di equilibrio e orbite limite di (1).

Consideriamo ora alcuni esempi di insiemi limite e di attrattori.

ESEMPIO 1. - Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$$

In coordinate polari il sistema diviene

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Si vede che l'origine è un punto di equilibrio di tale sistema. Il flusso ruota a spirale attorno all'origine in direzione antioraria.

Esso ~~si~~ ~~gira~~ a spirale aprendosi per $0 < r < 1$, mentre ruota restringendosi per $r > 1$. Il flusso antiorario ~~si~~ sulla circonferenza unitaria descrive una traiettoria Γ_0 di (1) visto che $\dot{r} = 0$ su $r = 1$. La traiettoria passante per il punto $(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ sulla circonferenza unitaria per $t = 0$ è data da

$$r(t) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))^T$$

Il ritratto di fase per tale sistema è mostrato in Figura 2. La traiettoria Γ_0 è detta un ciclo limite stabile. La definizione precisa di ciclo limite sarà data nel prossimo paragrafo.

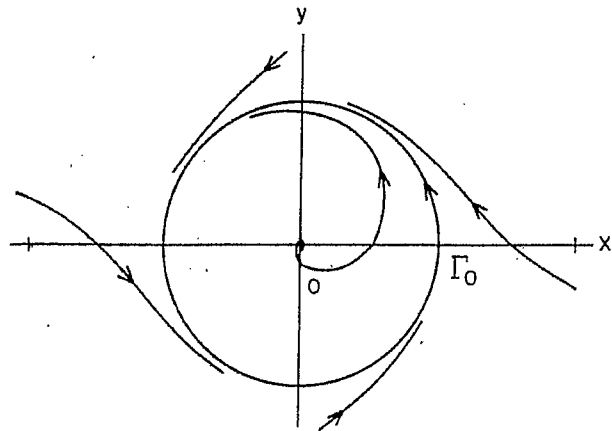


FIGURA 2. Un ciclo limite stabile Γ_0 che è un attrattore di (1).

Il ciclo limite stabile Γ_0 dell'esempio 1 è l'insieme ω -limite di ogni traiettoria del sistema eccetto il punto di equilibrio $0=(0,0)$. Γ_0 è composto di un'orbita limite e Γ_0 è al tempo stesso un insieme α - e ω -limite. L'esempio chiarisce che ^{quello che} ~~quello che~~ intendiamo ^{realmente} con traiettoria o orbita Γ del sistema (1) è la classe di equivalenza delle curve soluzione $\phi(\cdot, \kappa)$ con $\kappa \in \Gamma$. Solitamente prendiamo un rappresentante $\phi(\cdot, \kappa_0)$ con $\kappa_0 \in \Gamma$ per descrivere la traiettoria e ci riferiamo ad esse ~~esse~~ parlando di traiettoria Γ_0 che parte per κ_0 al tempo $t=0$.

ESEMPIO 2. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - z^2 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - z^2 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

ha la sfera unitaria S^2 di \mathbb{R}^3 assieme alla porzione dell'asse z fuori da S^2 come insieme attrattore. Ogni piano $z=z_0$ è un insieme invariante e per $|z_0| < 1$ l'insieme ω -limite di ogni traiettoria che non sta sull'asse z è un ciclo stabile (definito nel ~~nel~~ prossimo paragrafo) su \mathbb{R}^2 . Si veda FIGURA 3.

ESEMPIO 3. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{z} = \alpha \end{cases}$$

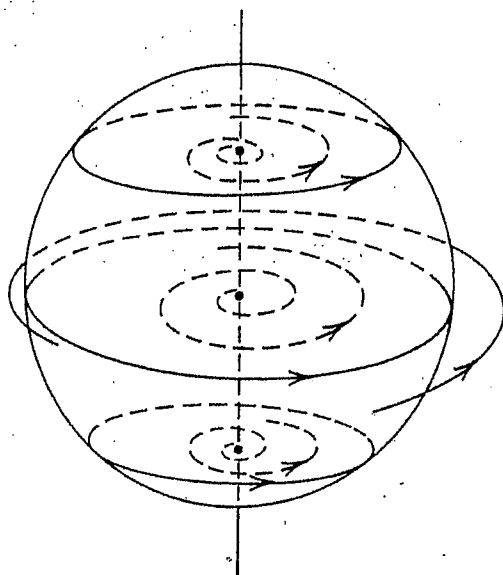


FIGURA 3. Un sistema dinamico con S^2 come parte dell'insieme attrattore.

ha l'asse z e il cilindro $x^2 + y^2 = 1$ come insiemi invarianti. Il cilindro è un insieme attrattore. Si veda figura 4 (nel caso di $\alpha > 0$).

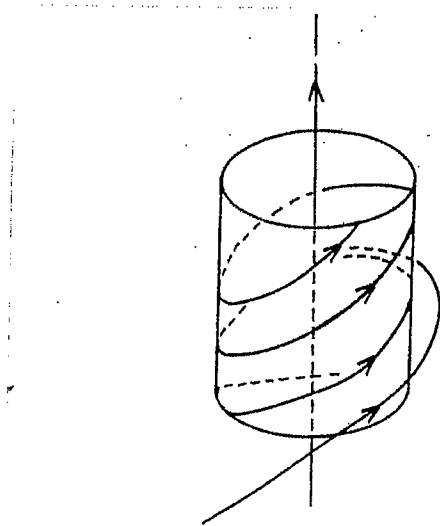


FIGURA 4. Un sistema dinamico con un cilindro come parte dell'insieme attrattore.

Se nell'esempio 3 identifichiamo i punti $(x, y, 0)$ e $(x, y, 2\pi)$ nei piani $z=0$ e $z=2\pi$, otteniamo un flusso in \mathbb{R}^3 con un ~~toro~~ T^2 come insieme invariante dato da un toro T^2 come insieme attrattore. L'asse z viene mandato su un ciclo instabile Γ (definito nel prossimo paragrafo). E se d è un multiplo irrazionale di π , allora il toro T^2 è un attrattore ed è l'insieme ω -limite di ogni traiettoria eccetto il ciclo Γ .
Si veda la FIGURA 5.

Nel paragrafo 3.4 ~~vedremo~~ ^{vedremo} il teorema di Poincaré-Bendixon che mostra che gli insiemi α - e ω -limite di ogni sistema 2-dimensionale sono oggetti regionalmente secyphes. Infatti, come vedremo nel paragrafo 3.4, essi sono o punti di equilibrio, o cicli limite o cicli separatrici (definiti nel prossimo paragrafo). D'altra parte, per sistemi in dimensione più alta, gli insiemi α - e ω -limite possono essere abbastanza complicati.

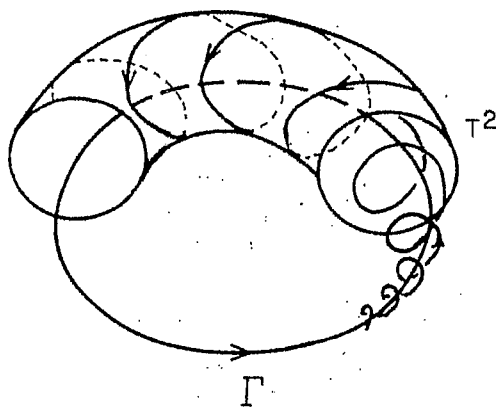


FIGURA 5. Una ~~sistema~~ ^{sistema} dinamico con un toro invariante come insieme attrattore.

ESEMPIO 4 (sistema di Lorenz). Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

per opportuni valori dei parametri σ , ρ e β ha insiemi attrattori piuttosto particolari. Per esempio per $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$, ~~per una~~ ~~singola~~ ~~traiettoria~~ nella figura 6 è riportata una singola traiettoria del sistema ~~che~~ con una "superficie ramificata" S . L'attrattore A di tale sistema è costituito da un numero infinito di superfici ramificate S che sono interfoliate e che si intersecano. Comunque le traiettorie di tale sistema in A non si intersecano ma passano da una superficie ramificata all'altra. L'insieme attrattore A avente tali proprietà è detto un attrattore strano. Si veda la Figura 6.

3.3 — ORBITE PERIODICHE, CICLI LIMITE E CICLI SEPARATORI

In questo paragrafo si ~~discutono~~ parlerà di ~~orbite~~ cicli o orbite periodiche, cicli limite e cicli separatori per un sistema dinamico $\phi(t, x)$ definito da

$$\dot{x} = f(x). \quad (1)$$

DEFINIZIONE 1. Un ciclo o orbita periodica di (1) è una curva soluzione chiusa di (1) che non è un punto di equilibrio di (1). Un'orbita periodica Γ si dice stabile se per ogni $\varepsilon > 0$

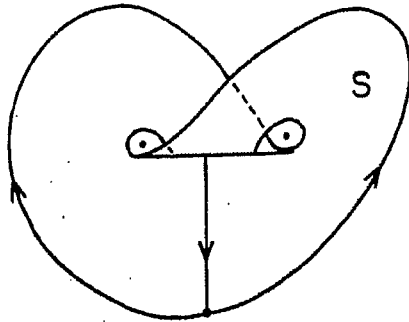
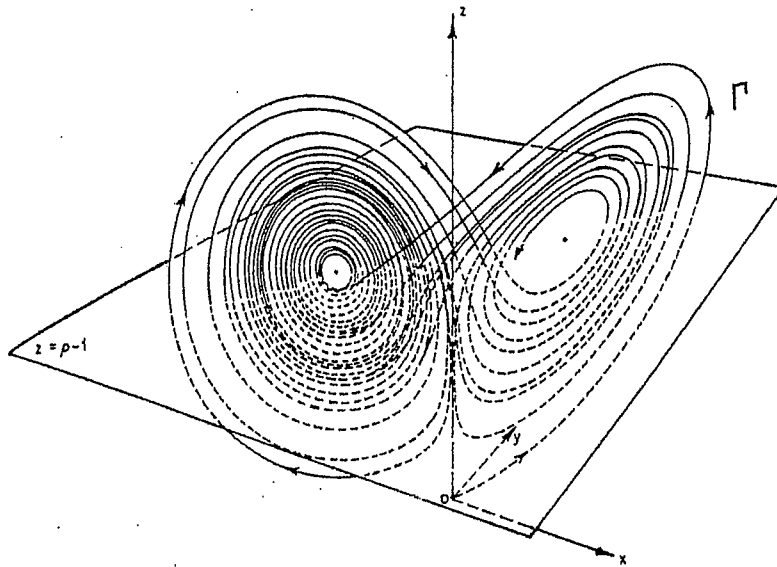


FIGURA 6. — Una traiettoria Γ del sistema di Lorenz e la corrispondente superficie ramificata.

Vi è un intorno U di Γ t. c. $\forall x \in U$, $\text{dist}(\Gamma_x^+, \Gamma) < \epsilon$,
ossia se $\forall x \in U$ e $t \geq 0$, $\text{dist}(\phi(t, x), \Gamma) < \epsilon$.

Un'orbita periodica Γ si dice instabile se non è stabile;
 Γ si dice asintoticamente stabile se per ogni punto x in
un intorno U di Γ si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\phi(t, x), \Gamma) = 0.$$

Un ciclo per il sistema (1) corrisponde ad una soluzione periodica
di (1) visto che $\phi(\cdot, x_0)$ definisce una curva soluzione chiusa di (1)

se e solo se $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha $\phi(t+T, x_0) = \phi(t, x_0)$
 per un opportuno qualche $T > 0$. Il minimo $T > 0$ per cui tale
 uguaglianza è verificata si chiama periodo dell'orbita
 periodica $\phi(\cdot, x_0)$. Si noti che un centro, definito nel
 paragrafo 2.10, è un punto di equilibrio circondato da
 una fascia continua di cicli. In generale, il periodo T varierà
 con continuità nel muoversi lungo una curva continua che
 interseca tale famiglia di cicli. D'altra parte, nel caso di un
 centro per un sistema lineare, il periodo è lo stesso per ogni
 orbita periodica della famiglia. Ogni orbita periodica della
 famiglia di cicli che circonda un centro è stabile ma non
 asintoticamente stabile. Vedremo nel paragrafo 3.5 che un'orbita
 periodica

$$\Gamma: x = \gamma(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

di (1) è asintoticamente stabile solo se

$$\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt < 0.$$

Per sistemi piani vedremo nel paragrafo 3.4 che tale condizione
 con la disuguaglianza stretta è necessaria e sufficiente per
 la stabilità asintotica di un ciclo limite semplice Γ . Un
 ciclo asintoticamente stabile è pensato come un ciclo
 ω -limite e ogni ciclo ω -limite è un attrattore di (1).

Orbite periodiche hanno varietà stabili e instabili così come accade
 per i punti di equilibrio. Sia Γ un'orbita periodica e sia N
 un intorno di Γ . Le varietà locali stabile e instabile sono

di Γ sono definite come

$$S(\Gamma) = \left\{ x \in N : d(\phi_t(x), \Gamma) \longrightarrow 0 \text{ per } t \longrightarrow \infty \right\}$$

$$e \quad I(\Gamma) = \left\{ x \in N : d(\phi_t(x), \Gamma) \longrightarrow 0 \text{ per } t \longrightarrow -\infty \right\}.$$

Le varietà globali stabile e instabile di Γ sono definite allora come

$$W^s(\Gamma) = \bigcup_{t \leq 0} \phi_t(S(\Gamma))$$

$$e \quad W^I(\Gamma) = \bigcup_{t \geq 0} \phi_t(I(\Gamma)).$$

Tali varietà sono invarianti mediante il flusso ϕ_t di (1). La stabilità di orbite periodiche così come l'esistenza e la dimensione delle varietà $S(\Gamma)$ e $I(\Gamma)$ verranno discusse in seguito.

ESEMPIO 1. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2) \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

ha un'orbita periodica isolata nel piano (x, y) dato da

$$x(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$$

Vi è un punto di equilibrio nell'origine. L'asse z , il cilindro

$x^2 + y^2 = 1$ e il piano x, y sono varietà invarianti per tale sistema. Il ritratto di fase per tale sistema è riportato in FIGURA 1 insieme ad una sezione trasversale nel piano x, z . Le curve tratteggiate in tale sezione sono le proiezioni sul piano x, z delle orbite che partono dal piano x, z . In tale esempio

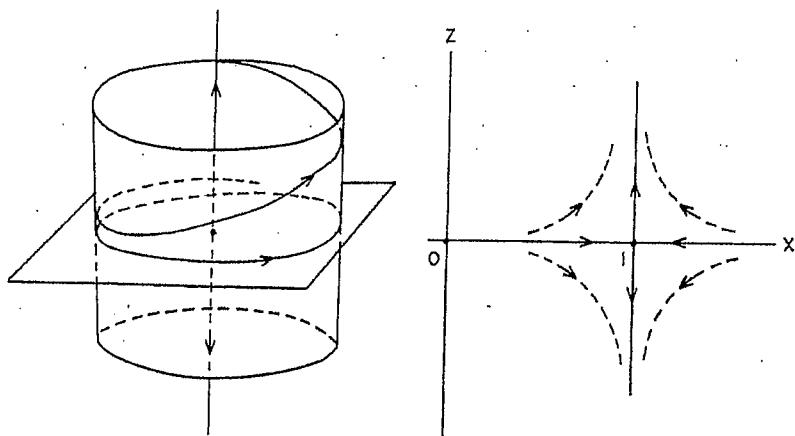


FIGURA 1. Alcune varietà invarianti per il sistema dell'esempio 1 e una sezione trasversale nel piano x, z .

La varietà stabile di P , data da $W^s(P)$ è il piano x, y escluso l'origine e la varietà instabile di P , indicata con $W^I(P)$, è il cilindro unitario. Non vi è insieme attrattore per tale sistema.

Un'orbita periodica Γ del tipo mostrato in FIGURA 1 dove $W^s(\Gamma) \neq \emptyset$ e $W^I(\Gamma) \neq \emptyset$ è detta un'orbita periodica di tipo sella. Ogni orbita periodica di tipo sella è instabile.

Consideriamo ora orbite periodiche di sistemi di tipo (1) piani, con $x \in \mathbb{R}^2$.

DEFINIZIONE 2. Un ciclo limite Γ di un sistema 2×2 è un ciclo di (1) che è l'insieme α -o ω -limite di qualche traiettoria di (1) oltre Γ . Se un ciclo Γ è l'insieme ω -limite di ogni traiettoria in un qualche intorno di Γ , allora Γ è detto un ~~un~~ ciclo ω -limite o un ciclo limite stabile. Se Γ è l'insieme α -limite di ogni traiettoria in un qualche intorno di Γ , allora Γ è detto un ciclo α -limite o un ciclo limite instabile; e se Γ è l'insieme ω -limite di una traiettoria diversa da Γ e l'insieme α -limite di una traiettoria diversa da Γ , allora Γ è detto un ciclo limite semi-stabile.

Nel teorema che segue usiamo il teorema delle curve di Jordan che dice ogni curva semplice chiusa Γ ~~del piano~~ separa il piano \mathbb{R}^2 in due insiemi disgiunti aventi Γ come loro bordo; uno di tali insiemi, detto l'interno di Γ , è limitato e semplicemente connesso; l'altro, detto l'esterno di Γ , è illimitato e non semplicemente connesso.

TEOREMA 1. Se una traiettoria all'esterno di un ciclo limite Γ di un sistema (1) 2×2 di classe C^1 ha Γ come suo insieme ω -limite, allora ogni traiettoria in un qualche intorno U esterno di Γ ha Γ come suo insieme ω -limite. Inoltre, ogni traiettoria in U gira attorno a Γ per $t \rightarrow \infty$ nel senso che interseca ogni retta perpendicolare a Γ un numero infinite di volte $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, dove $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$.

Lo stesso tipo di risultato vale in un intorno interno a Γ ed anche quando Γ è l'insieme α -limite di qualche traiettoria.

Il prossimo esempio fa vedere che i cicli limite possono accumularsi in ogni su un punto di equilibrio. Si può anche vedere che essi possono accumularsi su un ciclo o su un ciclo limite (si pensi all'esempio 6 del paragrafo 2.10).

ESEMPIO 2. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

per $x^2 + y^2 \neq 0$ con $\dot{x} = \dot{y} = 0$ in $(0,0)$, definita su sistema E^1 su \mathbb{R}^2 che in coordinate polari diventa

$$\begin{cases} \dot{r} = r^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{r}\right) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

L'origine è un punto di equilibrio e vi sono cicli limite Γ_n che si trovano sulle circonferenze di raggio $r = \frac{1}{n\pi}$.

Tali cicli limite si accumulano sull'origine, visto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\pi} = 0.$$

Ogni ciclo Γ_{2n} è stabile mentre Γ_{2n+1} è instabile.

Il prossimo teorema mostra che un sistema 2×2 analitico (1) con f analitico su $E \subset \mathbb{R}^2$ aperto, non può avere un numero infinito di cicli che si accumulano su un punto critico come avviene nell'esempio precedente.

TEOREMA di DULAC. In ogni regione limitata del piano, un sistema analitico 2×2 del tipo (1) ha al più un numero finito di cicli limite. Ogni sistema polinomiale ha al più un numero finito di cicli limite in \mathbb{R}^2 .

I prossimi esempi descrivono due tipologie importanti di orbite che possono capitare in un sistema dinamico: orbite omocline e orbite eterocline. Esse costituiscono anche esempi di cicli separatori e cicli separatori policentrici per sistemi 2×2 .

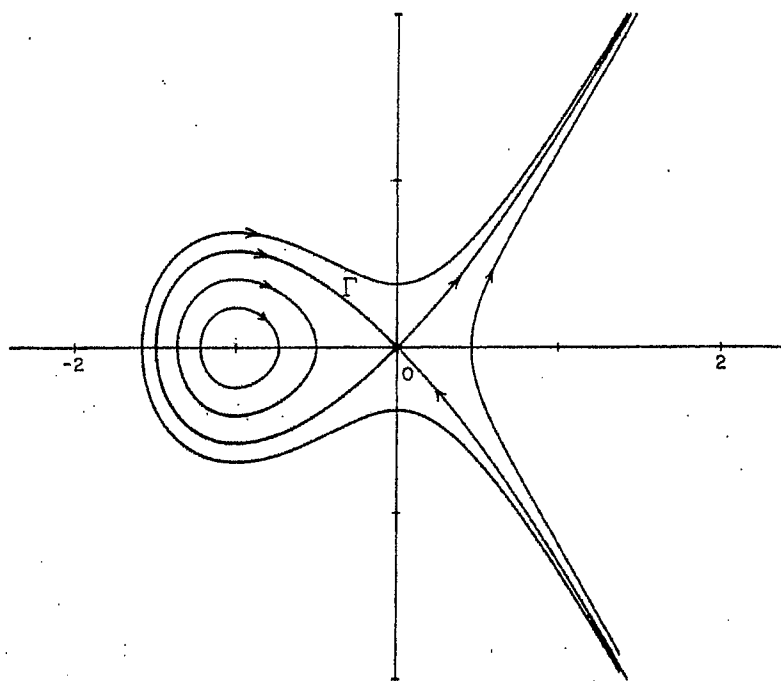


FIGURA 2. Un'orbita omocline Γ che definisce un ciclo separatore.

~~ESEMPLO~~ ESEMPIO 3. Il sistema Hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + x^2 \end{cases}$$

con Hamiltoniana $H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$ ha curve soluzioni

definite da

$$y^2 - x^2 - \frac{2}{3}x^3 = c.$$

Il ritratto di fase per tale sistema è riportato in FIGURA 2.

La curva $y^2 - x^2 + \frac{2}{3}x^3$ corrispondente a $C=0$ passa per il punto $(-\frac{3}{2}, 0)$ e ha la sella nell'origine (che corrisponde sempre a $C=0$)

esattamente così come i suoi insiemi α - e ω -limiti.

La curva soluzione $\Gamma \subset W^s(0) \cap W^u(0)$ è detta orbita omoclina e il flusso sulle curve chiuse separate determinate dall'unica dell'orbita omoclina e dal punto di equilibrio nell'origine è detta ciclo separatore.

L'esempio 1 nel paragrafo 2.12 del pendolo ideale costituisce un esempio di orbite eterocline. Le traiettorie Γ_1 nelle FIGURA 1 di tale paragrafo hanno evente una sella in $(-\pi, 0)$ come il suo insieme α -limite e la sella in $(\pi, 0)$ come suo insieme ω -limite, è detta orbita eterocline.

Anche la traiettoria Γ_2 in tale figura è un'orbita eterocline (si veda Figura 3)

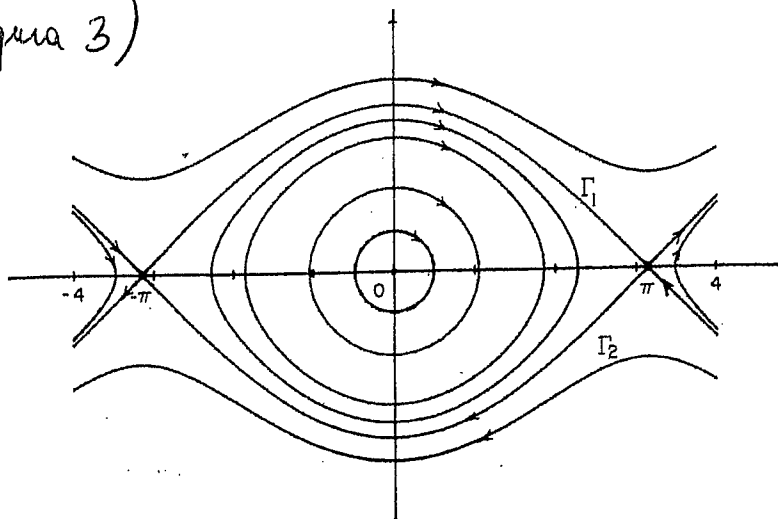


FIGURA 3. Orbite eterocline Γ_1 e Γ_2 ~~definite da~~ definite da c separano un ciclo separatore

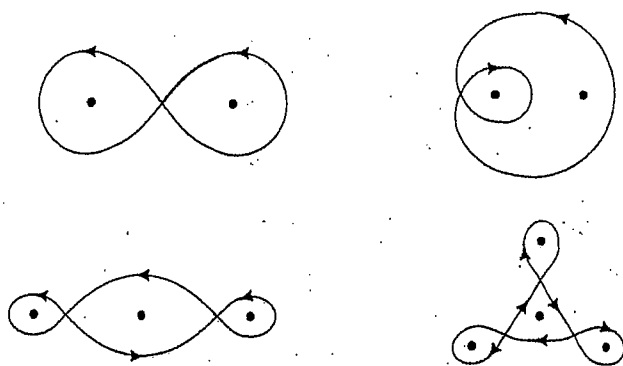


FIGURA 4. Esempi di cicli separatori policentrici

Un'unione finita di cicli separatori orientati in modo compatibile è detto un ciclo separatore policentrico. Un esempio è dato dal sistema Hamiltoniano dell'esempio 2 del paragrafo 2.12,

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = 4x(x-1)(x-1/2). \end{cases}$$

Il ritratto di fase è riportato nella figura 2 del paragrafo 2.12. Le due traiettorie Γ_1 e Γ_2 che hanno la sella in $(1/2, 0)$ così come i loro insiemi α - e ω -limiti sono orbite omocline e il flusso sulle curve non semplice chiusa $S = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{(1/2, 0)\}$ è un ciclo separatore policentrico. S è l'unione di due cicli separatori orientati positivamente.

Altri esempi di cicli separatori policentrici sono ~~mostrati~~ riportati in FIGURA 4.

3.4 MAPPA DI POINCARÉ.

Probabilmente lo strumento basilare per studiare la stabilità e le biforcazioni di orbite periodiche è la mappa di Poincaré, definita da Henri Poincaré nel 1881. L'idea della mappa di Poincaré è piuttosto semplice: se Γ è un'orbita periodica del sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

passante per il punto x_0 , e Σ è un iperpiano perpendicolare a Γ nel punto x_0 , allora $\forall x \in \Sigma$ sufficientemente vicino a x_0 , la soluzione di (1) passante per x all'istante $t=0$, che indicheremo con $\phi_t(x)$, attraverserà nuovamente Σ in un punto $P(x)$ che si trova vicino a x_0 (si veda FIGURA 1). L'applicazione $x \mapsto P(x)$ è detta mappa di Poincaré.

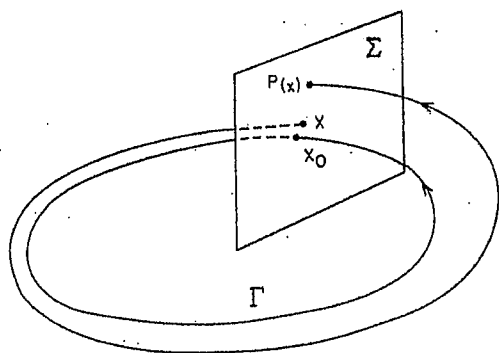


FIGURA 1. - La mappa di Poincaré.

La mappa di Poincaré può essere ^{anche} definita nel caso in cui Σ sia una superficie regolare, ~~non~~ passante per $x_0 \in \Gamma$, purché Σ non sia tangente a Γ in x_0 . In tal caso, la superficie Σ è detta intersecare la curva Γ trasversalmente in x_0 . Il teorema stabilisce l'esistenza e la continuità della mappa di

Poincaré $P(x)$ e delle sue derivate prime $DP(x)$.

TEOREMA 1. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f \in C^1(E)$. Supponiamo che $\phi_t(x_0)$ sia una soluzione periodica di (1) di periodo T e che il ciclo

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \phi_t(x_0), 0 \leq t \leq T\}$$

sia contenuto in E . Sia Σ l'iperpiano ortogonale a Γ e passante per x_0 ,

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Allora $\exists \delta > 0$, $\exists!$ $\tau(x)$ definita e differenziabile con continuità per $x \in N_\delta(x_0)$, t.c. $\tau(x_0) = T$ e

$$\phi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma \quad \forall x \in N_\delta(x_0).$$

DEFINIZIONE 1. Siano Γ , Σ , δ e $\tau(x)$ definite come nel Teorema 1. Allora per $x \in N_\delta(x_0) \cap \Sigma$, la funzione

$$P(x) = \phi_{\tau(x)}(x)$$

è detta mappa di Poincaré per Γ in x_0 .

OSSERVAZIONE. ~~Il punto fisso~~ ^{I punti fissi} della mappa di Poincaré, vale a dire i punti $x \in \Sigma$ che verificano $P(x) = x$, corrispondono alle orbite periodiche $\phi(\cdot, x)$ di (1). E non vi è perdita di generalità nell'assumere che l'origine sia stato traslato nel punto $x_0 \in \Sigma$, ovvero che $x_0 = 0$, che $\Sigma \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, $P = \mathbb{R}^{n-1} \cap N_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ e $DP(0)$ sia rappresentato da una matrice $(n-1) \times (n-1)$. Considerando il sistema (1)

con $t \rightarrow -t$, si può vedere che la mappa di Poincaré P ha inversa \mathcal{C}^1 , detta P^{-1} . Perciò P è un diffeomorfismo, vale a dire una funzione regolare con inversa regolare.

ESEMPIO 1. Nell'esempio 1 del paragrafo 3.2 si è visto che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2-y^2) \\ \dot{y} = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$$

ha un ciclo limite Γ rappresentato da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

La mappa di Poincaré per Γ si può trovare risolvendo il sistema in coordinate polari,

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

con $r(0) = r_0$ e $\theta(0) = \theta_0$. La prima equazione si può risolvere per separazione di variabili. La soluzione del sistema è data da

$$\begin{cases} r(t; r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right]^{-1/2} \\ \theta(t; \theta_0) = t + \theta_0. \end{cases}$$

Se Σ è il raggio $\theta = \theta_0$ passante per l'origine, allora Σ è perpendicolare a Γ e la traiettoria passante per il punto $(r_0, \theta_0) \in \Sigma \cap \Gamma$ per $t=0$ interseca il raggio $\theta = \theta_0$

muovimenti per $t=2\pi$ (si veda figura 2). Segue che la mappa di Poincaré è data da

$$P(r_0) = \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-1/2}$$

Ovviamente $P(1)=1$ corrispondente al ciclo Γ e si vede che

$$P'(r_0) = e^{-4\pi} r_0^{-3} \left[1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-3/2}$$

e che $P'(1) = e^{-4\pi} < 1$.

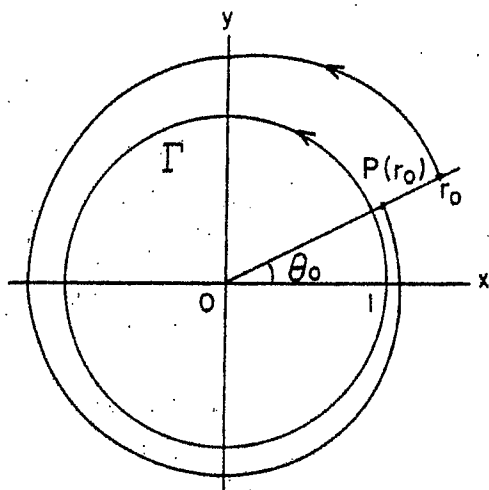


FIGURA 2. La mappa di Poincaré per il sistema dell'esempio 1.

Ripetiamo ora alcuni risultati specifici per la mappa di Poincaré per sistemi 2×2 . Per sistemi 2×2 , se trasliamo l'origine nel punto $x_0 \in \Gamma \cap \Sigma$, la ~~linea~~ ^{linea} perpendicolare Σ sarà una ~~linea~~ ^{linea} per l'origine (si veda FIGURA 3).

Il punto $0 \in \Gamma \cap \Sigma$ divide la ~~linea~~ ^{linea} Σ in due segmenti Σ^+ e Σ^- dove Σ^+ sta per intero all'esterno di Γ . Sia s la distanza con segno lungo Σ con $s > 0$ per i punti in Σ^+ ed $s < 0$ per i punti in Σ^- .

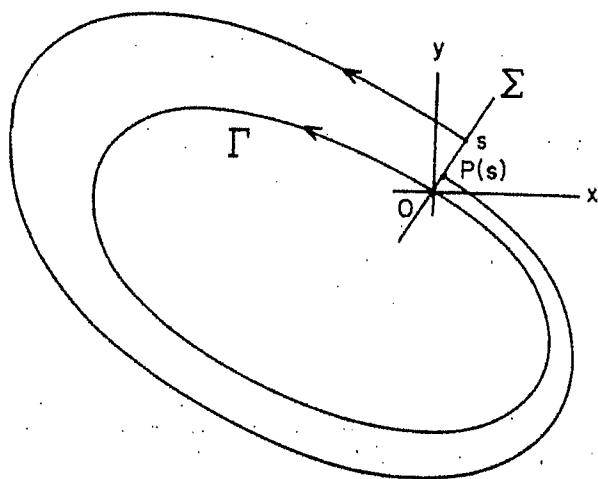


FIGURA 3. Il tratto di retta Σ normale per Γ in O .

In base al teorema 1, la mappa di Poincaré $P(s)$ è allora definita per $|s| < \delta$ e si ha $P(0) = 0$. ~~Per vedere come la stabilità~~ Per vedere come la stabilità del ciclo Γ è determinato da $P'(0)$, introduciamo la funzione di spostamento

$$d(s) = P(s) - s.$$

Allora $d(0) = 0$ e $d'(s) = P'(s) - 1$. Segue dal teorema del valore medio che, per $|s| < \delta$,

$$d(s) = d'(0) s$$

per qualche σ tra 0 ed δ . Visto che $d'(s)$ è continua, il segno di $d'(s)$ sarà lo stesso di $d'(0)$ per $|s|$ sufficientemente piccolo finché $d'(0) \neq 0$. Perciò, se $d'(0) < 0$ segue che $d(s) < 0$ per $s > 0$ e che $d(s) > 0$ per $s < 0$, ovvero il ciclo Γ è un ciclo limite stabile oppure un ciclo ω -limite (si veda FIGURA 3). Analogamente, se $d'(0) > 0$, allora Γ è un ciclo limite instabile oppure un ciclo α -limite. ~~Per vedere come la stabilità~~

Se $P(0)=0$ e $P'(0) < 1$, allora Γ è un ciclo limite stabile e, se $P(0)=0$ e $P'(0) > 1$, allora Γ è un ciclo limite instabile. Perciò la stabilità di Γ è determinata attraverso la derivata della mappa di Poincaré. In tal senso, il seguente teorema - che fornisce una formula per $P'(0)$ in termini di $f(x)$ - risulta molto utile.

TEOREMA 2. Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un aperto e sia $f \in C^1(E)$.

Sia $\gamma(t)$ una soluzione periodica di (1) di periodo T . Allora la derivata della mappa di Poincaré $P(s)$ lungo un segmento Σ ortogonale a $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \gamma(t) - \gamma(0), 0 \leq t \leq T\}$ in $x=0$ è data da

$$P'(0) = \exp\left(\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt\right)$$

COROLLARIO. Sotto le ipotesi del teorema 2, la soluzione periodica $\gamma(t)$ è un ciclo limite stabile se

$$\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt < 0$$

ed è un ciclo limite instabile se

$$\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt > 0.$$

Può essere un ciclo limite stabile, instabile o semi-stabile oppure appartenere a una ~~banda~~ banda continua di cicli se tale quantità è nulla.

Per l'Esempio 1 citato sopra, si ha $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$,
 $\operatorname{div} f(x, y) = 2 - 4x^2 - 4y^2$ e

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt = \int_0^{2\pi} (2 - 4 \cos^2 t - 4 \sin^2 t) dt = -4\pi.$$

Perciò, se $s = \pi - 1$, segue dal Teorema 2 che

$$P'(0) = e^{-4\pi}$$

in accordo con il risultato trovato nell'ESEMPIO 1 attraverso il conto diretto. Visto che $P'(0) < 1$, il ciclo $\gamma(t)$ è un ciclo limite stabile.

DEFINIZIONE 2. Sia $P(s)$ la mappa di Poincaré per un ciclo Γ di un sistema analitico 2×2 del tipo (1) e sia

$$d(s) = P(s) - s$$

la funzione di spostamento. Allora, se

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad d^{(k)}(0) \neq 0,$$

Γ è detto un ciclo limite multiplo di molteplicità k . Se $k=1$ allora Γ è detto un ciclo limite semplice.

Si osservi che $\Gamma = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x = \gamma(t), 0 \leq t \leq T \}$ è un ciclo limite semplice per (1) se e solo se

$$\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt \neq 0.$$

Si può vedere che, se k è pari, allora Γ è un ciclo limite semi-stabile; e se k è dispari, allora Γ è un ciclo limite stabile se $d^{(k)}(0) < 0$; e Γ è un ciclo limite instabile se $d^{(k)}(0) > 0$.

Inoltre, vedremo nel paragrafo 4.4 che se Γ è un ciclo limite multiplo di molteplicità k , allora possiamo far biforcare da Γ k cicli limite attraverso un'opportuna piccola perturbazione di (1).

In fine, si può vedere che nel caso analitico, $d^{(k)}(0) = 0$ per $k = 0, 1, 2, \dots$ se e solo se Γ appartiene a una sequenza continua di cicli.

La prima parte del teorema di Dulac dato nel paragrafo 3.3 segue immediatamente dall'analiticità della mappa di Poincaré per sistemi analitici. Supponiamo che vi siano un numero infinito di cicli Γ_n che si accumulano su un ciclo Γ . Allora la mappa di Poincaré $P(s)$ per Γ è una funzione analitica con un numero infinito in un intorno di $s=0$. Segue che $P(s) \equiv 0$ in un intorno di $s=0$, vale a dire che i cicli Γ_n appartengono ad una sequenza continua di cicli e di conseguenza non sono cicli limite. Tale risultato è stato ottenuto da Poincaré nel 1881.

TEOREMA DI POINCARÉ. Un sistema analitico 2×2 del tipo (1) non può avere un numero infinito di cicli limite che si accumulano su un ciclo di (1).

Per sistemi analitici 2×2 è opportuno a questo punto ~~discutere~~ definire la mappa di Poincaré nell'intorno di un fuoco dicendo nel contempo cose intendiamo per fuoco multiplo. Questi risultati si renderanno utili quando discuteremo della biforcazione di cicli limite a partire da un fuoco multiplo.

Supponiamo che un sistema analitico 2×2 del tipo (1) abbia un fuoco nell'origine e che il $\det Df(0) \neq 0$. Allora (1) è, a meno di un cambio di variabili lineare (cambio di base) equivalente al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - by + p(x, y) \\ \dot{y} = bx + ay + q(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

con $b \neq 0$ e tale che l'espansione di Taylor di p e q inizino con i termini di grado due (o più alto). In coordinate polari, tale sistema assume la forma

$$\begin{cases} \dot{r} = ar + o(r) \\ \dot{\theta} = b + o(r) \end{cases}$$

Siano $r(t; r_0, \theta_0)$, $\theta(t; r_0, \theta_0)$ la soluzione per tale sistema che verifica $r(0; r_0, \theta_0) = r_0$ e $\theta(0; r_0, \theta_0) = \theta_0$. Allora per $r_0 > 0$ sufficientemente piccolo e $b > 0$ si ha che $\theta(t; r_0, \theta_0)$ è una funzione strettamente crescente di t . Sia $t(\theta; r_0, \theta_0)$ la sua inversa e, per un θ_0 fissato, definiamo la funzione (FIGURA 4)

$$P(r_0) = r(t(\theta_0 + 2\pi, r_0, \theta_0); r_0, \theta_0).$$

Allora per tutti gli $r_0 > 0$ sufficientemente piccoli, $P(r_0)$ è una funzione analitica di r_0 detta MAPPA DI POINCARÉ per il fuoco nell'origine di (2). Analogamente, per $b < 0$, $\theta(t; r_0, \theta_0)$ è una funzione strettamente decrescente di t e la formula

$$P(r_0) = r(t(\theta_0 - 2\pi, r_0, \theta_0); r_0, \theta_0)$$

definisce ancora la mappa di Poincaré per il fuoco nell'origine.

TEOREMA 3. Sia $P(s)$ la mappa di Poincaré per un fuoco nell'origine per il sistema analitico 2×2 del tipo (2) con $b \neq 0$ e supponiamo che $P(s)$ sia definita per $0 < s < \delta_0$. Allora $\exists \delta > 0$ t. c. $P(s)$ può essere estesa ad una

funzione analitica definita per $|s| < \delta$. Inoltre, $P(0) = 0$,
 $P'(0) = \exp\left(\frac{2\pi a}{|b|}\right)$ e, se $d(s) = P(s) - s$, allora

$$d(s)d(-s) < 0 \text{ per } 0 < |s| < \delta.$$

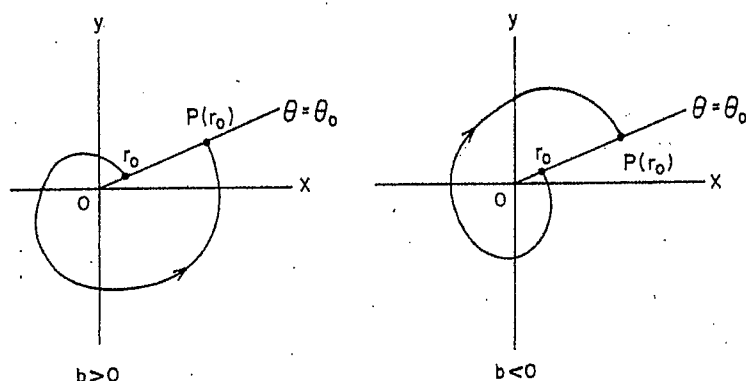


FIGURA 4. La mappa di Poincaré per un fuoco nell'origine

Il fatto che $d(s)d(-s) < 0$ per $0 < |s| < \delta$ può essere usato per dimostrare che,

$$\text{se } d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \text{ e } d^{(k)}(0) \neq 0,$$

allora k è dispari, ovvero $\exists m \in \mathbb{N}$ t. c. $k = 2m + 1$.

L'intero $m = \frac{k-1}{2}$ è detta la MOLTEPLICITA' del fuoco.

Se $m = 0$ il fuoco è detto semplice e dal teorema precedente segue che il sistema (2), con $b \neq 0$, ha un fuoco semplice nell'origine se e solo se $a \neq 0$. Il segno di $d'(0)$, ovvero il segno di a determina in tal caso la stabilità dell'origine:
 i) se $a < 0$, l'origine è un fuoco stabile; ii) se $a > 0$ l'origine è un fuoco instabile.

Se $d'(0) = 0$, vale a dire se $\alpha = 0$, allora (2) ha un fuoco multiplo oppure un centro. Se $d'(0) = 0$, allora la prima derivata non nulla $\sigma \equiv d^{(k)}(0) \neq 0$ viene detta numero di Lyapunov per il fuoco. Se $\sigma < 0$, allora il fuoco è stabile e se $\sigma > 0$ allora è instabile.

Tali informazioni saranno utili nel paragrafo 4.3 dove vedremo che ~~nei cicli limite possono~~ con un'opportuna piccola perturbazione del sistema (2) è possibile far biforcare m cicli limite da un fuoco multiplo di molteplicità m .

3.5 IL TEOREMA DELLA VARIETA' STABILE PER ORBITE PERIODICHE

Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto ed $f \in C^1(E)$. Assumiamo che il sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

abbia un'orbita periodica di periodo T ,

$$\Gamma: x = \gamma(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Gamma \subset E.$$

In tal caso, come previsto nell'osservazione del paragrafo 3.4, la derivata delle mappe di Poincaré $DP(x_0)$ in un punto $x_0 \in \Gamma$ è una matrice $(n-1) \times (n-1)$ e vedremo che, se $\|DP(x_0)\| < 1$, allora l'orbita Γ è asintoticamente stabile.

Per prima cosa mostriamo come la matrice $DP(x_0)$ può essere determinata attraverso una matrice fondamentale per la linearizzazione di (1) vicino all'orbita periodica Γ .

La linearizzazione di (1) vicino Γ è definita come il sistema lineare
NON AUTONOMO

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (2)$$

dove $A(t) = Df(\gamma(t))$.

La matrice $n \times n$ $A(t)$ è una funzione continua e periodica di periodo T di $t \forall t \in \mathbb{R}$. Una matrice fondamentale per (2) è una matrice $n \times n$ non singolare $\phi(t)$ che verifica l'equazione differenziale (per matrici)

$$\dot{\phi} = A(t)\phi \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le colonne di $\phi(t)$ consistono di n soluzioni linearmente indipendenti di (2) e la soluzione di (2) ~~esiste~~ che verifica la condizione iniziale $x(0) = x_0$ è data da

$$x(t) = \phi(t) \phi^{-1}(0) x_0.$$

Per una matrice periodica $A(t)$, vale il seguente risultato
TEOREMA DI FLOQUET. Se $A(t)$ è una matrice continua, periodica di periodo T , allora $\forall t \in \mathbb{R}$ ogni soluzione fondamentale (matrice) di (2) si può scrivere nella forma

$$\phi(t) = Q(t) e^{Bt} \quad (3)$$

dove $Q(t)$ è una matrice non singolare, differenziabile, periodica di periodo T e B è una matrice costante. Inoltre, se $\phi(0) = I$, allora $Q(0) = I$.

Perciò, almeno in linea di principio, lo studio di un sistema lineare non autonomo può essere ridotto allo studio di un sistema autonomo lineare (a coefficienti costanti) del tipo di quelli studiati nel primo capitolo.

COROLLARIO. Sotto le ipotesi del teorema di Floquet il sistema lineare non autonomo (2), ~~ed~~ attraverso il cambio di coordinate lineare

$$y = Q^{-1}(t)x,$$

si riduce al sistema autonomo lineare

$$\dot{y} = By \quad (4)$$

D'altra parte, determinare la matrice $Q(t)$ che riduce (2) a (4) o determinare una matrice fondamentale per (2) in generale è un problema complicato che richiede metodi difficili (compreso lo sviluppo delle teorie delle funzioni speciali).

Come vedremo, se $\phi(t)$ è una matrice fondamentale per (2) che soddisfa $\phi(0) = I$, allora $\|DP(x_0)\| = \|\phi(T)\|$ per ogni punto $x_0 \in \Gamma$. Segue perciò dal teorema 1 che $\|DP(x_0)\| = \|e^{BT}\|$. Gli autovalori di e^{BT} sono dati da $e^{A_j T}$, dove A_j , ~~per~~ con $j = 1, \dots, n$, sono gli autovalori della matrice B . Gli autovalori di B , A_j , sono detti moltiplicatori caratteristici di $\gamma(t)$. Sebbene poi gli esponenti caratteristici A_j sono solo determinati modulo $2\pi i$, essi bastano per determinare quanto sono grandi i moltiplicatori

caratteristiche $e^{\lambda_j T}$ che determinano la stabilità dell'orbita periodica Γ . Vediamo in che senso.

Preso $x \in E$, sia $\phi_t(x) = \phi(t, x)$ il flusso del sistema (1) e sia $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$ un'orbita periodica per (1) passante per $x_0 \in E$. Allora, visto che $\phi(t, x)$ soddisfa l'equazione differenziale (1) $\forall t \in \mathbb{R}$, la matrice

$$H(t, x) = D\phi_t(x)$$

verifica
$$\frac{\partial H(t, x)}{\partial t} = Df(\phi_t(x))H(t, x) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Perciò, per $x = x_0$ e $t \in \mathbb{R}$, la funzione $\phi(t) = H(t, x_0)$ verifica

$$\begin{cases} \dot{\phi} = Df(\gamma(t))\phi \\ \phi(0) = I \end{cases}$$

Vale a dire che $H(t, x_0)$ è la matrice fondamentale per (2) che verifica $\phi(0) = H(0, x_0) = I$. Perciò, in base al teorema 1 di Floquet,

$$H(t, x_0) = Q(t)e^{Bt},$$

dove $Q(t)$ è T -periodica e verifica $Q(0) = I$.

Segue perciò che $H(T, x_0) = e^{BT}$.

Il prossimo teorema mostra che uno degli esponenti caratteristici di $\gamma(t)$ è sempre nullo, vale a dire che

uno dei moltiplicatori caratteristici è sempre 1 e che, se supponiamo che $\lambda_n = 0$ e scegliamo la base per \mathbb{R}^n in modo che l'ultima colonna di e^{BT} è $(0, 0, \dots, 0, 1)^T$, allora $DP(x_0)$ è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna di e^{BT} . Ovviamente non vi è poi perdita di generalità nell'assumere che l'origine sia stata traslata in $x_0 \in \Gamma$.

TEOREMA 2. Supponiamo $f \in C^1(E)$, dove $E \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto e che $\gamma(t) = \phi_t^x(0)$ sia un'orbita periodica di (1) contenuta in E . Per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo e $x \in \Sigma \cap N_\delta(0)$, sia $P(x)$ la mappa di Poincaré di $\gamma(t)$ in 0 , dove Σ è l'iperpiano $(n-1)$ dimensionale ortogonale a Γ in 0 . Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli esponenti caratteristici di $\gamma(t)$, allora uno di loro, diciamo λ_n , è nullo e i moltiplicatori caratteristici $e^{\lambda_j T}$, $j=1, \dots, n-1$, sono gli autovalori di $DP(0)$. Infatti, se si sceglie la base di \mathbb{R}^n in modo che $f(0) = (0, 0, \dots, 0, 1)^T$, allora l'ultima colonna di $H(T, 0) = D\phi_T^x(0)$ è $(0, \dots, 0, 1)^T$ e $DP(0)$ si ottiene cancellando l'ultima riga e l'ultima colonna di $H(T, 0)$.

OSSERVAZIONE. Sebbene in generale è molto difficile determinare una matrice fondamentale $\phi(t)$ per (2), tale teorema ci dà ~~una~~ i mezzi per calcolare $DP(x_0)$ dal punto di vista numerico. Infatti $DP(x_0)$ può essere trovata determinando

l'effetto sull'orbita periodica $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$ delle piccole variazioni nella condizione iniziale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nel definire l'orbita periodica $\gamma(t)$. Infatti, in un sistema di coordinate con l'origine in un punto dell'orbita periodica Γ e l'asse x_n tangente a Γ in tale punto che punta nella direzione di moto su Γ , si ha

$$DP(0) = \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} (T, 0) \right]_{i,j=1, \dots, n-1}$$

dove $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ è il flusso di (1).

Come già ~~notato~~ osservato, la stabilità dell'orbita periodica $\gamma(t)$ è determinata attraverso gli esponenti caratteristici $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ o i moltiplicatori caratteristici $e^{\lambda_1 T}, \dots, e^{\lambda_{n-1} T}$. Queste cose viene precisate dal prossimo teorema.

TEOREMA della VARIETA' STABILE PER ORBITE PERIODICHE.

sia $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto contenente un'orbita periodica

$$\Gamma: x = \gamma(t)$$

di (1) di periodo T . sia ϕ_t il flusso di (1) e $\gamma(t) = \phi_t(x_0)$.

Se k degli esponenti caratteristici di $\gamma(t)$ hanno parte reale negativa, $0 \leq k \leq n-1$ e $n-k-1$ di loro hanno parte reale positiva, allora $\exists \delta > 0$ t.c. la varietà stabile di Γ ,

$$S(\Gamma) = \left\{ x \in N_\delta(x_0) : d(\phi_t(x), \Gamma) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \right\},$$

è una varietà $(k+1)$ -dimensionale differenziabile che

risulta positivamente invariante attraverso il flusso ϕ_t e la varietà instabile di Γ ,

$$I(\Gamma) = \left\{ x \in N_f(x_0) : d(\phi_t(x), \Gamma) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \right\}$$

è una varietà $(n-k)$ dimensionale differenziabile che è negativamente invariante attraverso il flusso ϕ_t .

Inoltre la varietà stabili e instabili di Γ si intersecano trasversalmente in Γ .

OSSERVAZIONE 1. Le varietà stabili ed instabili di Γ , indicate con $S(\Gamma)$ e $I(\Gamma)$, nel teorema della varietà stabile, possono essere usate per definire le ~~stabilità~~ varietà globali stabili e instabili di Γ , indicate con $W^S(\Gamma)$ e $W^I(\Gamma)$ come nella paragrafo 3.3. Si può vedere che $W^S(\Gamma)$ e $W^I(\Gamma)$ sono varietà differenziabili uniche ~~e~~ invariante che hanno le stesse dimensioni di $S(\Gamma)$ e $I(\Gamma)$ rispettivamente. Inoltre, se $f \in C^r(E)$, allora si può vedere che $W^S(\Gamma)$ e $W^I(\Gamma)$ sono varietà di classe C^r .

OSSERVAZIONE 2. Supponiamo che l'origine venga traslata nel punto x_0 t.c. $\gamma(t) = \phi_t(0)$. Siano $\lambda_j = a_j + i b_j$ gli esponenti caratteristici dell'orbita periodica $\gamma(t)$ e siano $e^{\lambda_j T}$ i moltiplicatori caratteristici di $\gamma(t)$, vale a dire $e^{\lambda_j T}$ siano gli autovalori della matrice reale $n \times n$

$$\Phi(T) = H(T, 0).$$

Inoltre, supponiamo che vi sia una base di autovettori generalizzati di $\Phi(T)$ per \mathbb{R}^n data da $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m\}$

costruita come nel paragrafo s.s. Definiamo allora i sottospazi stabili, instabili e centrali dell'orbita periodica Γ nel punto $0 \in \Gamma$

$$E^S(\Gamma) = \text{span} \{ u_j, v_j : a_j < 0 \}$$

$$E^c(\Gamma) = \text{span} \{ u_j, v_j : a_j = 0 \}$$

$$E^I(\Gamma) = \text{span} \{ u_j, v_j : a_j > 0 \}.$$

Si può allora dimostrare che le varietà stabile e instabile $W^S(\Gamma)$ e $W^I(\Gamma)$ di Γ sono ^(rispettivamente, ai) tangenti ai sottospazi stabile e instabile $E^S(\Gamma)$ ed $E^I(\Gamma)$ di Γ nel punto $0 \in \Gamma$.

Se $\text{Re}(\lambda_j) \neq 0$ per $j=1, \dots, n-1$, il teorema determina il comportamento delle traiettorie vicino Γ . Se $\text{Re}(\lambda_j) \neq 0$ per $j=1, \dots, n-1$, allora Γ è detta un'orbita periodica iperbolica. L'orbita periodica dell'esempio 1 del paragrafo 3.3 è un'orbita periodica iperbolica con una varietà stabile 2-dimensionale e una varietà ~~una~~ instabile 2-dimensionale. Gli esponenti caratteristici per tale esempio saranno determinati più avanti in questo paragrafo. Se due o più degli esponenti caratteristici hanno parte reale nulla allora l'orbita periodica Γ ha una varietà centrale, indicata con $W^c(\Gamma)$. Nell'esempio 2 del paragrafo 3.2 la sfera unitaria S^2 è una varietà centrale per l'orbita periodica $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$.

Il prossimo teorema mostra che non solo le traiettorie nella varietà stabile tendono a Γ quando $t \rightarrow \infty$, ma che il moto lungo $S(\Gamma)$ è sincronizzato con il moto lungo Γ . Assumiamo che gli esponenti caratteristici siano stati ordinati in modo che

$\operatorname{Re}(A_j) < 0$ per $j=1, \dots, k$ e $\operatorname{Re}(A_j) > 0$ per $j=k+1, \dots, n-1$.

TEOREMA 3. Con la ipotesi del teorema precedente, esistono un $\alpha > 0$ e un $K > 0$ t.c. $\operatorname{Re}(A_j) \leq -\alpha$ per $j=1, \dots, k$ e $\operatorname{Re}(A_j) \geq \alpha$ per $j=k+1, \dots, n-1$ e $\forall x \in S(\tau)$ vi è una fase asintotica t_0 tale che $\forall t \geq 0$

$$|\phi_t(x) - \gamma(t-t_0)| \leq K e^{-\alpha t/\tau}$$

Analogamente, $\forall x \in I(\tau)$ esiste una fase asintotica t_0 tale che $\forall t \leq 0$

$$|\phi_t(x) - \gamma(t-t_0)| \leq K e^{\alpha t/\tau}$$

ESEMPIO 1. Si consideri il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - x^3 - xy^2 \\ \dot{y} = x + y - x^2y - y^3 \\ \dot{z} = \lambda z \end{cases}$$

che generalizza il sistema dell'esempio 1 del paragrafo 3.3.

Esiste un'orbita periodica

$$P: \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T$$

di periodo $T=2\pi$. Calcoliamo

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 1-3x^2-y^2 & -1-2xy & 0 \\ 1-2xy & 1-x^2-3y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

La linearizzazione di tale sistema vicino all'orbita periodica $\gamma(t)$ è data da

$$\dot{x} = A(t)x$$

dove la matrice periodica $A(t)$ è data da

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos^2 t & -1 - \sin 2t & 0 \\ 1 - \sin 2t & -2 \sin^2 t & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare non autonomo ammette la matrice fondamentale

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} \cos t & -\sin t & 0 \\ e^{-2t} \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

che verifica la condizione iniziale $\Phi(0) = I$. Verificare che $\Phi(t)$ verifica l'equazione differenziale matriciale $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$. Una volta trovata la matrice fondamentale per il sistema linearizzato, ~~non~~ è facile vedere che

$$\Phi(t) = Q(t) e^{Bt}$$

dove la matrice periodica $Q(t)$ e la matrice costante B sono date da

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Come descritto nel teorema 2, cancellando la riga e la colonna contenente l'autovettore nullo si determina

$$DP(x_0) = \begin{pmatrix} e^{-2T} & 0 \\ 0 & e^{\lambda T} \end{pmatrix}$$

dove $x_0 = (1, 0, 0)^T$, $T = 2\pi$ e gli esponenti caratteristici sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = \lambda$. Per $\lambda > 0$, come visto nell'esempio 1 del paragrafo 3.3, vi è una varietà stabile 2-dimensionale $W^S(\Gamma)$ e una varietà instabile 2-dimensionale $W^I(\Gamma)$ che si intersecano ortogonalmente su Γ . (si veda figura 1 del paragrafo 3.3).

Per $\lambda < 0$ esiste una varietà stabile tridimensionale $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e una varietà instabile 1-dimensionale, Γ . Per $\lambda = 0$ vi è una varietà stabile 2-dimensionale e una varietà centrale 2-dimensionale; la varietà centrale $W^C(\Gamma)$ è il cilindro unitario.

Tale sistema si studia più facilmente se si scrive il sistema precedente in coordinate cilindriche come nell'esempio 1 del paragrafo 3.4:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \\ \dot{z} = \lambda z \end{cases}$$

La mappa di Poincaré può allora essere calcolata direttamente risolvendo il sistema precedente come nell'esempio 1 del paragrafo 3.4, vale a dire

$$P(r, z) = \begin{pmatrix} \left[1 + \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right]^{-1/2} \\ z e^{2\pi\lambda} \end{pmatrix}$$

Segue allora che si riottiene il risultato precedente

$$DP(1,0) = \begin{bmatrix} e^{-4\pi} & 0 \\ 0 & e^{2\pi\lambda} \end{bmatrix}$$

Concludiamo questo paragrafo con un ultimo risultato relativo alla stabilità delle orbite periodiche in \mathbb{R}^n simile al corollario del paragrafo 3.5 per i cicli limite dei sistemi 2×2 .

TEOREMA 4. Sia $f \in C^1(E)$, dove $E \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto contenente un'orbita periodica $\gamma(t)$ di (\dot{x}) di periodo T . Allora $\gamma(t)$ non è asintoticamente stabile a meno che

$$\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt \leq 0.$$

~~osservazione~~

OSSERVAZIONE. Nell'esempio 1, $\operatorname{div} f(x) = 2 - 4x^2 + \lambda$ e

$$\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt = (\lambda - 2)2\pi > 0 \text{ se } \lambda > 2.$$

se $\lambda > 2$ certamente l'orbita periodica $\gamma(t)$ non è asintoticamente stabile. Infatti, sappiamo che $\lambda > 0$ implica che $\gamma(t)$ è un'orbita periodica di tipo selle, che è instabile.

Tale esempio mostra che in dimensione $n \geq 3$ la condizione

$$\int_0^T \operatorname{div} f(\gamma(t)) dt < 0$$

non implica che $\gamma(t)$ sia un'orbita periodica asintoticamente stabile così come accade nel caso $n=2$ (si veda il corollario del paragrafo 3.4).

3.6 SISTEMI HAMILTONIANI CON DUE GRADI DI LIBERTA'

Così come i sistemi hamiltoniani con un grado di libertà hanno fornito alcuni esempi interessanti che illustrano la teoria generale sviluppata nel capitolo 2, allo stesso modo i sistemi hamiltoniani con due gradi di libertà ci forniscono alcuni esempi che illustrano la natura delle varietà invarianti $W^S(\Gamma)$, $W^I(\Gamma)$ e $W^C(\Gamma)$ per un'orbita periodica Γ .

Prima di presentare tali esempi, mostriamo come la geometria proiettiva può essere usata per proiettare il flusso su una varietà n -dimensionale in \mathbb{R}^{n+1} su un flusso in \mathbb{R}^n . Iniziamo con un esempio particolarmente semplice: la proiezione stereografica della sfera unitaria di \mathbb{R}^3 , $S^2 = \{u \in \mathbb{R}^3 : |u| = 1\}$, sul piano (X, Y) come indicato nella FIGURA 1.

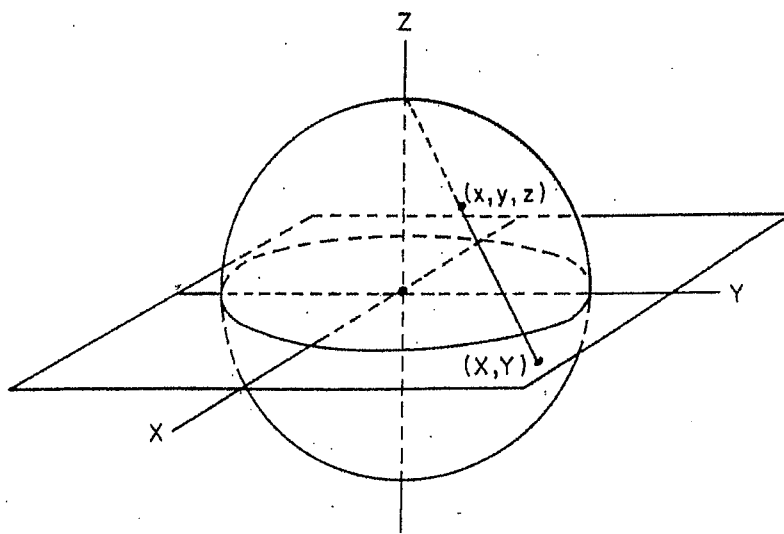


FIGURA 1. Proiezione stereografica di S^2 sul piano (X, Y) .

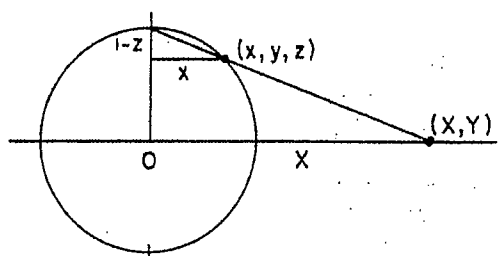


FIGURA 2. Una sezione trasversale della sfera della FIGURA 1.

Dalla proprietà dei triangoli simili (si veda FIGURA 2) si ha che le equazioni che descrivono (X, Y) in termini di (x, y, z) sono date da

$$\begin{cases} X = \frac{x}{1-z} \\ Y = \frac{y}{1-z} \end{cases}$$

Tali equazioni ci danno una corrispondenza biunivoca tra i punti (x, y, z) sulla sfera unitaria S^2 a cui è stato tolto il polo nord e i punti $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. I punti dentro la circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$ corrispondono ai punti sulla semisfera inferiore, l'origine nel piano (X, Y) corrisponde al polo sud $(0, 0, -1)$ e i punti esterni alla circonferenza $X^2 + Y^2 = 1$ corrispondono ai punti della semisfera superiore. Il punto $(0, 0, 1) \in S^2$ corrisponderebbe al "punto all'infinito".

Possiamo usare questo tipo di geometria proiettiva per visualizzare i flussi su varietà n -dimensionali.

ESEMPIO 1. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + xz^2 \\ \dot{y} = x + yz^2 \\ \dot{z} = -z(x^2 + y^2) \end{cases}$$

È facile vedere che se $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, allora si ha $\dot{V} = 0$ lungo le traiettorie del sistema. Perciò le traiettorie appartengono alle sfere $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$. Il flusso su ognuna di queste sfere è topologicamente equivalente al flusso sulla sfera due-dimensionale unitaria S^2 mostrate in FIGURA 3.

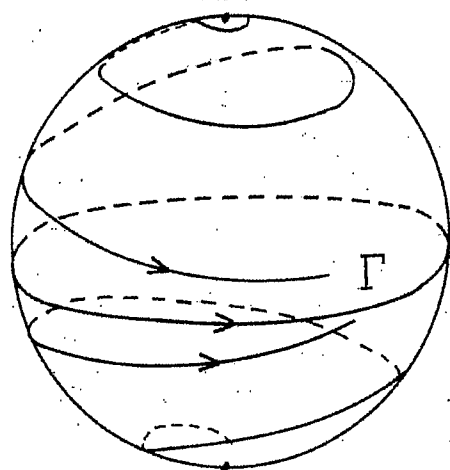


FIGURA 3. Un flusso sulla sfera unitaria S^2 .

Il flusso all'equatore di S^2 è dato dall'orbita periodica

$$\Gamma: \gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T.$$

L'orbita periodica Γ ha una varietà 2-dimensionale stabile

$$W^s(\Gamma) = S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}.$$

Se proiettiamo dal polo nord di S^2 sul piano (x, y) come in figura 1, otteniamo il flusso (sul piano (x, y)) mostrato in FIGURA 4(a). L'orbita periodica Γ viene mandata sulle circonferenza unitaria. Non possiamo rappresentare il flusso in un intorno del polo nord $(0, 0, 1)$ nel ritratto di Fase della FIGURA 4(a). Se intendiamo rappresentare il flusso vicino $(0, 0, 1)$, potremmo proiettare dal punto $(1, 0, 0)$ sul piano (y, z) ottenendo il ritratto di fase piano mostrato in FIGURA 4(b). Si osserva che l'orbita periodica Γ viene mandata sull'asse y che è "connesso al punto all'infinito".

Si può vedere che l'orbita periodica Γ ha esponenti caratteristici $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = -1$. Perciò, Γ ha una varietà stabile 2-dimensionale $W^s(\Gamma) = S^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$ e una varietà centrale due-dimensionale $W^c(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Ovviamente non vediamo la varietà centrale $W^c(\Gamma)$ in nessuna delle proiezioni della FIGURA 4 visto che stiamo solo proiettando la sfera S^2 sul piano \mathbb{R}^2 in tale figura.

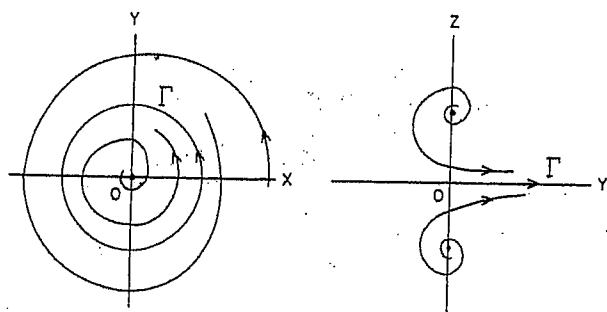


FIGURA 4. Varie rappresentazioni piane del flusso S^2 mostrato in Figura 3.

ESEMPIO 2. Si consideri il sistema hamiltoniano con due gradi di libertà

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = w \\ \dot{w} = -z \end{cases}$$

con hamiltoniana $H(x, y, z, w) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$. Le traiettorie di tale sistema appartengono alle ipersfere $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = k^2$ e il flusso su ogni ipersfera è topologicamente equivalente al flusso sulla sfera unitaria di \mathbb{R}^4 $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : |x| = 1\}$. Su S^3 , l'energia totale $H = 1/2$ è divisa tra i due oscillatori armonici $\ddot{x} + x = 0$ e $\ddot{z} + z = 0$. Vale a dire che dalle equazioni precedenti segue che

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = h^2 \\ z^2 + w^2 = 1 - h^2 \end{cases} \quad \text{per qualche costante } h \in [0, 1]. \quad (1)$$

Vi sono due orbite periodiche su S^3 ,

$$\Gamma_1: \gamma_1(t) = (\cos t, -\sin t, 0, 0)^T$$

$$\Gamma_2: \gamma_2(t) = (0, 0, \cos t, -\sin t)^T$$

corrispondenti rispettivamente ad $h=1$ e $h=0$.

Se proiettiamo S^3 su \mathbb{R}^3 dal punto $(0, 0, 0, 1) \in S^3$, otteniamo una corrispondenza biunivoca tra i punti $(x, y, z, w) \in S^3 \setminus \{(0, 0, 0, 1)\}$ e i punti $(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ data da

$$X = \frac{x}{1-w}, \quad Y = \frac{y}{1-w}, \quad Z = \frac{z}{1-w} \quad (2)$$

Se $h=1$, allora da (1) si ha $z=w=0$ e $x^2+y^2=X^2+Y^2=1$.
 Vale a dire che l'orbita periodica Γ_1 viene mandata sulle
 circonferenze unitarie $X^2+Y^2=1$ del piano (X, Y) dentro \mathbb{R}^3 .
 E, se $h=0$, allora da (1) si ha $x=y=0$ e

$$Z = \frac{z}{1 \pm \sqrt{1-z^2}},$$

vale a dire che l'orbita periodica Γ_0 viene mandata sull'asse Z
 connesso al punto all'infinito. Queste due orbite periodiche
 e nello spazio (X, Y, Z) sono mostrate in FIGURA 5.

Le restanti traiettorie di tale sistema appartengono a tori
 2-dimensionali T_h^2 , ottenuti come prodotto delle due
 circonferenze

$$T_h^2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^2+y^2=h^2, z^2+w^2=1-h^2\}$$

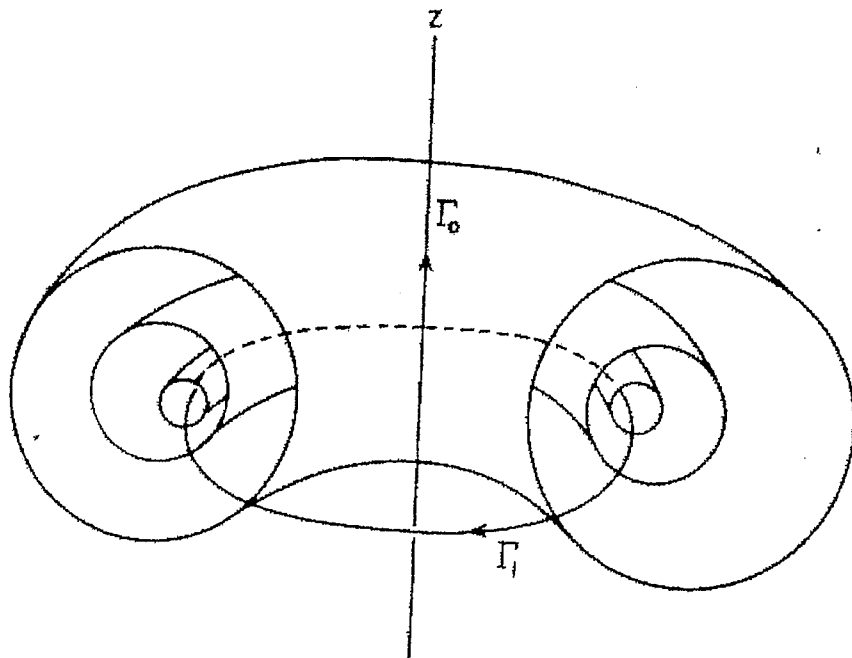


FIGURA 5. Un flusso su S^3 costituito da due orbite periodiche
 e i flussi sui tori invarianti

Le equazioni per le proiezioni di questi due tori 2-dimensionali su \mathbb{R}^3 possiamo trovarle sostituendo la (2) in (1):

$$X^2 + Y^2 = \frac{h^2}{(1-W)^2} \quad \text{e} \quad Z^2(1-W)^2 + W^2 = 1 - h^2$$

Risolvendo la seconda equazione in W e sostituendo nella prima si ha

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = \frac{h(Z^2 + 1)}{1 \pm \sqrt{1 - h^2 - h^2 Z^2}}$$

In coordinate cilindriche (R, θ, Z) questo si semplifica e otteniamo le seguenti equazioni dei tori 2-dimensionali:

$$T_h^2: Z^2 + \left(R - \frac{1}{h}\right)^2 = \frac{1 - h^2}{h^2}$$

Vale a dire che i tori T_h^2 si ottengono ruotando le circonferenze del piano (X, Z) , centrate in $(1/h, 0, 0)$ con raggio $\frac{\sqrt{1-h^2}}{h}$ intorno all'asse Z . Questi tori invarianti sono mostrati in Figura 5. In tale esempio l'orbita periodica Γ_1 ha una varietà centrale 4-dimensionale

$$W^c(\Gamma_1) = \bigcup_{r>0} S_r^3$$

dove su ogni sfera S_r^3 di raggio r , Γ_1 ha una varietà centrale tridimensionale come quelle mostrate in FIGURA 5.

Si può dimostrare che Γ_1 ha quattro esponenti caratteristici nulli.

ESEMPIO 3. Si consideri il sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = -z \\ \dot{w} = w \end{cases}$$

con hamiltoniana $H(x, y, z, w) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - zw$. Le traiettorie di tale sistema appartengono all'ipersuperficie

$$S: x^2 + y^2 - 2wz = K.$$

Il flusso su ognuna di queste ipersuperfici è topologicamente equivalente al flusso sull'ipersuperficie $x^2 + y^2 - 2wz = 1$. su tali ipersuperfici vi è un'orbita periodica

$$\Gamma: \gamma(t) = (\cos t, -\sin t, 0, 0)^T.$$

La linearizzazione di questo sistema su $\gamma(t)$ è data da

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

La matrice fondamentale per tale sistema lineare con condizione iniziale $\phi(0) = I$ è data da

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} R_t & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} e^{Bt}$$

dove R_t è una matrice di rotazione e $B = \text{diag}(0, 0, -1, 1)$.

Gli esponenti caratteristici sono dati da $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = 1$ e l'orbita periodica Γ ha una varietà 2-dimensionale stabile $W^s(\Gamma)$ e una varietà 2-dimensionale instabile $W^u(\Gamma)$ su S , così come una varietà 2-dimensionale centrale $W^c(\Gamma)$ (che non appartiene a S). Se proiettiamo l'ipersuperficie S sul punto $(1, 0, 0, 0) \in S$ su \mathbb{R}^3 , l'orbita periodica Γ viene mandata sull'asse y . $W^s(\Gamma)$ è mandata sul piano (y, z) e $W^u(\Gamma)$ sul piano (y, w) . Si vede la FIGURA 6.

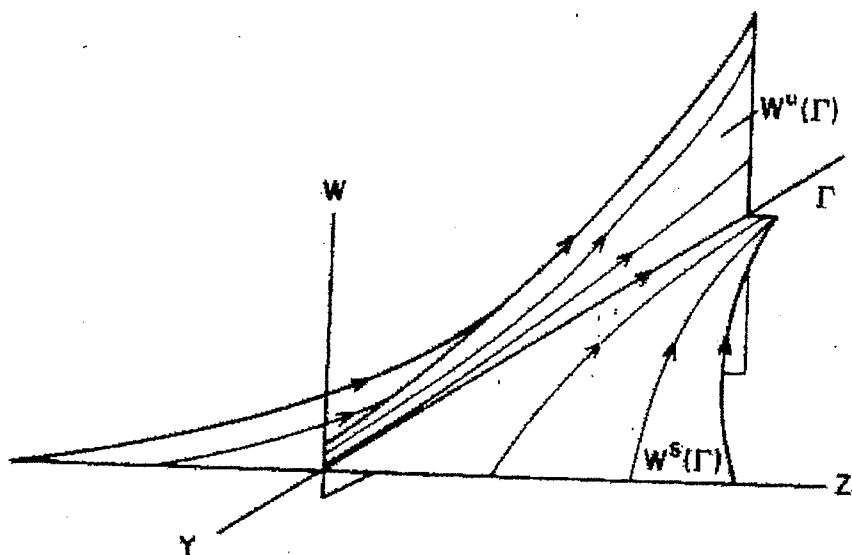


FIGURA 6. Le varietà 2-dimensionali stabile e instabile dell'orbita periodica Γ

ESEMPIO 4. Si consideri l'oscillatore-pendolo

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ \dot{z} = w \\ \dot{w} = -\sin z \end{cases}$$

con hamiltoniana $H(x, y, z, w) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (1 - \cos z) + \frac{1}{2}w^2$

Le traiettorie di tale sistema appartengono alla ipersuperficie

$$S: x^2 + y^2 + w^2 + 2(1 - \cos z) = k^2.$$

Per $k > 2$ vi sono tre orbite periodiche sull'ipersuperficie S :

$$\Gamma_0: \gamma_0(t) = (k \cos t, -k \sin t, 0, 0)$$

$$\Gamma_{\pm}: \gamma_{\pm}(t) = (\sqrt{k^2 - 4} \cos t, -\sqrt{k^2 - 4} \sin t, \pm\pi, 0).$$

Se proiettiamo dal punto $(k, 0, 0, 0) \in S$ su \mathbb{R}^3 , l'orbita periodica Γ_0 viene mandata sull'asse γ e le orbite periodiche Γ_{\pm} sulle ellissi.

$$\pi \gamma^2 + 4 \left(z \pm \frac{k\pi}{4} \right)^2 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2.$$

Del momento che

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\cos z & 0 \end{pmatrix}$$

troviamo che Γ_0 ha tutti gli esponenti caratteristici nulli. Perciò Γ_0 ha una varietà centrale tridimensionale su S . Analogamente Γ_{\pm} hanno esponenti caratteristici $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$ e $\lambda_4 = -1$. Perciò, Γ_{\pm} hanno varietà stabili e instabili su S di dimensione due e varietà centrali due-dimensionali (che non appartengono ad S). Si veda la FIGURA 7.

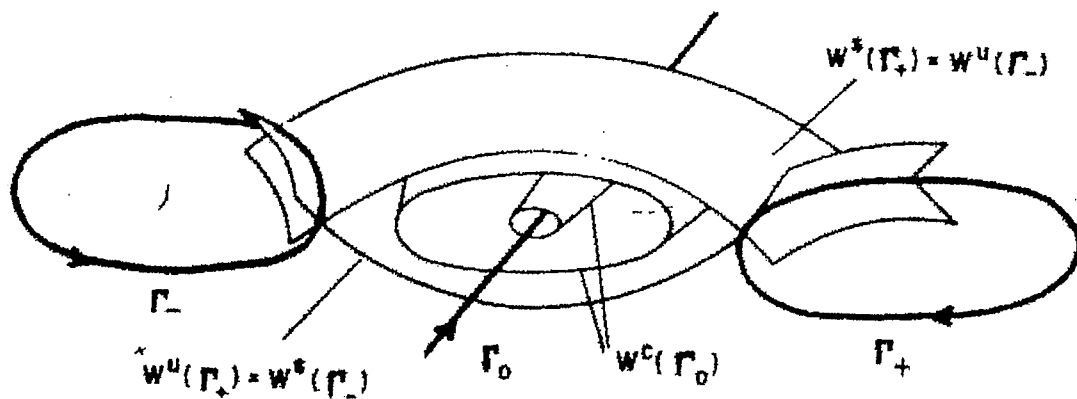


FIGURA 4. Il flusso dell'oscillatore-pendolo nello spazio proiettivo.

Si vede che, per sistemi hamiltoniani con due gradi di libertà, le traiettorie del sistema appartengono all'ipersuperficie S (con tre gradi di libertà) data da $H(x) = \text{costante}$.

In ogni punto $x_0 \in S$ vi è un'ipersuperficie 2-dimensionale Σ normale al flusso. Se x_0 è un punto sull'orbita periodica, allora, per il teorema 1 del paragrafo 3.4, vi è un $\varepsilon > 0$ e una mappa di Poincaré

$$P: N_\varepsilon(x_0) \cap \Sigma \longrightarrow \Sigma.$$

Inoltre, risulta: i) un punto fisso di P corrisponde ad un'orbita periodica Γ del sistema; ii) se le iterate di P appartengono a una curva periodica, allora tale curva regolare è la sezione di una varietà differenziabile invariante del sistema come $W^s(\Gamma)$ o $W^I(\Gamma)$; iii) se le iterate di P appartengono ad una curva chiusa, allora tale curva chiusa è la sezione di un toro invariante del sistema appartenente a $W^c(\Gamma)$.

3.4 LA TEORIA DI POINCARÉ-BENDIXSON IN \mathbb{R}^2

Nel paragrafo 3.2 abbiamo definito gli insiemi α - e ω -limite di una traiettoria Γ e abbiamo detto che erano in insiemi invarianti chiusi del sistema

$$\dot{x} = f(x). \quad (1).$$

Abbiamo poi visto negli esempi del paragrafo 3.2 e 3.3 che gli insiemi α - e ω -limite di una traiettoria possono essere un punto critico, un ciclo limite, una superficie in \mathbb{R}^3 o un attrattore strano costituito da un numero infinito di superfici ramificate interfoliate di \mathbb{R}^3 .

Per sistemi 2-dimensionali di tipo (1) con $x \in \mathbb{R}^2$, gli insiemi α - e ω -limite di una traiettoria sono oggetti relativamente semplici: l'insieme α - e ω -limite di ogni traiettoria di un sistema 2-dimensionale è o un punto critico, o un ciclo o un ciclo separatore policentrico. Un ciclo separatore policentrico di (1) è un'unione finita di cicli separatori compatibilmente orientati di (1).

Diamo qui una definizione precisa di cicli separatori di (1) e poi enunceremo i risultati principali della teoria di Poincaré-Bendixson per sistemi dinamici 2×2 . Si tratti di risultati ottenuti intorno al 1900 dai due autori. Ricordiamo che nel paragrafo 2.11 abbiamo definito una separatrice come una traiettoria di (1) che sta sul bordo di un settore iperbolico di (1).

DEFINIZIONE 1. Un ciclo separatore di (1) S è un'immagine continua di un ciclo che consiste dell'unione di un numero finito di punti critici e separatori di (1), p_j , $j=1, \dots, m$ t.c. per $j=1, \dots, m$, $\alpha(\Gamma_j) = p_j$ e $\omega(\Gamma_j) = p_{j+1}$, dove $p_{m+1} = p_1$ e tale che la mappa di Poincaré è definita su un lato di S .

Un ciclo separatore policentrico di (1) S è l'unione di un numero finito di cicli separatori di (1) tali che la mappa di Poincaré è definita su un lato di S .

Il fatto che la mappa di Poincaré è definita su un solo lato di un ciclo separatore policentrico S di (1) implica che per ogni ciclo separatore $\Gamma_j \in S$ al più uno dei settori adiacenti a Γ_j è un settore iperbolico; implica anche che tutti i cicli separatori contenuti in S sono orientati compatibilmente.

TEOREMA 1 (teorema di Poincaré-Bendixson). Supponiamo $f \in C^1(E)$, dove $E \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto e che (1) abbia una traiettoria Γ contenuta in un compatto $F \subset E$. Allora se $\omega(\Gamma)$ non contiene punti critici di (1), risulta che $\omega(\Gamma)$ è un'orbita periodica di (1).

TEOREMA 2 (teorema di Poincaré-Bendixson generalizzato).

Sotto le ipotesi del teorema precedente e l'ipotesi che (1) abbia soltanto un numero finito di punti critici in F , segue che $\omega(\Gamma)$ è o un punto critico di (1), oppure un'orbita periodica di (1) oppure un ciclo separatore policentrico di (1).

TEOREMA 3 (teorema di Poincaré-Bendixson per varietà 2-dimensionali)

Sia M una varietà 2-dimensionale di classe C^2 orientabile e compatta. Sia ϕ_t un flusso su M di classe C^2 che presenta solo un numero finito di punti critici su M . Allora l'insieme ω -limite $\omega(\Gamma)$ per ogni traiettoria

$$\Pi = \{x \in M : x = \phi_t(x_0), x_0 \in M, t \in \mathbb{R}\}$$

può essere

- i) o un punto di equilibrio di ϕ_t , vale a dire un punto $x_0 \in M$ tale che $\phi_t(x_0) = x_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- ii) ~~o~~ oppure un'orbita periodica, vale a dire una traiettoria $\Pi_0 = \{x \in M : x = \phi_t(x_0), x_0 \in M, 0 \leq t \leq T, \phi_T(x_0) = x_0\}$;
- iii) oppure un ciclo separatore policentrico su M , vale a dire un'unione connessa di un numero finito di traiettorie e di punti di equilibrio del flusso S_0 , tale che $\forall x \in M$ sufficientemente vicino a S_0 , $\phi_t(x)$ ruota intorno a S_0 su un lato o l'altro di S_0 per $t \rightarrow \infty$;
- iv) o infine risulta $\omega(\Pi) = M$ ed M è un toro.

Riportiamo infine un risultato per orbite periodiche di sistemi 2×2 .

TEOREMA 4. Supponiamo che $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^2$ aperto che contiene un'orbita periodica Γ di (1) così come il suo interno U . Allora U contiene al più un punto critico di (1).

OSSERVAZIONE. Per sistemi quadratici (1) dove le componenti di $f(x)$ consistono di polinomi quadratici, si può vedere che U è una regione convessa che contiene esattamente un punto critico di (1).

3.8 SISTEMI DI LIENARD

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che il teorema di Poincaré-Bendixon può essere usato per stabilire l'esistenza di cicli limite per certi sistemi 2×2 . ~~Si~~^{rebbe} una questione molto più complicata determinare il numero esatto di cicli limite per un certo sistema o classe di sistemi dipendenti da parametri. In questo paragrafo affronteremo tale argomento per sistemi del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad (1)$$

sotto opportune ipotesi sulle funzioni F e g . Il sistema (1) studiato per la prima volta dal fisico Lienard, porta il suo nome.

Si osserva che il sistema si può anche scrivere come equazione del II ordine

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0 \quad (2)$$

con $f(x) = F'(x)$. Tale equazione include anche l'equazione di van der Pol

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

come caso particolare.

Il sistema (1) è invariante mediante le trasformazioni

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ quando F e g sono funzioni dispari definite su tutta la retta reale. Perciò, se $(x(t), y(t))$ descrive una traiettoria di (1), allora la stessa cosa fa $(-x(t), -y(t))$.

Segue che se Γ è una traiettoria chiusa di (1), vale a dire un'orbita periodica di (1), allora Γ è simmetrica rispetto all'origine.

TEOREMA DI LIENARD (1928). Supponiamo che $F, g \in C^1(\mathbb{R})$.

Supponiamo inoltre che:

i) F e g siano funzioni dispari;

ii) $x g(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$;

iii) $F(0) = 0, F'(0) < 0$

iv) F abbia un^o unico zero in $x = a, a > 0$;

v) F sia monotona crescente per $x > a$ ed $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Allora il sistema di Lienard (1) ha esattamente un ciclo limite che risulta stabile.

COLLOMARIO. Per $\mu > 0$ l'equazione di van der Pol (2) ha un unico ciclo limite che risulta stabile.

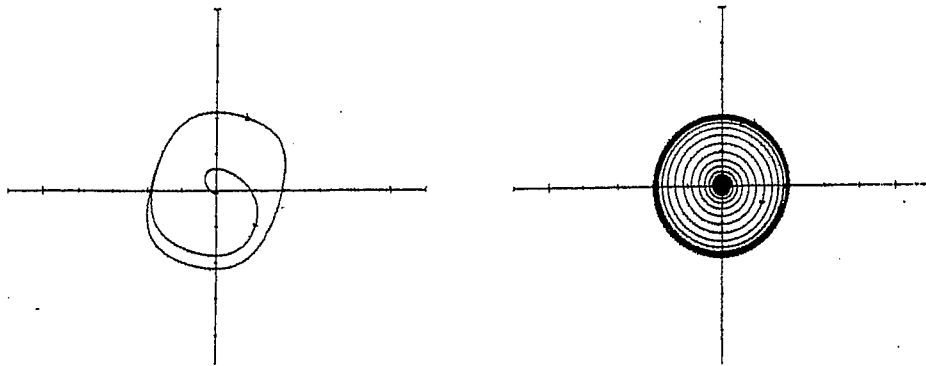


FIGURA 1. Il ciclo limite per l'equazione di van der Pol per $\mu = 1$ e $\mu = 0, 1$.

La figura qui sopra mostra il ciclo limite per l'equazione di van der Pol (2) con $\mu = 1$ e $\mu = 0, 1$. Si può dimostrare che il ciclo limite di (2) è asintotico alla ^(circonferenza) ~~circonferenza~~ di raggio 2 centrata nell'origine se si pensa al limite per $\mu \rightarrow 0^+$.

ESEMPIO 1. si può verificare che le funzioni

$$F(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1}, \quad g(x) = x$$

verificano le ipotesi del teorema di Lienard.

Segue allora che il sistema (1) con queste funzioni ha esattamente un ciclo limite che è stabile. Tale ciclo limite è ~~mostrato~~ riportato in FIGURA 3.

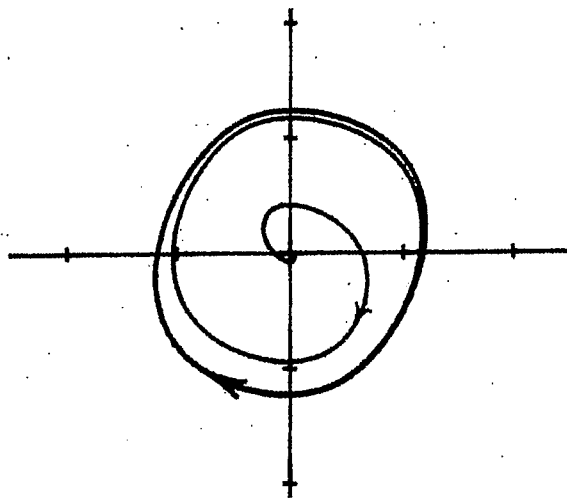


FIGURA 2. Il ciclo limite per il sistema di Lienard dell'esempio 1.

TEOREMA 2 (Zhang 1958). Siano $a < 0, b > 0, F, g \in C^1(a, b)$.

Supponiamo $x g(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$. Indichiamo con

$$G(x) = \int_0^x g(s) ds, \quad f(x) = F'(x).$$

Assumiamo inoltre che

i) se $a = -\infty$, allora $G(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow -\infty$

ii) se $b = \infty$, allora $G(x) \rightarrow \infty$ per $x \rightarrow +\infty$.

Supponiamo poi che $\frac{f(x)}{g(x)}$ sia monotona crescente su $(a, 0) \cup (0, b)$ e mai sia costante in nessun intorno di $x = 0$.

Allora il sistema (1) ha al più un ciclo limite nella regione $a < x < b$ che, se esiste, risulta stabile.

TEOREMA 3 (Zhang, 1981). Supponiamo che $g(x) = x$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $f(x)$ sia una funzione pari che ammetta esattamente due zeri positivi $a_1 < a_2$ con $F(a_1) > 0$ ed $F(a_2) < 0$ ed $f(x)$ sia monotona crescente per $x > a_2$. Allora il sistema (1) ha al più due cicli limite.

ESEMPIO 2. Si consideri il sistema di Lienard (1) con $g(x) = x$ ed $f(x) = \frac{8}{5}x^4 - 4x^2 + \frac{4}{5}$. Non è difficile verificare che le ipotesi del teorema 3 sono verificate. Segue allora che il sistema (1) con g ed F , $F(0) = 0$, ha al più due cicli limite. In effetti tale sistema ha esattamente due cicli limite (come vedremo con il teorema 6).

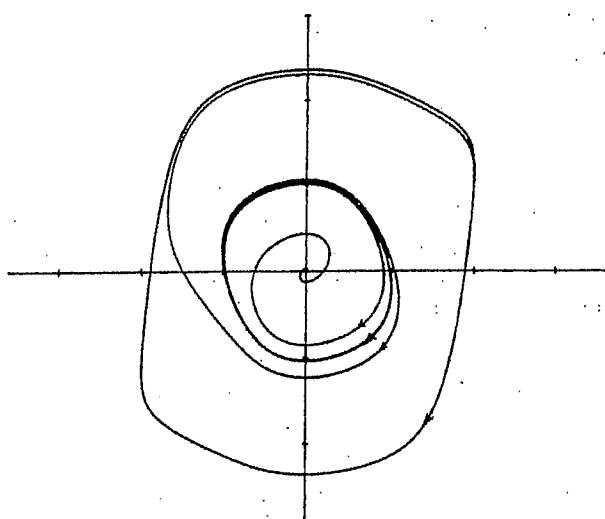


FIGURA 3. I due cicli limite del sistema di Lienard dell'esempio 2.

Ovviamente più siamo specifici per le funzioni $F(x)$ e $g(x)$ in (1) e più potremo essere precisi sul numero di cicli limite che ha (1).

Per esempio, se $g(x) = x$ e $F(x)$ è polinomiale abbiamo i seguenti risultati.

TEOREMA 4 (Lins, de Melo e Pugh). Il sistema (1) con

$$\begin{cases} g(x) = x \\ F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \end{cases}$$

con $a_1, a_3 < 0$ ha esattamente un ciclo limite. Esso è stabile per $a_1 < 0$ e instabile per $a_1 > 0$.

OSSERVAZIONE. Rychkov ha dimostrato che il sistema (1) con

$$\begin{cases} g(x) = x \\ F(x) = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 \end{cases}$$

ha al più due cicli limite.

Nel paragrafo 3.4 ~~ha~~ abbiamo detto che da un fuoco multiplo di molteplicità m si possono far biforcare m cicli limite. Tale concetto viene discusso nel paragrafo 4.3. I cicli limite che si biforcano da un fuoco multiplo sono detti cicli limite locali.

TEOREMA 5 (Blows e Lloyd). Il sistema (1) con $g(x) = x$ e $F(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2m+1} x^{2m+1}$ ha al più m cicli limite locali ed esistono coefficienti $a_1, a_3, \dots, a_{2m+1}$ di segno alterno per cui (1) ha esattamente m cicli limite.

TEOREMA 6 (PERKO). Per $\varepsilon \neq 0$ sufficientemente piccolo il sistema (1) con $g(x) = x$ ed $F(x) = \varepsilon [a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2m+1} x^{2m+1}]$ ha al più m cicli limite. Inoltre, per $\varepsilon \neq 0$ sufficientemente piccolo, tale sistema ha esattamente m cicli limite che sono asintotici alle circonferenze di raggio r_j , $j = 1, \dots, m$ centrate nell'origine per $\varepsilon \rightarrow 0^{+++}$ se e solo se l'equazione di grado m

$$\frac{a_1}{2} + \frac{3}{8} a_3 \rho + \frac{5}{16} a_5 \rho^2 + \frac{35}{128} a_7 \rho^3 + \dots + \binom{2m+2}{m+1} \frac{a_{2m+1}}{2^{2m+2}} \rho^m = 0 \quad (3)$$

ha m radici positive $\rho = r_j^2$, $j = 1, \dots, m$.

ESEMPIO 3. Il teorema 6 ci permette di costruire sistemi polinomiali con un numero di cicli limite a nostro piacere.

Per esempio supponiamo di voler trovare un sistema polinomiale della forma prevista nel teorema 6 e che abbia due cicli limite asintotici alle circonferenze di raggio $r=1$ ed $r=2$.

Per fare ciò partiamo dal polinomio $(\rho-1)(\rho-4)$ e lo poniamo uguale al polinomio dell'equazione (3) con $m=2$ in modo da determinare i coefficienti a_1, a_3, a_5 :

$$\rho^2 - 5\rho + 4 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{8} a_3 \rho + \frac{5}{16} a_5 \rho^2$$

Si ottiene che $a_5 = \frac{16}{5}$, $a_3 = -\frac{40}{3}$, $a_1 = 8$. Per $\varepsilon \neq 0$ sufficientemente piccolo, il teorema 6 implica allora che il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left(8x - \frac{40}{3} x^3 + \frac{16}{5} x^5 \right) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

abbia esattamente due cicli limite.

Per $\varepsilon = \frac{1}{100}$ tali cicli limite sono riportati in Figura 4.

Essi sono in tal caso molto prossimi alle circonferenze di raggio $r=1$ ed $r=2$. Per $\varepsilon = \frac{1}{10}$ tali cicli limite sono ~~non~~ riportati nella precedente Figura 3. Essi non sono più vicini alle due circonferenze di raggio $r=1$ ed $r=2$. ~~stessa~~

Termini più arbitrari come $a_2 x^2$ e $a_4 x^4$ possono essere aggiunti per tale sistema al termine dove compare la ε senza modificare i risultati relativi al numero ed alla geometria dei cicli limite di questo esempio.

3.9 CRITERI DI BENDIXSON

Il teorema di Liénard e gli altri teoremi del paragrafo precedente stabiliscono l'esistenza di esattamente uno oppure esattamente m cicli limite per certi sistemi 2×2 . I criteri di Bendixson stabilisce le condizioni sotto cui il sistema 2×2

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

con $f = (P, Q)^T$ ed $x = (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ non ha cicli limite.

Al fine di determinare il ritratto di fase globale di un sistema dinamico 2×2 , è necessario determinare il numero di cicli limite attorno ad ogni punto critico del sistema.

Purtroppo in generale non sarà possibile determinare esattamente il numero di cicli limite di un sistema 2×2 e questo rimane oggi il problema più difficile per i sistemi 2×2

TEOREMA (CRITERI DI BENDIXSON)

Sia $f \in C^1(E)$, dove $E \subset \mathbb{R}^2$ è un dominio semplicemente connesso. Se la divergenza di f non è identicamente nulla e non cambia segno dentro E , allora (1) non ha orbite chiuse che appartengono ad E .

CAPITOLO 4. SISTEMI NON LINEARI: TEORIA DELLA BIFORCAZIONE

Nel capitolo 2 e 3 abbiamo studiato la teoria locale e globale dei sistemi non lineari di equazioni differenziali delle forme

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

con $f \in C^1(E)$ ed $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. In questo capitolo affrontiamo la questione di come il comportamento qualitativo di (1) cambia quando cambiamo la funzione f in (1).

Se il comportamento qualitativo rimane lo stesso per tutti i campi vettoriali vicini, allora il sistema (1) e il campo vettoriale f sono detti strutturalmente stabili. L'idea della stabilità strutturale ha origine con Andronov e Pontryagin nel 1937.

Il loro lavoro sui sistemi 2×2 si è completato con il teorema di Peixoto che caratterizza completamente i campi vettoriali strutturalmente stabili su una varietà compatta 2-dimensionale. Purtroppo non vi è un risultato altrettanto completo in dimensione più alta ($n \geq 3$). Se il campo vettoriale $f \in C^1(E)$ non è strutturalmente stabile, esso appartiene all'insieme di biforcazione di $C^1(E)$. La struttura qualitativa dell'insieme soluzione o del ritratto di fase globale di (1) cambia appena il campo vettoriale f attraversa un punto nell'insieme di biforcazione. In questo capitolo studiamo vari tipi di biforcazioni che capitano a ~~una~~ sistemi di classe C^1 del tipo

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (2)$$

dipendenti da un parametro $\mu \in \mathbb{R}$. In particolare studiamo le biforcazioni nei punti di equilibrio non iperbolici e nelle orbite periodiche che includono biforcazioni di orbite periodiche da punti di equilibrio non iperbolico. Questi tipi di biforcazione sono dette biforcazioni locali visto che noi focalizzeremo l'attenzione sui cambiamenti che prendono luogo vicino al punto di equilibrio o all'orbita periodica. Noi consideriamo anche biforcazioni globali come biforcazioni di lacci omoclini.

Questo capitolo fornisce solo un'introduzione alla teoria della biforcazione e ai tipi più semplici di biforcazione di codimensione uno che si hanno in sistemi del tipo (2).

4.1 STABILITA' STRUTTURALE E TEOREMA DI PEIXOTO

In questo paragrafo introduciamo il concetto di campo vettoriale (o sistema dinamico) strutturalmente stabile e diamo condizioni necessarie e sufficienti per un campo vettoriale f di classe C^1 su una varietà compatta 2-dimensionale per essere strutturalmente stabile. L'idea della stabilità strutturale ha avuto origine da un lavoro di Andronov e Pontryagin del 1937. Diciamo che f è strutturalmente stabile se per ogni campo vettoriale g vicino ad f i vettori f e g sono topologicamente equivalenti (in base alla definizione 2 del paragrafo 3.1).

L'unico concetto di cui abbiamo bisogno per rendere precisa la definizione di stabilità strutturale è cosa si intende per campi vettoriali di classe C^1 f e g vicini.

Se $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto, allora per norma C^1 di f intendiamo

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in E} |f(x)| + \sup_{x \in E} \|Df(x)\|,$$

dove con $|\cdot|$ indichiamo la norma euclidea su \mathbb{R}^n mentre con $\|\cdot\|$ la norma usuale della matrice $Df(x)$ così come definite nel paragrafo 1.3. La funzione $\|\cdot\|_1 : C^1(E) \rightarrow \mathbb{R}$ ha tutte le proprietà di una norma (riportate sempre nel paragrafo 1.3). L'insieme delle funzioni $C^1(E)$, con la norma C^1 , costituisce uno spazio di Banach, vale a dire uno spazio ^{vettoriale} normato completo. Useremo la norma C^1 per misurare la distanza tra due funzioni di $C^1(E)$. Se K è un compatto di E , allora la norma C^1 di f su K è definita da

$$\|f\|_1 = \max_{x \in K} |f(x)| + \max_{x \in K} \|Df(x)\| < +\infty$$

DEFINIZIONE 1. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Un campo vettoriale $f \in C^1(E)$ è strutturalmente stabile se $\exists \varepsilon > 0$ t. c. $\forall g \in C^1(E)$ con

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon,$$

allora f e g sono topologicamente equivalenti su E , ossia esiste un omeomorfismo che conserva l'orientazione $H: E \rightarrow E$ che manda traiettorie di

$$\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

su traiettorie di

$$\dot{x} = g(x), \quad (2')$$

In tal caso diremo che il sistema dinamico (2) è strutturalmente stabile. Se un campo vettoriale $f \in C^1(E)$ non è strutturalmente stabile, allora f è detto strutturalmente instabile.

Inizialmente si pensava che la stabilità strutturale fosse tipica di tutti i sistemi dinamici che modellizzano problemi fisici. Si consideri, per esempio, un pendolo smorzato. Se la massa, lunghezza o attrito nel pendolo variano di una quantità sufficientemente piccola ϵ , il comportamento qualitativo delle soluzioni rimane invariato: vale a dire che i ritratti di fase globali dei due sistemi (2) e (2') che modellizzano i due pendoli saranno topologicamente equivalenti. Perciò, il sistema dinamico (2) che modellizza il ~~modello fisico~~ sistema fisico costituito da un pendolo smorzato è strutturalmente stabile. D'altra parte, il sistema dinamico che modellizza il pendolo ideale (senza attrito) dell'esempio 1 del paragrafo 2.12 è strutturalmente instabile visto che l'aggiunta di una ~~qual~~ ~~si~~ ~~voglio~~ attrito (ossia smorzamento) cambierà il moto periodico senza attrito visto nelle figura 1 del paragrafo 2.12. Vale a dire che i centri della figura 1 diverranno fuochi ~~instabili~~.

Naturalmente, un pendolo senza attrito non è realizzabile fisicamente. Se dovessimo solo considerare problemi fisici che conducono a sistemi di equazioni differenziali in \mathbb{R}^2 , allora non dovremmo temere sulla ~~stabilità~~ ~~da~~ variazioni arbitrariamente piccole nel modello che porta a un comportamento qualitativamente differente del sistema.

Esistono comunque sistemi in dimensioni più alte (con $n \geq 3$) che sono modelli realistici per certi problemi fisici (come il problema dei tre corpi) che risultano strutturalmente instabili.

Definiamo ora cosa si intende per campo vettoriale strutturalmente stabile su una varietà compatta n -dimensionale M : se f è un campo vettoriale C^1 su una varietà differenziabile compatta n -dimensionale, allora per ogni atlante (finito) $\{U_j, h_j\}_{j=1, \dots, m}$ di M definiamo la norma C^1 di f su M come

$$\|f\|_1 = \max_j \|f_j\|_1$$

dove $f_j: V_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ e per $j=1, \dots, m$, $V_j = h_j(U_j) \subset \mathbb{R}^n$ come nel paragrafo 3.10. Si osservi che per atlanti differenti per M otteniamo norme diverse su $C^1(M)$; d'altra parte tutte queste norme saranno equivalenti. Ricordiamo che due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ su uno spazio vettoriale L si dicono equivalenti se esistono $A, B > 0$ t.c.

$$A\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq B\|x\|_a \quad \forall x \in L.$$

Perciò le tipologie che si ottengono su $C^1(M)$ saranno equivalenti. Diciamo che due campi vettoriali $f, g \in C^1(M)$ sono topologicamente equivalenti su M se vi è un omeomorfismo che conserva l'orientazione $H: M \rightarrow M$ che manda traiettorie di (2) su M in traiettorie di (2') su M .

DEFINIZIONE 2. Sia f un campo vettoriale C^1 su una varietà M compatta ~~di~~ n dimensionale differenziabile. Allora $f \in C^1(M)$

è strutturalmente stabile su M se $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $\forall g \in C^1(M)$ con

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon$$

si ha g topologicamente equivalente ad f .

ESEMPIO 1. Il campo vettoriale

$$f(x) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

su \mathbb{R}^2 non è strutturalmente stabile. Per vederlo, sia K un compatto di \mathbb{R}^2 che contiene l'origine ed il suo interno e dimostriamo che f non è strutturalmente stabile su K . Sia $\|\cdot\|_1$ la norma C^1 su K e definiamo il campo vettoriale

$$g(x) = \begin{pmatrix} -y + \mu x \\ x + \mu y \end{pmatrix}$$

Allora

$$\|f - g\|_1 = |\mu| (|x| + 1)$$

e se d è il diametro di K (ovvero $d = \max_{x \in K} |x|$),

segue ~~che~~ $\forall \varepsilon > 0$ che se scegliamo $|\mu| = \frac{\varepsilon}{d+2}$, allora

$$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

Il ritratti di fase per il sistema $\dot{x} = g(x)$ sono riportati in FIGURA 1. Chiaramente f non è topologicamente equivalente a g . Perciò f non è strutturalmente stabile su \mathbb{R}^2 . Il valore $\mu = 0$ è detto un valore di biforcazione per il sistema $\dot{x} = g(x)$.

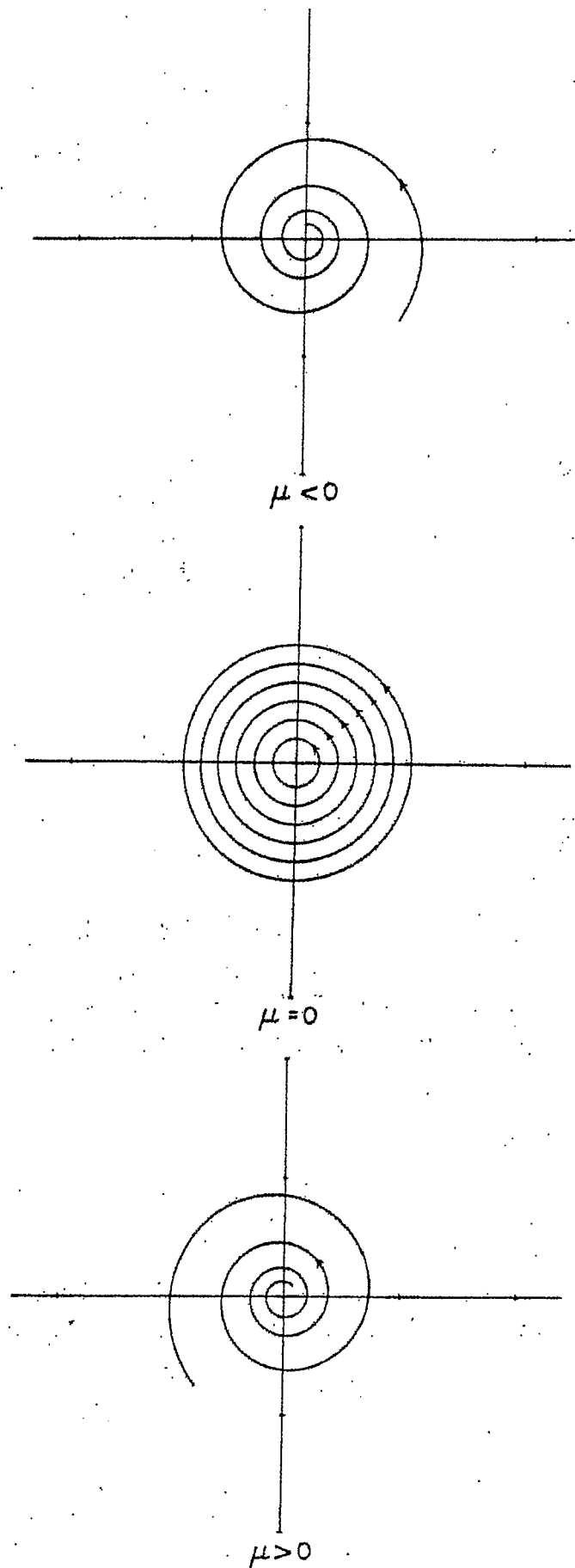


FIGURA 1. Ritratti di fase per il sistema $\dot{x} = g(x)$ dell'esempio 1.

ESEMPIO 2. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)^2 \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)^2 \end{cases}$$

è strutturalmente instabile su ogni compatto $K \in \mathbb{R}^2$ che contiene al suo interno il cerchio unitario centrato nell'origine. Questo lo si vede considerando il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu] \\ \dot{y} = x + y[(x^2 + y^2 - 1)^2 - \mu] \end{cases}$$

che è ε -vicino al sistema precedente se $|\mu| = \frac{\varepsilon}{d+2}$ dove d è il diametro di K .

Riscrivendo tale sistema in coordinate polari si ha

$$\begin{cases} \dot{r} = r[(r^2 - 1)^2 - \mu] \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Perciò si hanno i ritratti di fase riportati in FIGURA 2.

Il sistema precedente con $\mu=0$ è strutturalmente instabile.

Il numero $\mu=0$ è detto un valore di biforcazione per il sistema precedente e per $\mu=0$ tale sistema ha un ciclo limite di molteplicità due rappresentato da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

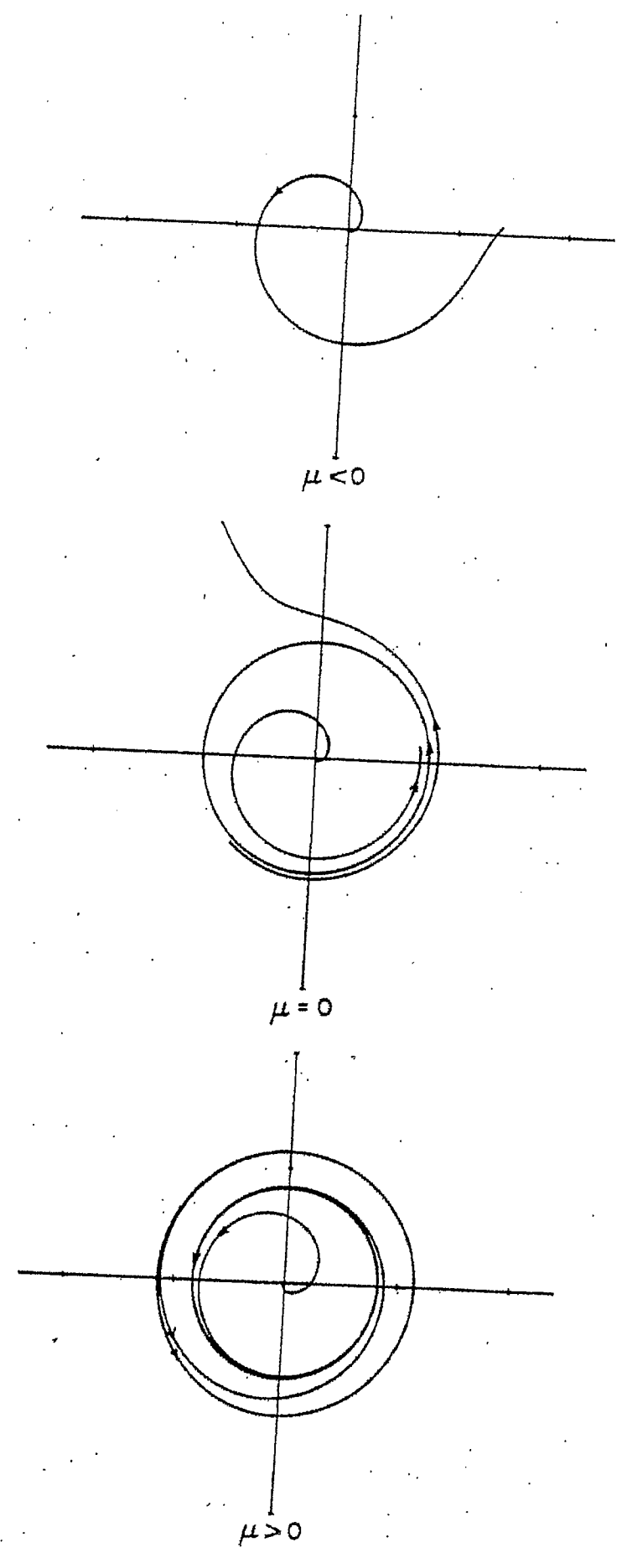


FIGURA 2. Ritratti di fase per il sistema dell'esempio 2

Si osservi che per $\mu=0$ l'origine è un punto critico non iperbolico per il sistema dell'esempio 1 e $\gamma(t)$ è un ciclo limite non iperbolico del sistema dell'esempio 2. In generale, i sistemi dinamici con punti di equilibrio non iperbolico e/o con orbite periodiche non iperboliche non sono strutturalmente stabili. Ciò non vuol dire che sistemi dinamici che presentano solo punti di equilibrio iperbolici e orbite periodiche iperboliche sono strutturalmente stabili.

Prima di caratterizzare i sistemi 2×2 strutturalmente stabili, riportiamo alcuni risultati sulla persistenza dei punti di equilibrio iperbolici e le orbite periodiche iperboliche.

TEOREMA 1. Sia $f \in C^1(E)$ dove $E \subset \mathbb{R}^n$ sia un aperto che contiene un punto critico iperbolico di (2). Allora $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall g \in C^1(E)$ con

$$\|f - g\|_1 < \delta$$

esiste $y_0 \in N_\epsilon(x_0)$ per cui y_0 è un punto di equilibrio iperbolico di (2'). Inoltre $Df(x_0)$ e $Dg(y_0)$ hanno lo stesso numero di autovalori con parti reali negative e positive.

TEOREMA 2. Sia $f \in C^1(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto contenente un'orbita periodica iperbolica Γ di (2). Allora $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall g \in C^1(E)$ con

$$\|f - g\|_1 < \delta$$

esiste un'orbita periodica iperbolica Γ' di (2') contenuta in un ϵ intorno di Γ . Inoltre le varietà stabili $W^s(\Gamma)$ e ~~W^s(\Gamma')~~

$W^S(\Gamma')$ e le varietà instabili $W^I(\Gamma)$ e $W^I(\Gamma')$ hanno le stesse dimensioni.

Un altro risultato importante per sistemi n -dimensionali è che il sistema lineare

$$\dot{x} = Ax$$

dove A non ha autovalori con parte ^{reale} nulla è strutturalmente stabile in \mathbb{R}^n . ~~Altra~~ Oltre ai punti di equilibrio non iperbolici e alle orbite periodiche, vi sono due altri tipi di comportamento che possiamo ritrovare nei sistemi strutturalmente instabili su varietà 2-dimensionali. Illustriamo tali comportamenti ~~con~~ attraverso qualche esempio

ESEMPIO 3. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu y + x - x^3 \end{cases}$$

Per $\mu = 0$ questo è un sistema hamiltoniano con hamiltoniana

$$H(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \frac{1}{4}x^4$$

Le curve di livello per tale funzione sono mostrate in FIGURA 3. Si vede che per $\mu = 0$ vi sono due centri in $(\pm 1, 0)$ e due separatrici che includono tali centri. Per $\mu = 0$ tale sistema è strutturalmente instabile su ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^2$ contenente il cerchio di centro l'origine e raggio 2 in quanto il sistema è ε -vicino al sistema con $\mu = 0$ se $|\mu| = \frac{\varepsilon}{d+2}$, dove d è il diametro di K .

Chiaramente il sistema precedente, per $\mu \neq 0$, non è topologicamente equivalente al sistema con $\mu = 0$.

In tale esempio non solo il comportamento qualitativo vicino i punti di equilibrio non ipobolici $(\pm 1, 0)$ cambia al variare di μ vicino a $\mu = 0$, ma non vi sono cicli separatori per $\mu \neq 0$.

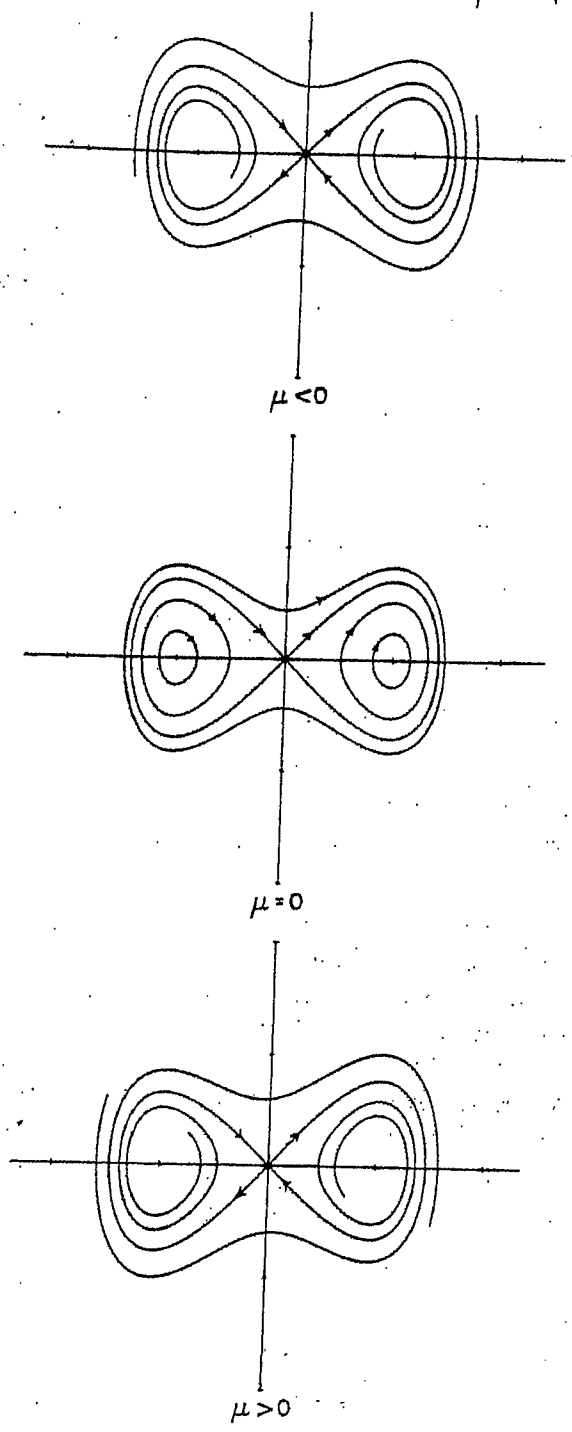


FIGURA 3, ritratti di fase per il sistema dell'esempio 3.

DEFINIZIONE 3. Un punto $x \in E$ (o $x \in M$) è un punto non emanante del flusso ϕ_t definito da (2) se per ogni intorno U di x e $\forall T > 0$ esiste $t > T$ t.c.

$$\phi_t(U) \cap U \neq \emptyset$$

Un insieme Ω non emanante del flusso ϕ_t è l'insieme di tutti i punti di ϕ_t in E non emananti (o in M). Ogni ~~altro~~ punto $x \in E \setminus \Omega$ (o in $M \setminus \Omega$) è detto punto emanante di ϕ_t .

I punti di equilibrio e i punti sulle orbite periodiche sono esempi di punti non emananti di un flusso e, per un flusso piano, gli unici punti non emananti sono i punti critici, i punti sui cicli e i punti sui cicli separatori polacentrici. Questo non è vero in generale. ~~come mostra il prossimo esempio~~

Enunciamo ora un teorema che caratterizza la stabilità strutturale per campi vettoriali C^1 su una varietà M compatta, 2-dimensionale differenziabile.

TEOREMA di PEIXOTO (1962). Sia f un campo vettoriale C^1 su una varietà M differenziabile, compatta 2-dimensionale. Allora f è strutturalmente stabile su M e ~~solo~~ se

- i) il numero di punti critici e di cicli è finito e sono tutti iperbolici;
- ii) non vi sono traiettorie che connettono punti di selle;
- iii) l'insieme non emanante Ω consiste soltanto di punti critici e di cicli limite.

Inoltre, se M è orientabile, l'insieme dei campi vettoriali strutturalmente stabili in $C^1(M)$ è un sottoinsieme di $C^1(M)$ aperto e denso.

4.2 BIFORCAZIONI NEI PUNTI DI EQUILIBRIO NON IPERBOLICI

A inizio capitolo abbiamo detto che il comportamento qualitativo dell'insieme soluzione di un sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1)$$

in funzione di un parametro $\mu \in \mathbb{R}$ cambia quando il campo vettoriale f passa attraverso un punto dell'insieme di biforcazione o quando il parametro μ attraversa un valore di biforcazione μ_0 .

Un valore μ_0 del parametro μ nell'equazione (1) per cui il campo vettoriale $f(x, \mu_0)$ di classe C^1 non è strutturalmente stabile è detto un valore di biforcazione. In tutto il paragrafo assumeremo che $f \in C^1(E \times J)$, dove E è un aperto di \mathbb{R}^n e $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo.

Iniziamo lo studio delle biforcazioni di campi vettoriali del tipo più semplice di biforcazioni che si presenteranno nei sistemi dinamici; vale a dire il caso delle biforcazioni nei punti di equilibrio non iperbolico. Infatti, iniziamo con il discutere vari tipi di punti critici per sistemi uno-dimensionali:

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1')$$

con $x \in \mathbb{R}$ e $\mu \in \mathbb{R}$. I tre tipi più semplici di biforcazione che si presentano in un punto critico non iperbolico di (1') sono illustrati negli esempi che seguono.

ESEMPIO 1. Si consideri il sistema uno-dimensionale

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

Per $\mu > 0$ vi sono due punti critici in $x = \pm \sqrt{\mu}$. Si ha $Df(x, \mu) = -2x$, $Df(\pm \sqrt{\mu}, \mu) = \mp 2\sqrt{\mu}$. Si vede che il punto critico in $x = \sqrt{\mu}$ è

stabile mentre il punto critico in $x = -\sqrt{\mu}$ è instabile. Per $\mu = 0$, vi è un solo punto critico in $x = 0$ ed è un punto critico non iperbolico visto che $D_x f(0,0) = 0$. Il campo vettoriale $f(x) = -x^2$ è strutturalmente instabile; $\mu = 0$ è un valore di biforcazione. Per $\mu < 0$ non vi sono punti critici. Il ritratto di fase per tale equazione differenziale è riportato in FIGURA 1

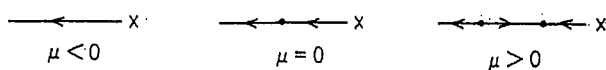


FIGURA 1. I ritratti di fase per l'equazione differenziale dell'esempio 1.

Per $\mu > 0$ le varietà uno-dimensionali stabili ed instabili per l'equazione differenziale dell'esempio 1 sono dati da $W^s(\sqrt{\mu}) = (-\sqrt{\mu}, \infty)$ e $W^u(-\sqrt{\mu}) = (-\infty, \sqrt{\mu})$. Per $\mu = 0$ la varietà centrale uno-dimensionale è data da $W^c(0) = (-\infty, +\infty)$. Tutte le informazioni pertinenti che riguardano la biforcazione che si ha in questo sistema per $\mu = 0$ sono riportate nel diagramma di biforcazione mostrato in FIGURA 2. La curva $\mu - x^2 = 0$ determina la posizione dei punti critici del sistema: una curva continua è stata usata per indicare una famiglia di punti critici stabili mentre una curva tratteggiata viene usata per indicare una famiglia di punti critici instabili. Tale tipo di biforcazione è detta biforcazione sella-nodo.

ESEMPIO 2. Si consideri il sistema uno-dimensionale

$$\dot{x} = \mu x - x^2.$$

I punti critici sono in $x=0$ e $x=\mu$. Per $\mu=0$ vi è un solo punto critico in $x=0$ che è non iperbolico dato che $D_x f(0,0)=0$. Il campo vettoriale $f(x)=-x^2$ è strutturalmente instabile. Il valore $\mu=0$ è un valore di biforcazione. Il ritratto di fase per tale equazione differenziale è riportata in FIGURA 3.

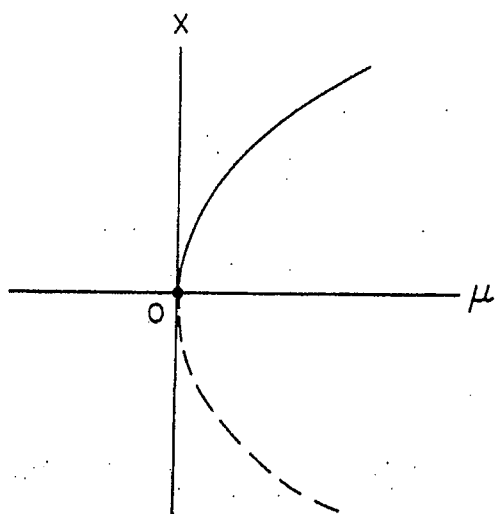


FIGURA 2. Il diagramma di biforcazione per la biforcazione sella-nodo dell'esempio 1

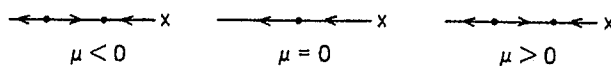


FIGURA 3. I ritratti di fase per l'equazione differenziale dell'esempio 2.

Per $\mu=0$ si ha $W^c(0) = (-\infty, \infty)$; il diagramma di biforcazione è riportato in FIGURA 4. Si vede che vi è un cambio di stabilità che si ha ~~nei~~ nei punti critici di tale sistema nel valore di biforcazione $\mu=0$. Tale tipo di biforcazione è detta una biforcazione transcritica.

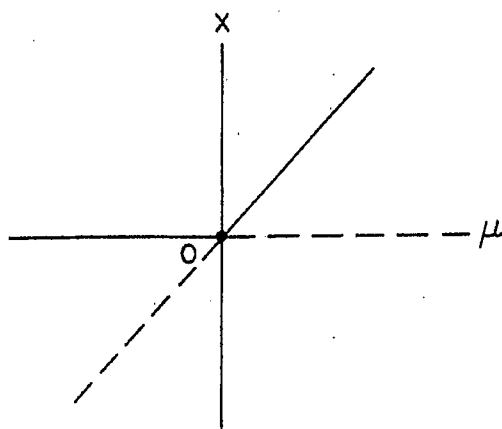


FIGURA 4. Il diagramma di biforcazione per la biforcazione transcritica dell'esempio 2.

ESEMPIO 3. si consideri il sistema uno-dimensionale

$$\dot{x} = \mu x - x^3.$$

Per $\mu > 0$ vi sono punti critici in $x=0$ e $x = \pm \sqrt{\mu}$. Per $\mu < 0$, $x=0$ è l'unico punto critico. Per $\mu=0$ vi è un punto critico non iperbolico in $x=0$ visto che $D_x f(0,0) = 0$. Il campo vettoriale $f(x) = -x^3$ è strutturalmente instabile: $\mu=0$ è un valore di biforcazione. I ritratti di fase sono riportati in FIGURA 5. Per $\mu < 0$ si ha $W^s(0) = (-\infty, \infty)$. Comunque per $\mu=0$ si ha $W^s(0) = \emptyset$ e $W^c(0) = (-\infty, \infty)$. Il diagramma di biforcazione è riportato in FIGURA 6 e tale tipo di biforcazione è detta biforcazione a focare.



FIGURA 5. I ritratti di fase per l'equazione differenziale dell'esempio 3.

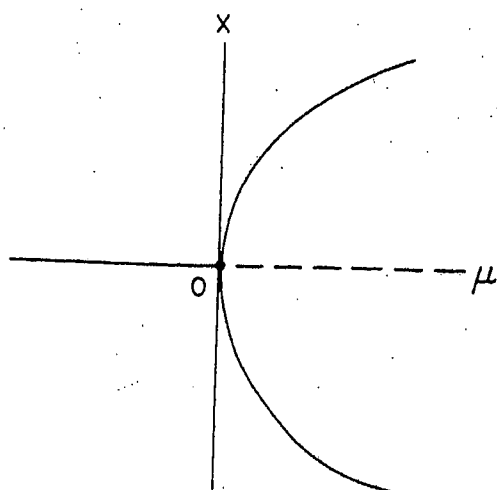


FIGURA 6. Il diagramma di biforcazione per la biforcazione a forcone dell'esempio 3.

Mentre la sella-nodo, le biforcazioni transcriticali e a forcone degli esempi 1-3 illustrano i tipi più importanti di biforcazioni che si presentano per i sistemi uno-dimensionali, vi sono certamente molti altri tipi di biforcazioni che si possono presentare per sistemi uno-dimensionali. Se $D_x f(0,0) = \dots = D^{(m-1)} f(0,0) = 0$ e $D^m f(0,0) \neq 0$, allora il sistema uno-dimensionale (1') ~~ha~~ si dice che ha un punto critico di molteplicità m in $x=0$. In tal caso si può far biforcare m punti critici dall'origine e vi è una biforcazione che causa esattamente m punti critici che si biforcano dall'origine. Nel valore di biforcazione $\mu=0$, l'origine è un punto critico di molteplicità due negli esempi 1 e 2; nell'esempio 3 è un punto critico di molteplicità tre.

Se $f(x_0, \mu_0) = 0$, $Df(x_0, \mu_0) = 0$, allora x_0 è un punto critico non iperbolico e μ_0 è un valore di biforcazione.

In tal caso, il tipo di biforcazione che si presenta nel punto critico $x=x_0$ nel valore di biforcazione $\mu=\mu_0$ nel sistema uno-dimensionale (1) è determinato da quelli delle derivate di ordine più alto

$$\frac{\partial^m f(x_0, \mu_0)}{\partial x^j \partial \mu^k}$$

con $m \geq 2$ si annulla. Ciò è vero anche per sistemi (1) di dimensioni più alte e abbiamo il teorema di Sotomayor che segue.

Si assume $f(x, \mu)$ sufficientemente differenziabile in modo che tutte le derivate che intervengono risultino continue su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Usiamo $D_x f$ per indicare la matrice delle derivate parziali di f rispetto a x e f_μ per le derivate parziali rispetto a μ .

TEOREMA DI SOTOMAYOR (1976). Supponiamo che $f(x_0, \mu_0) = 0$ e che la matrice $A \equiv D_x f(x_0, \mu_0)$ abbia un autovalore semplice $\lambda = 0$ con autovettore v e che A^T abbia un autovettore w corrispondente all'autovalore $\lambda = 0$. Inoltre, supponiamo che A abbia k autovalori con parte reale negativa ed $(n-k-1)$ autovalori con parte reale positiva e che valgano le seguenti condizioni aggiuntive

$$w^T f_\mu(x_0, \mu_0) \neq 0, \quad w^T [D_x^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] \neq 0 \quad (2)$$

Allora ~~esiste~~ una curva regolare di punti di equilibrio di (1) in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ che passano per (x_0, μ_0) e tangente all'iperpiano $\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\}$. In base al segno delle espressioni in (2), non vi sono punti di equilibrio di (1) vicino a x_0 per $\mu < \mu_0$ (o per $\mu > \mu_0$) e due punti di equilibrio di (1) vicino a x_0 quando $\mu > \mu_0$ (o quando $\mu < \mu_0$).

I due punti di equilibrio di (1) vicino x_0 sono iperbolici e hanno varietà stabili k -dimensionali e $(k+1)$ -dimensionali rispettivamente. Vale a dire che il sistema (1) presenta una biforcazione sella-nodo nel punto di equilibrio x_0 quando il parametro μ attraversa il valore di biforcazione $\mu = \mu_0$. L'insieme dei campi vettoriali C^{∞} ^{o C^k} soddisfa la condizione precedente e' un sottoinsieme aperto e denso di C^{∞} e si tratta di campi vettoriali ed un parametro con un punto di equilibrio in x_0 che hanno un autovalore nullo.

Il diagramma di biforcazione per la biforcazione sella-nodo del teorema precedente e' dato da quello riportato in FIGURA 2 con l'asse x nella direzione dell'autovettore v .

Se le condizioni (2) sono sostituite da

$$\begin{aligned} W^T f_{\mu}(x_0, \mu_0) = 0, \quad W^T [Df_{\mu}(x_0, \mu_0)v] \neq 0 \quad \text{e} \\ W^T [D^2 f(x_0, x_0)(v, v)] \neq 0, \end{aligned} \quad (3)$$

allora il sistema (1) presenta una biforcazione transcritica nel punto di equilibrio x_0 quando il parametro μ passa del valore di biforcazione $\mu = \mu_0$ e il diagramma di biforcazione e' dato dalla FIGURA 4 con l'asse x nella direzione dell'autovettore v . Se le condizioni (2) sono sostituite da

$$\begin{aligned} W^T f_{\mu}(x_0, \mu_0) = 0, \quad W^T [Df_{\mu}(x_0, \mu_0)v] \neq 0, \\ W^T [D^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)] = 0 \quad \text{e} \quad W^T [D^3 f(x_0, \mu_0)(v, v, v)] \neq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

allora il sistema (1) presenta una biforcazione a forcone nel punto di equilibrio x_0 quando il parametro μ varia attraverso il valore di biforcazione $\mu = \mu_0$ e il diagramma di biforcazione è dato dalle FIGURA 6 con l'asse x nella direzione dell'autovettore v .

* Il teorema di Sotomayer stabilisce anche che in C^k , per campi vettoriali ~~non~~ ed un parametro con un punto di equilibrio avente un autovalore nullo, le biforcazioni sella-nodo sono generiche nel senso che ogni tale campo vettoriale può essere perturbato a una biforcazione sella-nodo. Biforcazioni transcriche e a forcone non sono generiche ~~nel senso~~ in tale senso e ^(sono richieste) ulteriori condizioni sulla famiglia ed un parametro dei campi vettoriali $f(x, \mu)$ prima che (1) possa ammettere tali tipi di biforcazione.

Il prossimo esempio sono biforcazioni sella-nodo, transcriche e a forcone nei punti critici non iperbolici dei sistemi 2×2 .

ESEMPIO 4. si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -\mu y \end{cases}$$

Nelle notazioni del teorema 1 si ha

$$A = Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f_{\mu}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v = w = (1, 0)^T, \quad w^T f_{\mu}(0,0) = 1 \quad \text{e} \quad w^T [D^2 f(0,0)(v, v)] = -2.$$

Vi è una biforcazione sella-nodo nel punto critico non iperbolico $(0,0)$ nel valore di biforcazione $\mu = 0$. Per $\mu < 0$ non vi sono

punti critici. Per $\mu = 0$ vi è un punto critico nell'origine e, in accordo con il teorema ~~2.11~~ 1 del paragrafo 2.11, si tratta di una sella-nodo. Per $\mu > 0$ vi sono due punti critici in $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$. Il punto $(\sqrt{\mu}, 0)$ è un nodo stabile e $(-\sqrt{\mu}, 0)$ è una sella. I ritratti di fase per tale sistema sono mostrati in FIGURA 7 e il diagramma di biforcazione è lo stesso riportato in FIGURA 2.

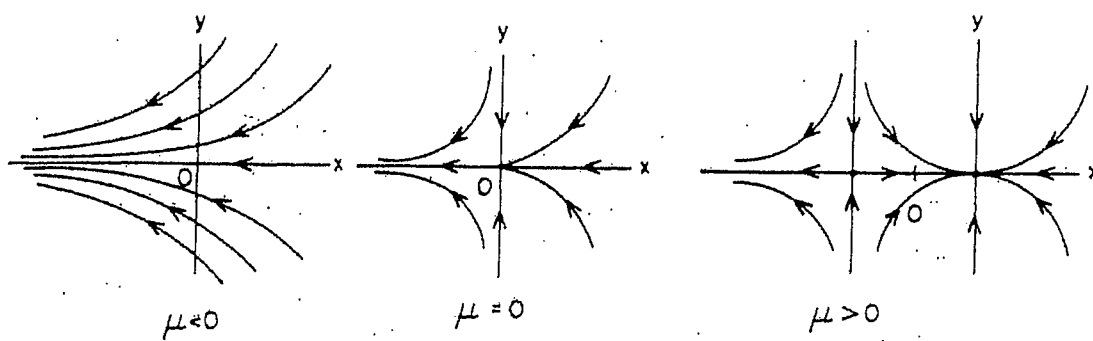


FIGURA 7. I ritratti di fase per il sistema dell'esempio 4.

Si osservi che l'asse x è nella direzione v e che si tratta di una varietà centrale analitica del punto critico non iperbolico O per $\mu = 0$.

ESEMPIO 5. Si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

che verifica la condizione (3). Vi è una biforcazione transcritica nell'origine nel valore di biforcazione $\mu = 0$. Vi sono punti

critici nell'origine e in $(\mu, 0)$. I ritratti di fase per tale sistema sono riportati in FIGURA 8. Il diagramma di biforcazione per tale esempio è lo stesso della FIGURA 4.

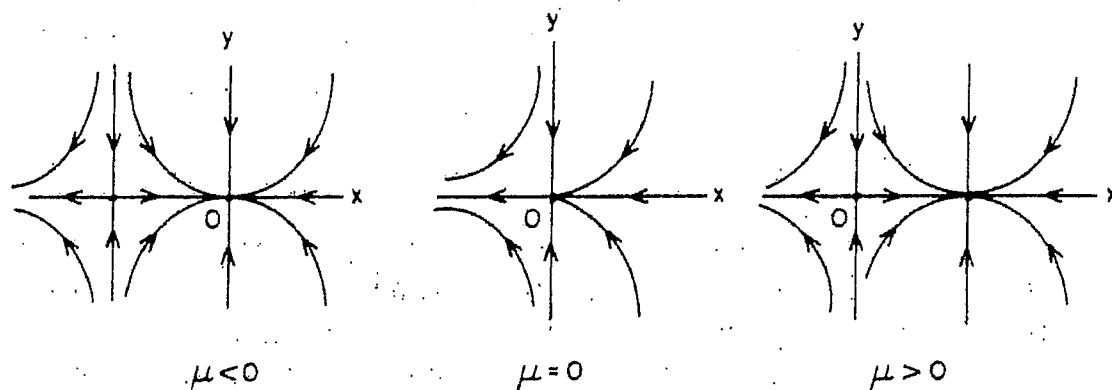


FIGURA 8. I ritratti di fase per il sistema dell'esempio 5.

ESEMPIO 6. Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

soddisfa le condizioni (4) e vi è una biforcazione a forcone in $x_0 = 0$ e $\mu_0 = 0$. Per $\mu \leq 0$ l'unico punto critico è nell'origine e per $\mu > 0$ vi sono punti critici nell'origine e in $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$. Per $\mu = 0$, il punto critico non iperbolico è un nodo in base al teorema 1 del paragrafo 2.11. I ritratti di fase per tale sistema sono mostrati in Figure 9 e il diagramma di biforcazione è lo stesso di quello mostrato in Figure 6.

Come nel caso dei sistemi uno-dimensionali, possiamo avere punti di equilibrio di molteplicità m per sistemi di dimensione più

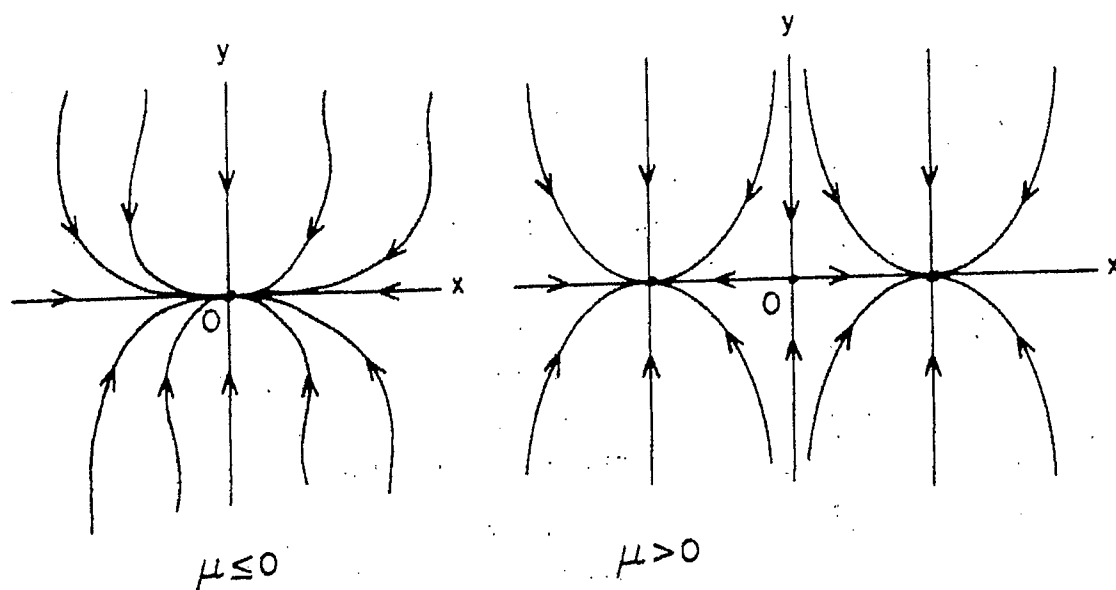


FIGURA 9. Ritratti di fase per i sistemi dell'esempio 6

alta. Un punto di equilibrio è di molteplicità m se ogni biforcazione produce al più m punti di equilibrio vicini e se vi è una perturbazione che produce esattamente m punti di equilibrio vicini. Negli esempi 4 e 5 l'origine è un punto critico di molteplicità due. Nell'esempio 6 l'origine è un punto critico di molteplicità tre.

4.3 BIFORCAZIONI DI HOPF E BIFORCAZIONI DI CICLI LIMITE DA UN FUOCO MULTIPLO

Nel paragrafo precedente abbiamo preso in considerazione vari tipi di biforcazione che si possono presentare in un punto di equilibrio x_0 di un sistema

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1)$$

al variare di un parametro $\mu \in \mathbb{R}$ quando la matrice $D_x f(x_0, \mu_0)$

ha l'autorevole $\lambda=0$ con molteplicità zero. In particolare abbiamo visto che la biforcazione sella nodo era generica.

In questo paragrafo considereremo vari tipi di biforcazione che si possono presentare quando la matrice $D_x f(x_0, \mu_0)$ ammette una coppia di autovalori immaginari puri e non ha altri autovalori con parte reale nulla. In tal caso il teorema delle funzioni implicite garantisce che per ogni μ vicino a μ_0 ci sarà un unico punto di equilibrio x_μ vicino a x_0 . Se poi gli autovalori di $Df(x_\mu, \mu)$ attraversano l'asse immaginario in $\mu = \mu_0$, allora le dimensioni delle varietà stabile e instabile di x_μ cambieranno e il ritratto di fase locale di (1) cambierà quando μ passerà attraverso il valore di biforcazione μ_0 . Nel caso generico si ha una biforcazione di Hopf ^{dove si crea} ~~generata da~~ un'orbita periodica quando ~~il sistema~~ cambia la stabilità del punto di equilibrio. Illustreremo tale idea con un semplice esempio e passeremo poi a presentare la teoria generale per i sistemi 2×2 . Discuteremo poi altri tipi di biforcazione per sistemi 2×2 : il caso di diversi cicli limite che si biforciano da un punto critico x_0 quando $Df(x_0, \mu_0)$ ha una coppia di autovalori immaginari puri.

ESEMPIO 1 (biforcazione di Hopf). Si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2) \end{cases}$$

L'unico punto critico è l'origine e si ha $\forall \mu \in \mathbb{R}$

$$D_x f(0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

Del teorema 4 del paragrafo 2.10 l'origine è un fuoco stabile o instabile di tale sistema non lineare se $\mu < 0$ oppure se $\mu > 0$ rispettivamente. Per $\mu = 0$, $Df(0, 0)$ ha una coppia di autovalori immaginari puri e dal teorema 5 del paragrafo 2.10 e dal teorema di Dulac l'origine è o un centro oppure un fuoco per tale sistema non lineare. Se poi scriviamo tale sistema in coordinate polari, si ha

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Si vede che per $\mu = 0$ l'origine è un fuoco stabile mentre per $\mu > 0$ vi è un ciclo limite stabile

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu(t) = \mu (\cos t, \sin t)^T$$

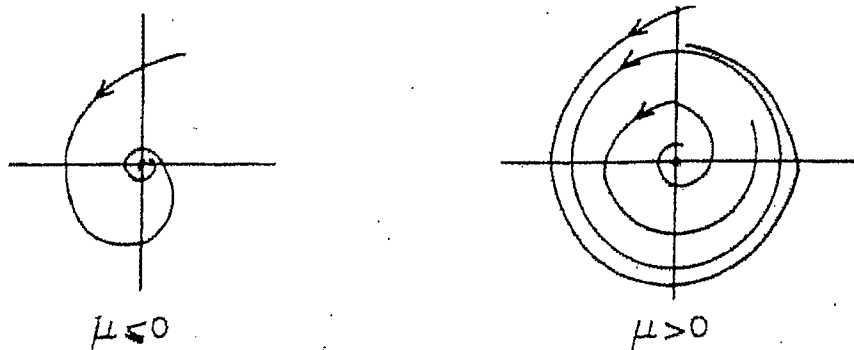


FIGURA 1. Ritratti di fase per il sistema dell'esempio 1.

Le curve Γ_μ rappresentano una famiglia ed un parametro di cicli limite per tale sistema. I ritratti di fase sono riportati in FIGURA 1

e il diagramma di biforcazione è mostrato in FIGURA 2.

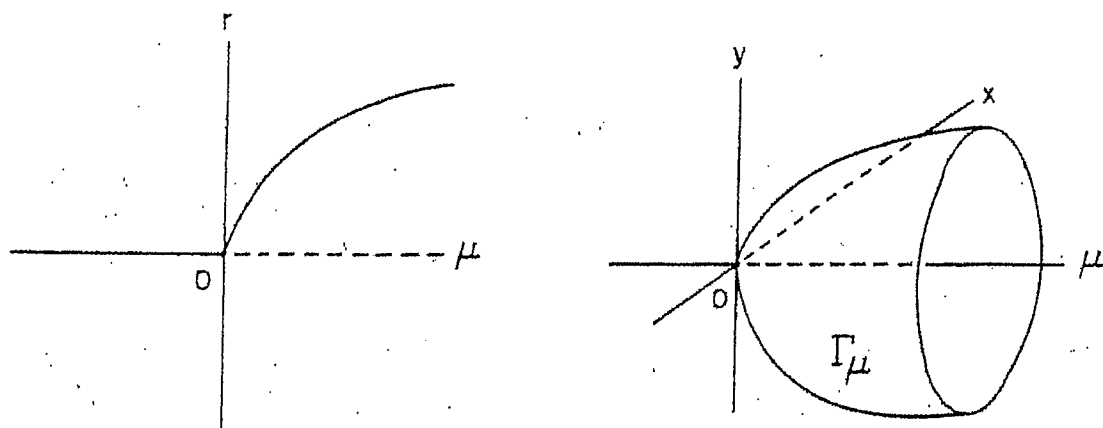


FIGURA 2. Diagramma di biforcazione e famiglia ed un parametro di cicli limite Γ_μ che si ottengono dalla biforcazione di Hopf dell'esempio 1.

La curva superiore nel diagramma di biforcazione mostrata in Figura 2 rappresenta la famiglia ed un parametro di cicli limite Γ_μ che definisce una superficie in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. La biforcazione del ciclo limite dell'origine che si presenta in corrispondenza al valore di biforcazione $\mu = 0$ quando l'origine cambia la sua stabilità è detta biforcazione di Hopf.

Si consideri adesso il sistema analitico 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + p(x, y) \\ \dot{y} = x + \mu y + q(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

dove le funzioni analitiche p e q sono date da

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = (a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2) + \\ + (a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{03} y^3) + \dots$$

e

$$q(x, y) = \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j = (b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2) + \\ + (b_{30} x^3 + b_{21} x^2 y + b_{12} xy^2 + b_{03} y^3) + \dots$$

In tal caso per $\mu = 0$ $D_x f(0,0)$ ammette una coppia di autovalori immaginari puri e l'origine è detto un fuoco debole o un fuoco multiplo. La molteplicità m di un fuoco multiplo è stata definita nel paragrafo 3.4 in termini della mappa di Poincaré $P(s)$ per il fuoco. In particolare, in base al teorema 3 del paragrafo 3.4 si ha per il sistema (2)

$$P'(0) = e^{2\mu\pi}$$

e per $\mu = 0$ si ottiene $P'(0) = 1$ ovvero $d'(0) = 0$, dove $d(s) = P(s) - s$.

Per $\mu = 0$ in (2) il numero di Lyapunov σ è dato dall'equazione (3) del paragrafo 3.4

$$\sigma = \frac{3\pi}{2} \left[3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + \right. \\ \left. + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20}) \right]. \quad (3)$$

In particolare, se $\sigma \neq 0$, allora l'origine è un fuoco debole di molteplicità uno, stabile se $\sigma < 0$ e instabile se $\sigma > 0$ e si ha una biforcazione di Hopf nell'origine nel valore di biforcazione $\mu = 0$. Vale il teorema seguente:

TEOREMA 1 (biforcazione di Hopf). Se $\sigma \neq 0$, allora vi è una biforcazione di Hopf nell'origine per il sistema analitico 2×2 nel punto di biforcazione $\mu = 0$. In particolare, se $\sigma < 0$ allora (2) ha un unico ciclo limite stabile per $\mu > 0$ e nessun ciclo limite per $\mu \leq 0$; se $\sigma > 0$ allora (2) ha un unico ciclo limite instabile per $\mu < 0$ e nessun ciclo limite per $\mu \geq 0$. Se $\sigma < 0$ i ritratti di fase locali per (2) sono topologicamente equivalenti a quelli mostrati in FIGURA 1 e vi è una superficie di orbite periodiche che ha una tangente di ordine due nell'origine di $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ con il piano (x, y) (si veda FIGURA 2).

Nel primo caso ($\sigma < 0$) nel teorema 1 - dove il punto critico produce un ciclo limite stabile quando μ cresce e passa per il valore di biforcazione $\mu = 0$ - si ha quella che viene detta una "biforcazione di Hopf supercritica" mentre nel secondo caso ($\sigma > 0$) - dove il punto critico assorbe un ciclo limite instabile quando μ cresce e passa per il valore di biforcazione $\mu = 0$ - si ha quella che viene detta una "biforcazione di Hopf subcritica".

OSSERVAZIONE 1. Per un sistema analitico 2×2 generico

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + p(x, y) \\ \dot{y} = cx + dy + q(x, y) \end{cases} \quad (2^c)$$

con $\Delta = ad - bc > 0$, $a + d = 0$ e $p(x, y)$, $q(x, y)$ date dalle serie precedenti, la matrice

$$D_{(x,y)} F(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

avrà una coppia di autovalori immaginari e l'origine sarà un fuoco debole; il numero di Lyapunov σ è allora dato dalla formula

$$\sigma = \frac{-3\pi}{2b\Delta^{3/2}} \left\{ \left[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) + b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20}) \right] + \right. \\ \left. - (a^2 + bc) \left[3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21}) \right] \right\} \quad (3')$$

Per $\sigma \neq 0$ nell'equazione (3') il teorema 1 con $\mu = a + d$ vale anche per il sistema (2').

La somma di ogni termine di grado più alto per il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y \\ \dot{y} = x + \mu y \end{cases}$$

produce una biforcazione di Hopf nell'origine per il valore di biforcazione $\mu = 0$ purché il numero di Lyapunov $\sigma \neq 0$.

L'ipotesi che f sia analitica nel teorema 1 può essere indebolita ad $f \in C^3(E \times J)$, $E \subset \mathbb{R}^2$ aperto e $J \subset \mathbb{R}$ intervallo.

Illustriamo ora l'uso delle formula (3) per il numero di Lyapunov nel determinare se una biforcazione di Hopf è supercritica o subcritica.

ESEMPIO 2. ~~Il sistema~~ Il sistema quadratico 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y + x^2 \\ \dot{y} = x + \mu y + x^2 \end{cases}$$

ha un fuoco debole di molteplicità uno nell'origine per $\mu = 0$ visto che, dall'equazione (3), il numero di Lyapunov $\sigma = -3\pi \neq 0$. Inoltre, dal momento che $\sigma < 0$, segue dal teorema 1 che dall'origine si biforca un unico ciclo limite stabile quando il parametro μ cresce e attraversa il valore di biforcazione $\mu = 0$, ovvero quando la biforcazione di Hopf è supercritica. Il ciclo limite per tale sistema con $\mu = \frac{1}{10}$ è riportato in FIGURA 3. Il diagramma di biforcazione è lo stesso riportato in FIGURA 2.

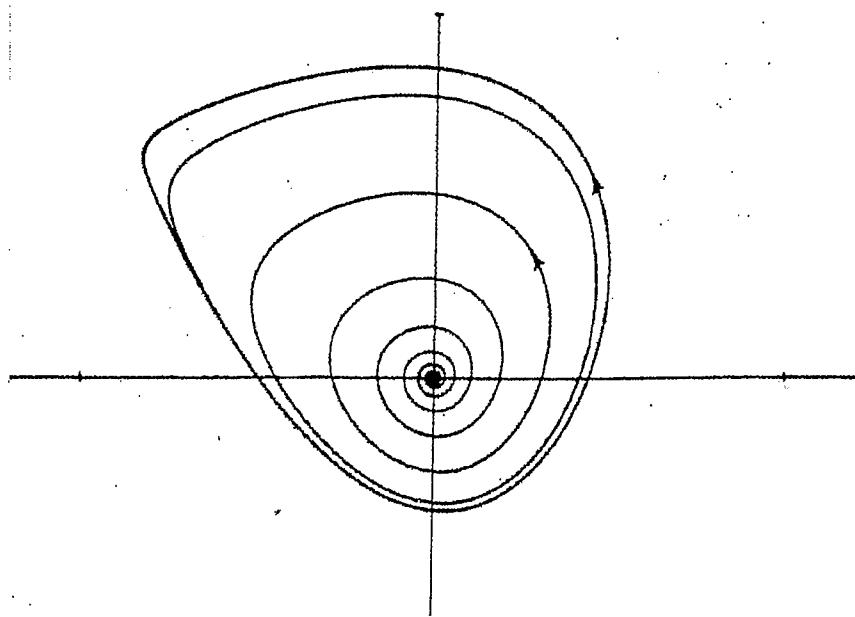


FIGURA 3. Il ciclo limite per il sistema dell'esempio 2 con $\mu = \frac{1}{10}$

Se $\mu = \sigma = 0$ nell'equazione (2), con σ dato dall'equazione (3), allora l'origine sarà un fuoco debole di molteplicità $m > 1$.

Il prossimo teorema mostra che al più dell'origine si possono biforcare m cicli limite quando μ varia passando per il valore di biforcazione $\mu=0$ e che vi è una perturbazione analitica del campo vettoriale nel sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + p(x, y) \\ \dot{y} = x + q(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

che causa esattamente ~~o al limite~~ la biforcazione di m cicli limite dell'origine per $\mu=0$. Al fine di enunciare tale teorema correttamente, è necessario estendere la nozione di norma C^1 definita sulla classe delle funzioni $C^1(E)$ alle funzioni della classe $C^k(E)$. Dato $f \in C^k(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto, definiamo

$$\|f\|_k = \sup_E |f(x)| + \sup_E \|Df(x)\| + \dots + \sup_E \|D^k f\|,$$

dove le norme $\|\cdot\|$ a destra di tale equazione sono ~~definite~~ ~~come~~ definite come

$$\|D^k f(x)\| = \max \left| \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}} \right|,$$

dove il massimo è preso su $j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n$. Ognuno degli spazi $C^k(E)$ è allora uno spazio di Banach e $C^{k+1}(E) \subset C^k(E)$.

TEOREMA 2 (biforcazione di cicli limite da un fuoco multiplo).

Se l'origine è un fuoco multiplo di molteplicità m del sistema analitico (4), allora per $k \geq 2m+1$

i) $\exists \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$ t.c. ogni sistema ε -vicino a (4) nella norma

C^k ha al più m cicli limite nell'intorno $N_\delta(0)$ e
 ii) $\forall \delta > 0, \forall \epsilon > 0$ esiste un sistema analitico che è ϵ -vicino
 a (4) nella norma C^k ed ha esattamente m cicli limite
 semplici in $N_\delta(0)$.

Nel teorema 5 del paragrafo 3.8 abbiamo detto che il sistema di
 Liénard

$$\begin{cases} \dot{x} = y - [a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2m+1} x^{2m+1}] \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

ha al più m cicli limite locali e che vi sono coefficienti ~~con~~
 $a_1, a_3, \dots, a_{2m+1}$ di segno alterno tali che tale sistema ha
 m cicli limite locali. Tale tipo di sistema ha un fuoco
 debole di molteplicità m nell'origine. Ne considereremo uno di
 tale tipo nel prossimo esempio.

ESEMPIO 3. si consideri il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \epsilon [\mu x + a_3 x^3 + a_5 x^5] \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

con $a_3 < 0, a_5 > 0$ ed $\epsilon \neq 0$ piccolo. Dalla (3'), se $\mu = 0$ allora $\sigma = 0$.
 Perciò l'origine è un fuoco debole di molteplicità $m \geq 2$. Dal
 teorema 5 del paragrafo 3.8 si tratta però di un fuoco debole di
 molteplicità $m \leq 2$. Perciò l'origine è un fuoco debole di
 molteplicità $m = 2$. Dal teorema 2 si ha quindi che dall'origine

si biforciano al più due cicli limite quando μ passa per il valore di biforcazione $\mu=0$. Per trovare i coefficienti a_3 ed a_5 per cui vi sono esattamente due cicli limite che si biforciano dall'origine per $\mu \neq 0$, usiamo il teorema 6 del paragrafo 3.8. Si trova che per $\mu > 0$ ed $\varepsilon \neq 0$ sufficientemente piccolo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left[\mu x - 4\sqrt{\mu} x^3 + \frac{16}{5} x^5 \right] \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

ha esattamente due cicli limite intorno all'origine che, per $\varepsilon \rightarrow 0$, sono asintotici alle circonferenze di raggio $r = \sqrt[4]{\mu}$ ed $r = \sqrt[4]{\mu/4}$. Per $\varepsilon = \frac{1}{100}$ i cicli limite di tale sistema sono riportati in FIGURA 4 per $\mu = \frac{1}{2}$ e $\mu = 1$. Il diagramma di biforcazione per tale sistema con $\varepsilon \neq 0$ piccolo è riportato in FIGURA 5.

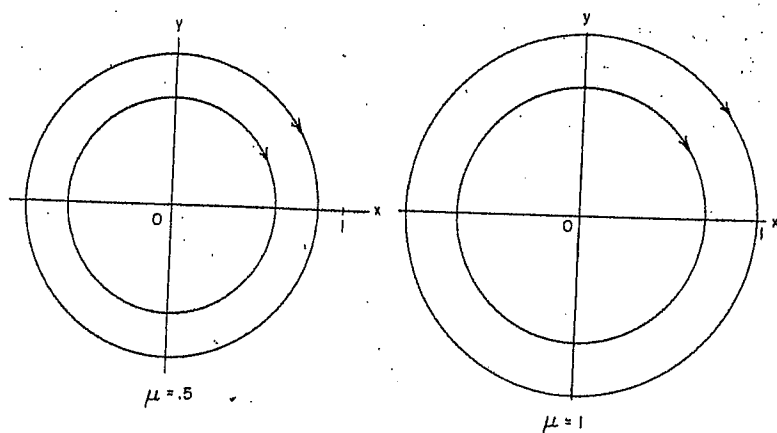


FIGURA 4. I cicli limite per il sistema dell'esempio 3 con $\mu = \frac{1}{2}$ e $\mu = 1$.

Una vasta gamma di esempi per i sistemi 2×2 che hanno cicli limite è dato dai sistemi del tipo...

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x \psi(r, \mu) \\ \dot{y} = x + y \psi(r, \mu) \end{cases}$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il diagramma di biforcazione, di curve che rappresentano famiglie ed un parametro di cicli limite, è dato dal luogo di zeri $\psi(r, \mu) = 0$ nel semipiano superiore, ossia $r > 0$, del piano (μ, r) . Il sistema dell'esempio 1 è di tale tipo. Considereremo un altro esempio di tale tipo avente molteplicità due nell'origine.

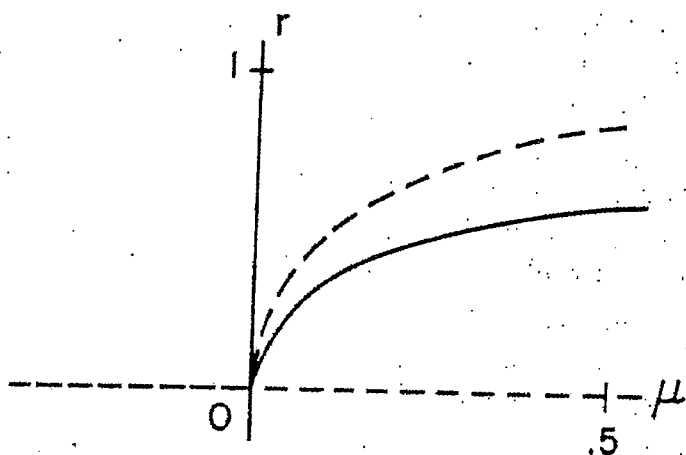


FIGURA 5. Il diagramma di biforcazione per i cicli limite che biforciano da un fuoco debole di molteplicità due dell'esempio 3.

ESEMPIO 4. Si consideri il sistema analitico 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - r^2)(\mu - 2r^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - r^2)(\mu - 2r^2) \end{cases}$$

dove $r^2 = x^2 + y^2$.

In base a quanto appena detto il diagramma di biforcazione è dato dalle curve $r = \sqrt{\mu}$ ed $r = \sqrt{\mu/2}$ (si veda Figura 6).

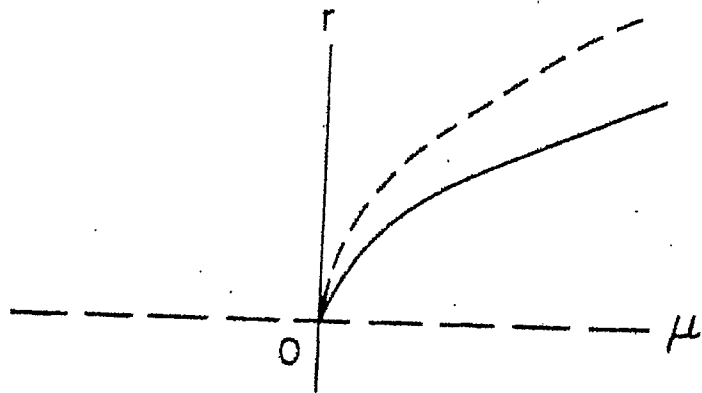


FIGURA 6. Il diagramma di biforcazione del sistema dell'esempio 4.

Infatti, scrivendo tale sistema in coordinate polari si vede esplicitamente che per $\mu > 0$ esistono due cicli limite detti dalle curve

$$\gamma_1(t) = \sqrt{\mu} (\cos t, \sin t)^T, \quad \gamma_2(t) = \sqrt{\mu/2} (\cos t, \sin t)^T.$$

Il ciclo limite più interno è stabile mentre quello più esterno è instabile. La molteplicità del fuoco debole nell'origine di tale sistema è due.

4.4 BIFORCAZIONI NELLE ORBITE PERIODICHE NON IPERBOLICHE

Nelle orbite periodiche non iperboliche si possono presentare diversi tipi di biforcazioni interessanti. Ricordiamo che per orbite periodiche non iperboliche si intende un'orbita periodica che ha due o più esponenti caratteristici con parte reale nulla.

Come ^{visto} nel teorema 2 del paragrafo 3.5, uno degli esponenti caratteristici è sempre nullo. Nel caso più semplice di un'orbita periodica non iperbolica, quando vi è un altro esponente caratteristico nullo, l'orbita periodica Γ ha una varietà centrale $W^c(\Gamma)$ due-dimensionale e i tipi di biforcazione più semplici che capitano su tale varietà sono la sella-nodo, la biforcazione transcritica e la biforcazione a forcone. La biforcazione sella-nodo è generica. Questo è il caso quando la derivata della mappa di Poincaré $DP(x_0)$, nel punto $x_0 \in \Gamma$, ha un autovalore uguale a uno. Se $DP(x_0)$ ha un autovalore uguale a -1 , allora genericamente si ha una biforcazione periodica doppia che corrisponde a una biforcazione del lancio di una moneta per la mappa di Poincaré. E se $DP(x_0)$ ha una coppia di autovalori complessi coniugati sulla circonferenza unitaria, allora genericamente Γ si biforca in un toro invariante due-dimensionale. Ciò corrisponde a una biforcazione di Hopf per la mappa di Poincaré. Si considerino sistemi C^1 del tipo

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (1)$$

dipendenti da un parametro $\mu \in \mathbb{R}$ dove $f \in C^1(E \times J)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ aperto e $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Sia $\phi_t(x, \mu)$ il flusso del sistema (1) e supponiamo che per $\mu = \mu_0$ il sistema (1) ha un'orbita periodica $\Gamma_0 \subset E$ data da $x = \phi_t(x_0, \mu_0)$. Sia Σ l'iperpiano perpendicolare a Γ_0 nel punto $x_0 \in \Gamma_0$. Allora, usando il teorema delle funzioni implicite come nel teorema 1 del paragrafo 3.4,

si può vedere che esiste una funzione $\tau(x, \mu)$ definita in un intorno $N_\delta(x_0, \mu_0)$ del punto $(x_0, \mu_0) \in E \times J$ tale che

$$\phi_{\tau(x, \mu)}(x, \mu) \in \Sigma$$

$\forall (x, \mu) \in N_\delta(x_0, \mu_0)$. Come nel paragrafo 3.4, si può vedere che per ogni $\mu \in N_\delta(\mu_0)$, $P(x, \mu)$ è un diffeomorfismo su $N_\delta(\mu_0)$. Inoltre, se assumiamo che (1) ha una famiglia ed un parametro di orbite periodiche Γ_μ , ovvero se $P(x, \mu)$ ha una famiglia ed un parametro di punti fissi x_μ , allora — come nel teorema 2 del paragrafo 3.4 — abbiamo le seguenti formule utili per calcolare la derivata della mappa di Poincaré di un sistema 2×2 di classe C^1 di tipo (1):

$$DP(x_\mu, \mu) = \exp \int_0^{T_\mu} \operatorname{div} f(x_\mu(t), \mu) dt$$

~~in~~ in un punto $x_\mu \in \Gamma_\mu$ dove la famiglia ed un parametro di orbite periodiche

$$\Gamma_\mu : x = x_\mu(t), \quad 0 \leq t \leq T_\mu$$

e T_μ è il periodo di $x_\mu(t)$.

Prima di iniziare a studiare le biforcazioni nelle orbite periodiche non iperboliche, illustriamo la dipendenza della mappa di Poincaré $P(x, \mu)$ del parametro μ con un esempio.

ESEMPIO 1. Si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2) \end{cases}$$

già visto nell'esempio 1 del paragrafo 4.3. Come visto nel paragrafo precedente, una famiglia ad un parametro di cicli limite è data da

$$\Gamma_\mu = \gamma_\mu(t) = \sqrt{\mu} (\cos t, \sin t)^T$$

con $\mu > 0$ i generatori nella biforcazione di Hopf nell'origine nel valore di biforcazione $\mu = 0$. Il diagramma di biforcazione è mostrato nelle FIGURA 2 del paragrafo 4.3. In coordinate polari si ha

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

La prima equazione può essere risolta come un'equazione di Bernoulli e per $r(0) = r_0$ si ottiene la soluzione

$$r(t, r_0, \mu) = \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-2\mu t} \right]^{-1/2} \quad \text{per } \mu > 0.$$

Su ogni raggio uscente dall'origine, la mappa di Poincaré

$$P(r_0, \mu) = r(2\pi, r_0, \mu), \quad \text{ovvero}$$

$$P(r_0, \mu) = \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\pi\mu} \right]^{-1/2}$$

La derivata di tale funzione rispetto ad x_0 è data da

$$DP(x_0, \mu) = e^{-4\pi\mu} x_0^{-3} \left[\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{\mu} \right) e^{-4\mu\pi} \right]^{-3/2}$$

Risolvendo l'equazione $P(x, \mu) = x$ si ottiene una famiglia ad un parametro di punti fissi di $P(x, \mu)$, data da $x_\mu = \sqrt{\mu}$ per $\mu > 0$. Di conseguenza

$$DP(x_\mu, \mu) = e^{-4\pi\mu}.$$

Tale formula può ottenersi anche dall'equazione (2). Visto che $\mu > 0$, $DP(x_\mu, \mu) < 1$ e le orbite periodiche Γ_μ sono tutte stabili.

Il sistema (1) si dice avere un'orbita periodica non iperbolica Γ_0 passante per il punto x_0 per un valore di biforcazione μ_0 se $DP(x_0, \mu_0)$ ha un autovalore di modulo unitario. Iniziamo il nostro studio delle biforcazioni nelle orbite periodiche non iperboliche con qualche esempio semplice di biforcazioni a punto di sella, trascritiche e a forcone che si presentano quando $DP(x_0, \mu_0)$ ha un autovalore uguale a uno.

ESEMPIO 2 (una biforcazione a punto di sella in un'orbita periodica non iperbolica). Si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x [\mu - (x^2 - 1)^2] \\ \dot{y} = x - y [\mu - (x^2 - 1)^2] \end{cases}$$

che è della forma dell'equazione (5) del paragrafo 4.3.

Scrivendo tale sistema in coordinate polari si ottiene

$$\begin{cases} \dot{r} = -r [\mu - (r^2 - 1)^2] \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Per $\mu > 0$ vi sono due famiglie ad un parametro di orbite periodiche

$$\Gamma_{\mu}^{\pm} : \gamma_{\mu}^{\pm}(t) = \sqrt{1 \pm \mu}^{1/2} (\cos t, \sin t)^T$$

con parametro μ . Visto che l'origine è instabile per $0 < \mu < 1$, il più piccolo ciclo limite Γ_{μ}^{-} è stabile e il più grande Γ_{μ}^{+} è instabile. Per $\mu = 0$ vi è un ciclo limite semistabile Γ_0 rappresentato da $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)^T$.

I ritratti di fase per tale sistema sono riportati nella FIGURA 1 e il diagramma di biforcazione è riportato in FIGURA 2.

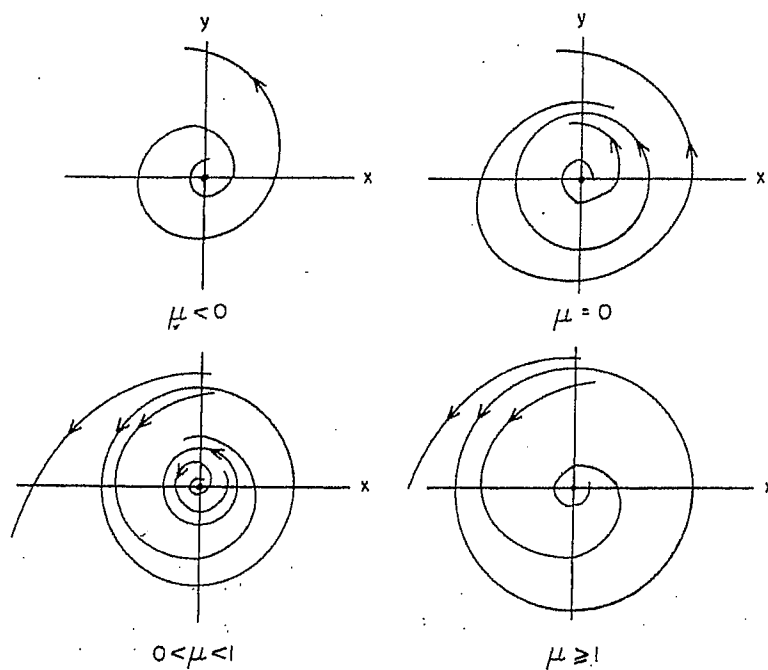


FIGURA 1. I ritratti di fase per il sistema dell'esempio 2

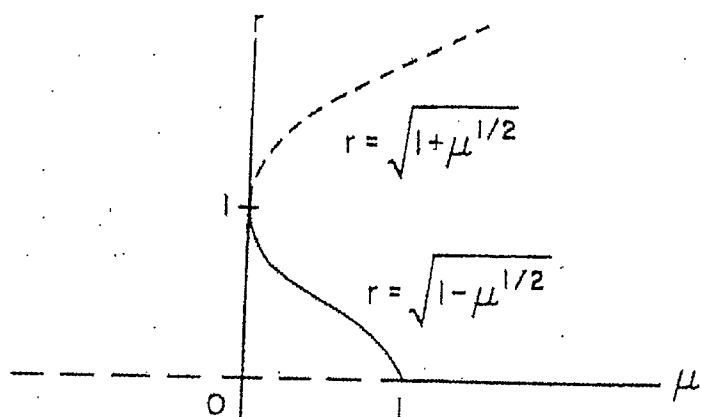


FIGURA 2. Il diagramma di biforcazione per la biforcazione a punto di sella nell'orbita periodica non iperbolica $\gamma_0(t)$ del sistema dell'esempio 2.

Si osservi che vi è una biforcazione di Hopf subcritica nell'origine per il valore di biforcazione $\mu=1$.

Nell'esempio 2 i punti $r_\mu^\pm = \sqrt{1 \pm \mu}^{1/2}$ sono punti fissi delle mappe di Poincaré $P(r, \mu)$ dell'orbita periodica $\gamma_0(t)$ lungo ogni sezione Σ passante per l'origine,

$$\Sigma = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \theta = \theta_0 \},$$

vale a dire che abbiamo $d(\sqrt{1 \pm \mu}^{1/2}, \mu) = 0$, dove $d(r, \mu) = P(r, \mu) - r$. Il diagramma di biforcazione è dato dal grafico della relazione $d(r, \mu) = 0$ nel piano (μ, r) . Usando l'equazione (21) possiamo calcolare la derivata della mappa di Poincaré in $r_\mu^\pm = \sqrt{1 \pm \mu}^{1/2} =$

$$DP(\sqrt{1 \pm \mu}^{1/2}, \mu) = e^{\pm 8\mu^{1/2}(1 \pm \mu)^{-1/2}\pi}$$

si trova che per $0 < \mu < 1$, $DP(\sqrt{1-\mu^{1/2}}, \mu) < 1$ e $DP(\sqrt{1+\mu^{1/2}}, \mu) > 1$: il più piccolo ciclo limite è stabile e il più largo ciclo limite è instabile come illustrato nelle FIGURE 1 e 2. Inoltre, per $\mu = 0$ si ha $DP(1, 0) = 1$, ovvero $\gamma_0(t)$ è un'orbita periodica non iperbolica con entrambi gli esponenti caratteristici uguali a zero.

OSSERVAZIONE 1. In generale, per i sistemi 2×2 , il diagramma di biforcazione è dato dal grafico del luogo di zeri $d(s, \mu) = 0$ nel piano (μ, s) , dove

$$d(s, \mu) = P(s, \mu) - s,$$

lungo una retta Σ perpendicolare all'orbita periodica non iperbolica Γ_0 nel punto x_0 . Sia s la distanza con segno sulla retta Σ , con la scelta di prendere il segno positivo per i punti esterni a Γ_0 e negativo nei punti interni, come riportato nelle FIGURA 3 del paragrafo 3.4. In tale contesto segue che per ogni valore di μ fissato, i valori di s per cui $d(s, \mu) = 0$ definiscono punti $x_j \in \Sigma$ vicino a $x_0 \in \Gamma_0 \cap \Sigma$ per i quali il sistema (1) ha orbite periodiche $\gamma_j(t) = \phi_{\pm}(x_j)$. Per esempio, in FIGURA 2, la retta verticale $\mu = \text{costante}$, con $0 < \mu < 1$, interseca la curva $d(\mu, \mu) = 0$ in due punti $(\mu, \sqrt{1 \pm \mu^{1/2}})$; e il sistema dell'esempio 2 ammette orbite periodiche $\gamma_{\mu}^{\pm}(t)$ passanti per i punti $(\sqrt{1 \pm \mu^{1/2}}, 0)$ sull'asse x nel piano delle fasi. Come nella FIGURA 2 del paragrafo 4.3, ogni famiglia ed un parametro

di orbite periodiche genera una superficie S in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Per esempio, le orbite periodiche del sistema dell'esempio 2 generano la superficie S mostrata in FIGURA 3.

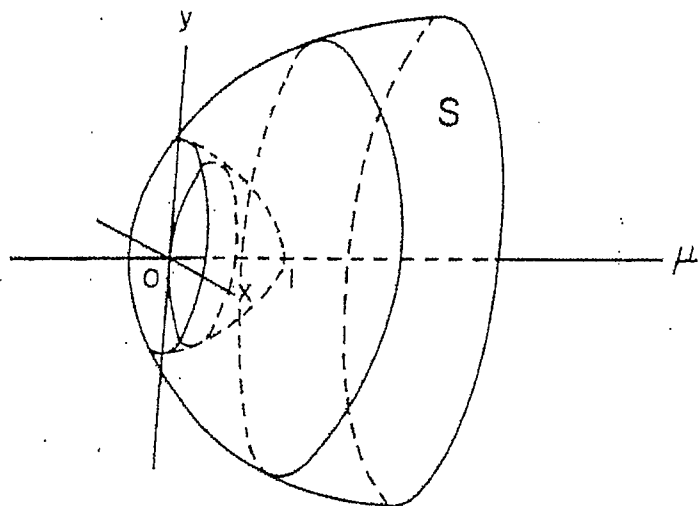


FIGURA 3. La famiglia ed un parametro delle orbite periodiche S del sistema dell'esempio 2.

Visto che in generale vi è solo una superficie generate in una biforcazione a punto di sella in un'orbita periodica non iperbolica, consideriamo le due famiglie ed un parametro di orbite periodiche (con parametro μ) appartenere ad una stessa famiglia di orbite periodiche. In tal caso possiamo sempre definire un nuovo parametro β (come la lunghezza d'arco lungo un cammino sulla superficie S) così che $\Gamma_{\mu(\beta)}$ definisca una famiglia ed un parametro di orbite periodiche con parametro β .

ESEMPIO 3 (biforcazione trascritica in un'orbita periodica non iperbolica). Si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(1-x^2)(1+\mu-x^2) \\ \dot{y} = x - y(1-x^2)(1+\mu-x^2) \end{cases}$$

In coordinate polari si ha

$$\begin{cases} \dot{r} = -r(1-r^2)(1+\mu-r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Per ogni $\mu \in \mathbb{R}$, tale sistema ha una famiglia ed un parametro di orbite periodiche rappresentate da

$$\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

e per $\mu > -1$ vi è un'altra famiglia ed un parametro di orbite periodiche rappresentate da

$$\gamma_\mu(t) = \sqrt{1+\mu} (\cos t, \sin t)^T.$$

Il diagramma di biforcazione, che mostra la biforcazione trascritica che si presenta nell'orbita periodica non iperbolica $\gamma_0(t)$ per il valore di biforcazione $\mu=0$ è riportata in FIGURA 4.

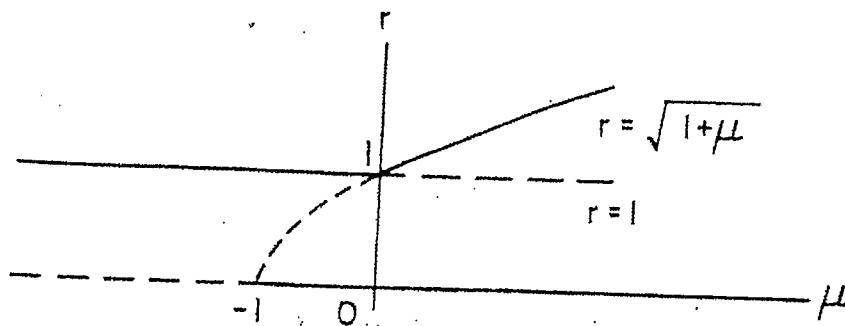


FIGURA 4. Il diagramma di biforcazione per la biforcazione trascritica nell'orbita periodica non iperbolica $\gamma_0(t)$ del sistema dell'esempio 3.

Si osservi che ~~non~~ si presenta una biforcazione di Hopf nel punto critico non iperbolico nell'origine per il valore di biforcazione $\mu = -1$.

Nell'esempio 3 i punti $r_\mu = \sqrt{1+\mu}$ e $r_\mu = 1$ sono punti fissati della mappa di Poincaré $P(r, \mu)$ dell'orbita periodica non iperbolica Γ_0 . Ossia si ha

$$d(\sqrt{1+\mu}, \mu) = 0$$

$$\forall \mu > -1 \text{ e}$$

$$d(1, \mu) = 0$$

$\forall \mu \in \mathbb{R}$, dove $d(r, \mu) = P(r, \mu) - r$. Inoltre, usando l'equazione (2), si può calcolare che

$$DP(\sqrt{1+\mu}, \mu) = e^{-4\mu(1+\mu)\pi}$$

e

$$DP(1, \mu) = e^{4\pi\mu}.$$

Questo determina la stabilità delle due famiglie di orbite periodiche indicate in FIGURA 4. Si vede che $DP(1, 0) = 1$, ovvero vi è

un'orbita periodica non iperbolica Γ_0 con entrambi i suoi esponenti caratteristici uguali a zero nel valore di biforcazione $\mu = 0$.

In tale esempio vi sono due superfici distinte di orbite periodiche, una superficie cilindrica e una superficie parabolica che si intersecano nell'orbita periodica non iperbolica Γ_0 .

ESEMPIO 4 (biforcazione a forcone in un'orbita periodica non iperbolica). Si consideri il sistema 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(1-x^2) [\mu - (x^2-1)^2] \\ \dot{y} = x + y(1-x^2) [\mu - (x^2-1)^2] \end{cases}$$

In coordinate polari si ha

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r^2)[\mu - (r^2-1)] \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

Per ogni $\mu \in \mathbb{R}$ tale sistema ha una famiglia ed un parametro di orbite periodiche rappresentate da

$$\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

e per $\mu > 0$ vi è un'altra famiglia (con due rami come detto nell'osservazione 1) rappresentate da

$$\gamma_\mu^\pm(t) = \sqrt{1 \pm \mu^{1/2}} (\cos t, \sin t)^T$$

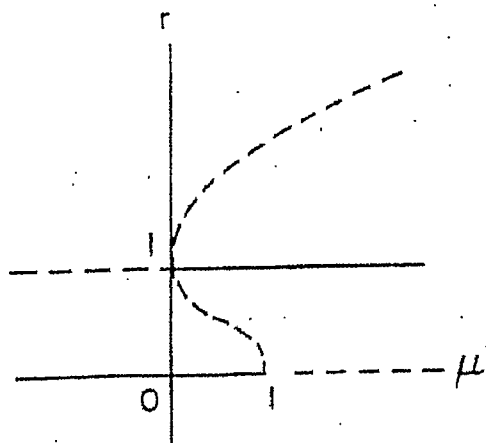
Usando l'equazione (2) possiamo calcolare

$$DP(\sqrt{1 \pm \mu^{1/2}}, \mu) = e^{\pm \mu(1 \pm \mu^{1/2})\pi}$$

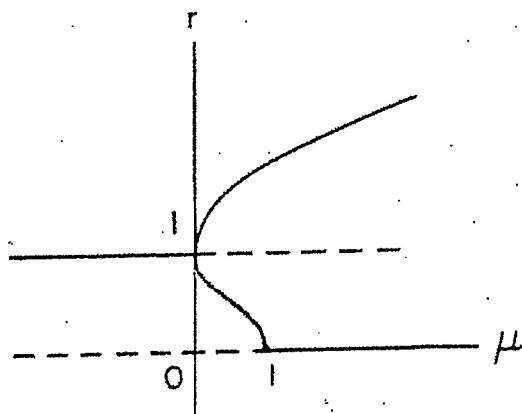
$$\text{e } DP(1, \mu) = e^{-4\pi\mu}$$

Questo determina la stabilità delle due famiglie di orbite periodiche come indicato nella FIGURA 5(a). Vediamo anche che $DP(1, 0) = 1$, ossia che vi è un'orbita periodica non iperbolica Γ_0 con entrambi i suoi esponenti caratteristici uguali a zero nel valore di biforcazione $\mu = 0$. Si osserva che ~~ad $\mu = 0$~~ si ha una biforcazione di Hopf nel punto critico non iperbolico nell'origine per il valore di biforcazione $\mu = 1$. Inoltre, si osserva che se cambiamo il segno di t in tale esempio, allora invertiamo la stabilità delle orbite periodiche e dovremmo avere il

diagramma di biforcazione con una biforcazione a forcone riportata nella FIGURA 5 (b).



(a)



(b)

FIGURA 5. Diagramma di biforcazione per la biforcazione a forcone nell'orbita periodica non iperbolica $\gamma_0(t)$ dell'esempio 4.

Usando il teorema delle funzioni implicite ~~che~~ è possibile dare condizioni sulle derivate delle mappe di Poincaré che implicano l'esistenza di una biforcazione a punto di sella, transcritica o a forcone in un'orbita periodica non iperbolica di (1). Daremo tali condizioni soltanto per sistemi 2×2 . Nel prossimo teorema $P(s, \mu)$ indica le mappe di Poincaré lungo una retta Σ perpendicolare all'orbita periodica non iperbolica Γ_0 per un valore di biforcazione $\mu = \mu_0$ per il sistema (1). Come nel paragrafo 4.2, D_s indica la derivata parziale di $P(s, \mu)$ rispetto alla variabile spaziale s .

TEOREMA 1. Sia $f \in C^2(E \times J)$, $E \subset \mathbb{R}^2$ aperto e $J \subset \mathbb{R}$ intervallo. Supponiamo che per $\mu = \mu_0$ il sistema (1) abbia un'orbita periodica $\Gamma_0 \subset E$ e che $P(s, \mu)$ sia la mappa di Poincaré per Γ_0 definita in un intorno di $N_\Sigma(0, \mu_0)$.

Allora, se $P(0, \mu_0) = 0$, $D_S P(0, \mu_0) = \pm 1$,

$$D_S^2 P(0, \mu_0) \neq 0 \quad \text{e} \quad P_\mu(0, \mu_0) \neq 0, \quad (3)$$

si ha una biforcazione a punto di sella nell'orbita periodica non iperbolica Γ_0 per il valore di biforcazione $\mu = \mu_0$. Ossia, in funzione del segno delle espressioni in (3), non vi sarà nessuna orbita periodica di (1) vicino a Γ_0 quando $\mu < \mu_0$ (o quando $\mu > \mu_0$) e vi saranno due orbite periodiche di (1) vicino a Γ_0 quando $\mu > \mu_0$ (o quando $\mu < \mu_0$). Le due orbite periodiche di (1) vicino a Γ_0 sono iperboliche e di stabilità opposta.

Se le condizioni (3) vengono sostituite da

$$P_\mu(0, \mu_0) = 0, \quad D_S P_\mu(0, \mu_0) \neq 0 \quad \text{e} \\ D_S^2 P(0, \mu_0) \neq 0,$$

allora ~~non~~ si ha una biforcazione transcritica nell'orbita periodica non iperbolica Γ_0 per il valore di biforcazione $\mu = \mu_0$.

Infine, se le condizioni (3) vengono sostituite da

$$P_\mu(0, \mu_0) = 0, \quad D_S P_\mu(0, \mu_0) \neq 0 \\ D_S^2 P(0, \mu_0) = 0 \quad \text{e} \quad D_S^3 P(0, \mu_0) \neq 0, \quad (5)$$

allora si ha una biforcazione a forcone nell'orbita periodica non iperbolica Γ_0 per il valore di biforcazione $\mu = \mu_0$.

OSSERVAZIONE 2. Sotto la condizione (3) del teorema 1 l'orbita periodica Γ_0 è un ciclo limite multiplo di molteplicità $m=2$ e si biforcano esattamente due cicli limite dal ciclo limite semi-stabile Γ_0 quando μ varia da μ_0 in un senso o nell'altro. In particolare, se $D_s^2 P(0, \mu_0)$ e $P_\mu(0, \mu_0)$ hanno segni opposti, allora vi sono due cicli limite vicino Γ_0 per ogni μ t.c. $\mu - \mu_0 > 0$ sufficientemente piccolo mentre se $D_s^2 P(0, \mu_0)$ e $P_\mu(0, \mu_0)$ hanno lo stesso segno, allora vi sono due cicli limite vicino Γ_0 per ogni μ t.c. $\mu_0 - \mu > 0$ sufficientemente piccolo.

OSSERVAZIONE 3. Dell'equazione (2) si ha

$$D_s P(0, \mu_0) = \exp\left(\int_0^{T_0} \operatorname{div} f(\gamma_0(\tau), \mu_0) d\tau\right),$$

dove T_0 è il periodo dell'orbita periodica non iperbolica Γ_0 ,

$$\Gamma_0: x = \gamma_0(t).$$

Inoltre in tal caso si ha anche una formula per la derivata parziale della mappa di Poincaré P rispetto al parametro μ in termini del campo vettoriale f lungo l'orbita periodica Γ_0 :

$$P_\mu(0, \mu_0) = \frac{-\omega_0}{|f(\gamma_0(0))|} \int_0^{T_0} \exp\left(\int_t^{T_0} \operatorname{div} f(\gamma_0(\tau), \mu_0) d\tau\right) f \wedge f_\mu(\gamma_0(t), \mu_0) dt \quad (6)$$

dove $\omega_0 = \pm 1$ a seconda che Γ_0 è orientato positivamente o meno.

~~Un~~ Gli stadi tipici di biforcazione si presentano in dimensione più alta per il sistema dinamico quando la derivata $D_x P(x_0, \mu_0)$ della mappa di Poincaré, per l'orbita periodica T_0 , ha un unico autovalore uguale a uno e nessun altro autovalore di modulo unitario. Inoltre in tal caso la biforcazione a punto di sella è generica. Non prendiamo qui in esame altri tipi di biforcazione che si possono presentare nelle orbite iperboliche non iperboliche per sistemi di tipo (1) in dimensione più alta ($n \geq 3$). Discutiamo invece di alcune degli altri tipi di biforcazione che possono presentarsi nei cicli limite multipli di sistemi 2×2 . Ricordiamo che un ciclo limite $\gamma_0(t)$ è un ciclo limite multiplo di (1) se e solo se

$$\int_0^{T_0} \operatorname{div} f(\gamma_0(t)) dt = 0.$$

Analogamente al teorema 2 del paragrafo 4.3 per la biforcazione di m cicli limite da un fuoco multiplo di molteplicità m si ottiene il teorema che segue per la ~~la~~ biforcazione di m cicli limite da un ciclo limite multiplo di molteplicità m di un sistema analitico 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (7)$$

TEOREMA 2. Sia Γ_0 un ciclo limite multiplo di molteplicità m del sistema analitico 2×2 (4). Allora

- i) $\exists \delta > 0, \exists \varepsilon > 0$ t.c. ogni sistema ε -vicino a (4) nella norma C^m ha al più m cicli limite in un δ -intorno di Γ_0 $N_\delta(\Gamma_0)$ e
- ii) $\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0$ esiste un sistema analitico ε -vicino a (4) nella norma C^m che ha esattamente m cicli limite semplici m in $N_\delta(\Gamma_0)$.

Si può vedere che i cicli limite non iperbolici dell'esempio 2 e 3 sono di molteplicità $m=2$ e che il ciclo limite non iperbolico dell'esempio 4 è di molteplicità $m=3$. Si può anche vedere che il sistema (5) del paragrafo 4.3 con

$$\Delta\psi(x, \mu) = [\mu - (x^2 - 1)^2][\mu - 2(x^2 - 1)^2]$$

ha un ciclo limite multiplo $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)^T$ di molteplicità $m=4$ per il valore di biforcazione $\mu=0$ e che da $\gamma_0(t)$ si biforciano esattamente quattro cicli limite quando μ cresce a partire dal valore zero.