TRASFORMATA DI FOURIER

Strettamente collegata con la teoria delle serie di Fourier è quella della trasformata di Fourier. Ne daremo dapprima una definizione "spontanea" in $L^1(\mathbb{R})$, mettendo in luce alcune proprietà fondamentali. Passeremo quindi alla sua definizione in $L^2(\mathbb{R})$, che ne rappresenta - come vedremo - il dominio di definizione naturale.
Considereremo sempre spazi di funzioni a valori complessi.
DEFINIZIONE - Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, si dice trasformata di Fourier di f la funzione $\hat{f} = \mathcal{F}[f]$ così definita

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx.$$

Notiamo che l'integrale, per ogni ξ fissato, è ben definito, perchè si ha

$$\left| e^{-2\pi i x \xi} f(x) \right| \leq |f(x)|$$

Inoltre $\hat{f}$ è una funzione continua (come assicura il teorema riguardante gli integrali dipendenti da un parametro), è infinitesima per $\xi \to \pm\infty$, in virtù del lemma di Riemann che enunceremo tra poco. Dunque $\hat{f}$ è limitata.

LEMMA DI RIEMANN - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt = 0.$$

E' poi evidente l'analogia che sussiste fra l'espressione di $\hat{f}$ e la formula che dà i coefficienti di Fourier di una funzione periodica.
Evidentemente, $\mathcal{F}$ è un'applicazione lineare e continua di $L^1(\mathbb{R})$ in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ (spazio delle funzioni continue e infinitesime, con la norma del sup), e si ha

$$|\hat{f}|_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R})} \leq |f|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Alcune importanti proprietà di $\mathcal{F}$ si stabiliscono senza difficoltà; premettiamo una notazione: data una funzione f definita in $\mathbb{R}$, indicheremo con f_τ la τ-traslata di f, cioè la funzione

$$x \longmapsto f(x-\tau)$$

TEOREMA – Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ha

$$\widehat{(f_\tau)}(\xi) = e^{-2\pi i \tau \xi}\,\hat{f}(\xi).$$

Inoltre, la trasformata di Fourier della funzione

$$x \longmapsto e^{2\pi i \tau x} f(x)$$

è la funzione $\hat{f}_\tau$.

Dim.: La dimostrazione della prima affermazione si fa con un semplice cambio di variabili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(x-\tau)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i (z+\tau)\xi} f(z)\,dz = e^{-2\pi i \tau \xi}\hat{f}(\xi).$$

La seconda affermazione è anch'essa di dimostrazione immediata:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \xi} e^{2\pi i \tau x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\xi-\tau)x} f(x)\,dx = \hat{f}(\xi-\tau) \quad \blacksquare$$

Malgrado la semplicità della definizione posta, lo spazio $L^1(\mathbb{R})$ non è terreno favorevole per la teoria della trasformazione di Fourier. L'ostacolo maggiore è costituito dal fatto che la trasformazione $\mathcal{F}$ non porta $L^1(\mathbb{R})$ su tutto $C_0(\mathbb{R})$.

Ci proponiamo di definire la trasformazione di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$. Si tratta di usare le funzioni "a scala", vale a dire del tipo

$$f = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k$$

dove i λ_k sono numeri complessi e le φ_k sono funzioni caratteristiche di intervalli limitati semi-aperti $]\alpha_k, \beta_k]$. Tenuto conto ora del fatto che le funzioni a scala sono dense sia in $L^1(\mathbb{R})$ che in $L^2(\mathbb{R})$, presa una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ si può pensare di approssimarla con una successione di funzioni a scala. Usando per tali funzioni la definizione di trasformata di Fourier data in $L^1(\mathbb{R})$, tenuto conto che per le funzioni a scala, rispetto alla distanza di $L^2(\mathbb{R})$, la trasformata di Fourier è un'isometria (conserva cioè, come si può provare, le distanze) si ottiene che la trasformata della successione approssimante è ancora di Cauchy e dunque converge verso un elemento che definiamo trasformata della funzione di partenza (passaggio al limite sotto il segno di trasformata di Fourier)

Perciò risulta che la trasformata di Fourier, una volta data sulle funzioni a scala, è prolungabile a tutto $L^2(\mathbb{R})$ per continuità e risulta essere un'isometria di $L^2(\mathbb{R})$

in $L^2(\mathbb{R})$. Inoltre si può provare che tale applicazione è suriettiva perchè l'applicazione $\mathcal{F}^{-1}$, inversa della $\mathcal{F}$, può essere facilmente costruita mediante una semplice variante formale della definizione di $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}^{-1}[f](x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i x \xi} g(\xi)\, d\xi .$$

La trasformata di Fourier che abbiamo ora introdotto in $L^2(\mathbb{R})$, ha un comportamento molto semplice rispetto alla convoluzione

TEOREMA – La trasformata di Fourier della convoluzione $h * f$, dove è $h \in L^1(\mathbb{R})$, $f \in L^2(\mathbb{R})$, è la funzione $\hat{h} \cdot \hat{f}$ (prodotto delle trasformate)

ULTERIORI PROPRIETÀ DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

1. COVARIANZA PER CAMBIAMENTI DI SCALA: Se $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$, si ha, $\forall \alpha \neq 0$

$$\mathcal{F}[f(\alpha\,\cdot)](\xi) = \frac{1}{|\alpha|} \hat{f}(\xi/\alpha)$$

2. CONIUGAZIONE COMPLESSA: se $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$, si ha

$$\mathcal{F}[\bar{f}](\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} .$$

3. Derivazione dell'originale: se $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$,

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n} f\right](\xi) = (2\pi i \xi)^n \hat{f}(\xi)$$

4. DERIVAZIONE dell'immagine: se $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$,

$$\mathcal{F}\left[(-2\pi i \,\cdot)^n f\right](\xi) = \frac{d^n}{d\xi^n}\hat{f}(\xi)$$

ESEMPI

1. Sia $f(t) = p_\alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \alpha \\ 0 & \text{se } |t| > \alpha. \end{cases}$

Allora

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-2\pi i x \xi}\, dx = -\frac{1}{2\pi i \xi}\left[e^{-2\pi i \xi \alpha} - e^{2\pi i \xi \alpha}\right] =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2\pi \xi \alpha)}{\pi \xi}$$

2. Se $\mathcal{F}[f](\xi) = \hat{f}(\xi)$, si ha

$\mathcal{F}\left[f(\cdot + t_0) + f(\cdot - t_0)\right](\xi) =$ per linearità

e utilizzando il risultato relativo alla trasformata della $\pm t_0$ traslata,

$$= e^{2\pi i t_0 \xi}\hat{f}(\xi) + e^{-2\pi i t_0 \xi}\hat{f}(\xi) =$$

$$= 2\hat{f}(\xi)\cos(2\pi t_0 \xi).$$

TRASFORMATA DI FOURIER DI FUNZIONI SINGOLARI

a) δ di Dirac & ESPONENZIALI COMPLESSI

Ricordando che

$$< \delta, f > =: \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f(t) dt = f(0) \qquad \forall f \in C(\mathbb{R}),$$

si ha

$$\mathcal{F}[\delta](\xi) = \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\, e^{-2\pi i t \xi}\, dt = 1$$

e usando la proprietà di traslazione

$$\mathcal{F}[\delta_\tau](\xi) = e^{-2\pi i \tau \xi}.$$

Di conseguenza $\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-2\pi i \tau \xi}\right] = \delta(t-\tau)$

Inoltre, dalla definizione di antitrasformata,

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta](t) = \int_{\mathbb{R}} \delta(\xi)\, e^{2\pi i t \xi}\, d\xi = 1,$$

da cui $\mathcal{F}(1)(\xi) = \delta(\xi)$.

b) FUNZIONE "SEGNO".

Sia $f(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ -1 & \text{se } t < 0. \end{cases}$

Allora si ha $\hat{f}(\xi) = \text{v.p.} \frac{1}{\pi i \xi}$, dato che

$$\text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{2\pi i \xi x}}{\pi i \xi} d\xi = \text{v.p.} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen}(2\pi \xi x)}{\pi \xi} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\omega x)}{\pi\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases} = \text{sgn}(x)$$

(che è l'antitrasformata corrispondente), come deriva mediante l'uso della teoria dei residui.

c) FUNZIONE DI HEAVISIDE

Poiché

$$H(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}\, t),$$

si ha

$$\hat{H}(\xi) = \frac{1}{2}\left\{\delta(\xi) + \text{v.p.} \frac{1}{\pi i \xi}\right\}$$

e di conseguenza

$$\hat{H'}(\xi) = 2\pi i \xi \left(\frac{1}{2}\delta(\xi) + \text{v.p.} \frac{1}{2\pi i \xi}\right)$$

$$= \pi i \xi\, \delta(\xi) + 1 = 1 = \mathcal{F}[\delta](\xi)$$

cioè effettivamente la trasformata della derivata della Heaviside è la trasformata della δ-di Dirac, vale a dire, la derivata della Heaviside è, come sapevamo, la δ.

d) Trasformata di un treno di impulsi finito

Sia $$f(t) = \sum_{n=-N}^{+N} \delta(t - nT).$$

Allora

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{-N}^{+N} e^{-2\pi i n T \xi} = \frac{e^{2\pi i N T \xi} - e^{-2\pi i (N+1) T \xi}}{1 - e^{-2\pi i T \xi}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(2\pi \xi (N + 1/2) T\right)}{\operatorname{sen}(\pi \xi T)} = \frac{\operatorname{sen}\left((2N+1)\pi \xi T\right)}{\operatorname{sen}(\pi \xi T)}$$

e) Trasformata di un segnale replicato 2N-volte.

Sia
$$f(t) = \sum_{n=-N}^{+N} f_0(t - nT),$$

dove f_0 è una funzione assegnata ("segnale")

Poiché si può scrivere

$$f(t) = f_0(t) * \sum_{n=-N}^{+N} \delta(t - nT),$$ si ha

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_0(\xi) \frac{\operatorname{sen}\left((2N+1)\pi \xi T\right)}{\operatorname{sen}(\pi \xi T)}$$

<u>TEOREMA</u> – Supponiamo che una funzione f sia rappresentata dalla serie trigonometrica (uniformemente convergente sui compatti)

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{2\pi i n \omega_0 t}, \qquad (1)$$

dove $\omega_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Allora

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \, \delta(\xi - n\omega_0), \qquad (2)$$

ossia la trasformata di Fourier di f è la sovrapposizione di infiniti impulsi equidistanti.
Vale anche il viceversa.

DIMOSTRAZIONE

Ricordando che

$$\omega_0 \int_{-\frac{1}{2\omega_0}}^{\frac{1}{2\omega_0}} e^{+i(n-m)2\pi\omega_0 t} \, dt = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m, \end{cases}$$

moltiplicando la $f(t)$ della (1) per $e^{-2\pi i m \omega_0 t}$ e integrando su $\left[-\frac{1}{2\omega_0}, \frac{1}{2\omega_0}\right]$ segue

$$\alpha_m = \omega_0 \int_{-\frac{1}{2\omega_0}}^{\frac{1}{2\omega_0}} f(t) \, e^{-2\pi i m \omega_0 t} \, dt,$$

ossia gli α_n della (2) sono i coefficienti di Fourier dello sviluppo trigonometrico della f dato in (1).
La f è poi periodica di periodo $T = \frac{1}{\omega_0}$.

Viceversa, data f periodica di periodo $T = 1/\omega_0$, essa ammette uno sviluppo trigonometrico di tipo

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{2\pi i n \omega_0 t} \qquad (3)$$

Infatti, se

$f(t) = f(t+T)$, prendendo la trasformata di Fourier si ha:

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{2\pi i T \xi} \qquad \forall \xi,$$

da cui

$$\hat{f}(\xi)\left(1 - e^{2\pi i T \xi}\right) = 0, \quad \text{cioè}$$

$\hat{f}(\xi) = 0$ se $e^{2\pi i T \xi} \neq 1$ ovvero

se $\xi \neq \frac{n}{T}$

Segue che $\hat{f}(\xi) \neq 0$ solo se $\xi = \frac{n}{T} = n\omega_0$

Ciò vuol dire che $\exists$ $\overset{\text{oppure}}{\beta_n}$:

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n \, \delta(\xi - n\omega_0) \qquad \text{e}$$

antitrasformando

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta_n e^{2\pi i n \omega_0 t},$$

come volevamo provare. ∎

Sia ora f una funzione T-periodica e definiamo

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & |t| < T/2 \\ 0 & |t| > T/2 . \end{cases}$$

Allora $\quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(t + nT)$.

Perciò

$$\hat{f}_0(\xi) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-2\pi i \xi t}\, dt$$

e quindi $\quad \hat{f}_0(n\omega_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-2\pi i n \omega_0 t}\, dt = \alpha_n T,$

dove si è fatto uso della formula dei coefficienti.
Perciò

$$\alpha_n = \frac{\hat{f}_0(n\omega_0)}{T} = \frac{\hat{f}_0(n/T)}{T}$$

e di conseguenza

$$f_0(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\hat{f}_0\left(\frac{n}{T}\right)}{T}\, e^{2\pi i n t/T}$$

ESEMPIO: Sia f un treno di impulsi infinito

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT).$$

In questo caso $f_0(t) = \delta(t) \Rightarrow \hat{f}_0(\xi) = 1.$

I coefficienti di Fourier sono perciò $\alpha_n = \frac{1}{T}$

e quindi, da

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n \, e^{2\pi i n t/T},$$

si ottiene

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i n t/T}$$

e trasformando si ha

$$\mathcal{F}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT)\Big) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\xi - n/T),$$

cioè "la trasformata di un treno di impulsi infinito è un altro treno di impulsi infinito." Più in generale si dimostra che, se $\hat{f}(\xi) = F(\xi)$, allora

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t + nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} F\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i n t/T},$$

nota come FORMULA DI POISSON

TEOREMA DI CAMPIONAMENTO DI SHANNON

Sia $F(\xi) = \hat{f}(\xi)$ la trasformata di Fourier di una funzione f e supponiamo che

$$F(\xi) \equiv 0 \quad \text{per} \quad |\xi| > |\xi_1|$$

(si dice in tal caso che il segnale è a "banda limitata" e ξ_1 prende il nome di "ampiezza della banda")
Si sviluppi la trasformata F di f in serie di Fourier in $\left[-\frac{1}{2w}, \frac{1}{2w}\right]$, dove $\frac{1}{2w} > \xi_1$:

$$F(\xi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_m \, e^{2\pi i m w \xi}, \qquad |\xi| < \frac{1}{2w},$$

dove
$$\alpha_m = w \int_{-\frac{1}{2w}}^{\frac{1}{2w}} F(t)\, e^{-2\pi i m w t}\, dt =$$

$$= w \int_{-\xi_1}^{\xi_1} F(t)\, e^{-2\pi i m w t}\, dt = w\, f(mw)$$

La serie $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m e^{2\pi i m w \xi}$ fornisce lo sviluppo della funzione F^* ottenuta per prolungamento periodico da F (con periodo $T = 1/w$)

$$F^*(\xi) = \frac{1}{T} \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m/T)\, e^{2\pi i \frac{m}{T} \xi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} F(\xi + mT)$$

in base alla FORMULA DI POISSON

Sia ora $P_{\xi_0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } |\xi| < \xi_0 \\ 0 & \text{se } |\xi| > \xi_0 , \end{cases}$

dove $\xi_1 \leq \xi_0 < 2T - \xi_1$.

Allora si ha $F(\xi) = F^*(\xi) p_{\xi_0}(\xi) \quad \forall \xi$.

Perciò

$$F(\xi) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{T}\right) e^{2\pi i \frac{n}{T} \xi} \, p_{\xi_0}(\xi)$$

e antitrasformando, tenuto conto del fatto che

$\hat{P}_{\xi_0}(\xi) = \dfrac{\text{sen}\,(2\pi \xi \xi_0)}{\pi \xi}$, si ha

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\text{sen}\left[\left(\xi - \frac{n}{T}\right) 2\pi \xi_0\right]}{\pi \left(\xi - \frac{n}{T}\right)} \right) = P_{\xi_0}(t) \, e^{2\pi i \frac{n}{T} t}$$

da cui segue

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\pi T} f\left(\frac{n}{T}\right) \frac{\text{sen}\left(2\pi \xi_0 \left(\xi - n/T\right)\right)}{\left(\xi - n/T\right)}$$

Abbiamo cioè ottenuto :

TEOREMA DI CAMPIONAMENTO DI SHANNON

Sia data f e sia $\hat{f} = F$ t.c.

$$F(\xi) \equiv 0 \quad \text{per } |\xi| > \xi_1$$

Allora $f(t)$ può essere determinata dai suoi valori a intervalli $t = \frac{n}{T}$, purché l'intervallo di campionamento $\omega = \frac{1}{T}$ non superi $\frac{1}{2\xi_1}$.

Risulta poi, se ξ_0 è scelto tale che

$$\xi_1 < \xi_0 < 2T - \xi_1 ,$$

valido lo sviluppo

$$f(t) = \frac{1}{\pi T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n/T) \, \frac{\operatorname{sen}\left(2\pi \xi_0 (\xi - \frac{n}{T})\right)}{\xi - n/T} .$$

<u>OSSERVAZIONE</u> Da quanto prima visto a proposito della trasformata di un treno di impulsi infinito e quanto ora concluso con il teorema di campionamento abbiamo perciò il seguente risultato. Se richiediamo che f sia periodica in t di periodo T, allora $F = \hat{f}$ è diversa da zero solo per valori discreti $\xi = n\omega$, dove $\omega = \frac{1}{T}$: il requisito della periodicità di f comporta che F è campionata rispetto alla variabile frequenza ξ. Viceversa, se F è campionata, allora f è periodica.
Tale discorso verrà ripreso più nel dettaglio per introdurre la trasformata di Fourier discreta.

LA DERIVAZIONE GENERALIZZATA IN $L^2(\mathbb{R})$

Abbiamo già visto, a proposito della teoria delle distribuzioni, qualche definizione di derivazione generalizzata nel senso delle distribuzioni. Riprenderemo adesso la definizione di derivata debole o generalizzata nell'ambito però delle funzioni a quadrato integrabile $L^2(\mathbb{R})$.

DEFINIZIONE: Diremo che $f \in L^2(\mathbb{R})$ ha come derivata GENERALIZZATA $g \in L^2(\mathbb{R})$, e scriveremo $Df = g$, se esiste una successione $f_n \in C^1_{00}(\mathbb{R})$ (cioè una successione di funzioni a supporto compatto e derivabili con continuità), tale che

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n = f \\ \lim_{n\to\infty} f_n' = g \end{cases} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R})$$

Lo spazio delle funzioni derivabili in senso generalizzato (o debole) costituisce uno spazio di Hilbert, che indicheremo con $H^1(\mathbb{R})$, con prodotto scalare definito da, $\forall f, g \in H^1(\mathbb{R})$,

$$\langle f, g \rangle_{H^1} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt + \int_{\mathbb{R}} \overline{Df}(t)\, Dg(t)\, dt$$

Osserviamo che una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ che sia dotata di derivata continua $g \in L^2(\mathbb{R})$ è senz'altro derivabile in senso generalizzato secondo la nostra definizione e si ha $Df = g$.

TRASFORMATA DI FOURIER DI FUNZIONI DI $H^1(\mathbb{R})$.

In primo luogo ci occupiamo della trasformata di Fourier di una funzione di $C^1_{00}(\mathbb{R})$. Per la trasformata di Fourier della sua derivata prima, $\widehat{f'}$, si ha, con una semplice integrazione per parti:

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f'(x)\, dx =$$

$$= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x)\, dx ,$$

da cui

$$\widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$$

Dalla precedente definizione di derivata generalizzata per funzioni di $H^1(\mathbb{R})$ si ha allora che tale relazione vale $\forall f \in H^1(\mathbb{R})$. Si può in realtà dimostrare che

TEOREMA Condizione necessaria e sufficiente affinché $f \in L^2(\mathbb{R})$ abbia derivata generalizzata in $L^2(\mathbb{R})$ è che, detta $\hat{f}$ la trasformata di Fourier di f, la funzione

$$\xi \longmapsto \xi \hat{f}(\xi)$$

sia a quadrato integrabile in $\mathbb{R}$.
Vale poi

$$\| f' \|_{L^2} = \| \widehat{f'} \|_{L^2} = 2\pi \| \xi \hat{f}(\xi) \|_{L^2}$$

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE

Vogliamo ora dimostrare un'importante disuguaglianza che coinvolge una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ e la sua trasformata di Fourier.
Si osservi intanto che un integrale del tipo

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \qquad (*)$$

ha il significato di una "dispersione" rispetto ad una densità rappresentata da $|f(x)|^2$. Esso ha valore tanto più grande quanto più i valori di $|f(x)|^2$ sono "sparsi"; naturalmente, l'integrale $(*)$, per una generica funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ sarà uguale a $+\infty$.
Supponiamo comunque che una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ abbia derivate prime (in senso generalizzato) in $L^2(\mathbb{R})$ e che per f l'integrale $(*)$ risulti finito.

La funzione $x \longmapsto |f(x)|^2$ ha una derivata generalizzata in $L^1(\mathbb{R})$ e si ha

$$D\left(|f(x)|^2\right) = \overline{f(x)}\, f'(x) + f(x)\, \overline{f'(x)}$$

Da questa relazione si ottiene facilmente, mediante un'integrazione per parti, la relazione

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}} x\, D|f(x)|^2 dx = -\int_{\mathbb{R}} x\left(\overline{f(x)}\, f'(x) + f(x)\, \overline{f'(x)}\right) dx,$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |x|\, |f(x)|\, |f'(x)|\, dx$$

e, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Abbiamo d'altra parte visto che

$$\int_{\mathbb{R}} |f'(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} 4\pi^2 \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi ,$$

da cui sostituendo nella precedente si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq 4\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

Questa relazione si può leggere, qualitativamente così:

"La dispersione di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$ e delle sue trasformate di Fourier non possono essere entrambe piccole":

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq 4\pi \, \|x\, f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} \, \|\xi\, \hat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Tale disuguaglianza dà espressione matematica al celebre "principio di indeterminazione" della meccanica quantistica.

GENERALIZZAZIONI : gli spazi di Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R})$.

Le varie definizioni di derivazione generalizzata che abbiamo dato in situazioni diverse sono accomunate da un unico punto di vista che ora cercheremo di mettere in evidenza.
Anzitutto, per quello che riguarda lo spazio funzionale che fa da ambiente, si può notare che in ogni caso abbiamo considerato funzioni LOCALMENTE INTEGRABILI, cioè funzioni integrabili in ogni intervallo <u>limitato</u>. Dunque L^1_{loc} si può prendere come spazio universale.

In secondo luogo la relazione $Df = g$ si caratterizza in ogni caso mediante la seguente relazione, valida per ogni $\varphi \in C^1_{00}(\mathbb{R})$ (anche detta "funzione test" o anche presa in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$):

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_{\mathbb{R}} g(t)\,\varphi(t)\,dt$$

Tale caratterizzazione può essere non solo per funzioni $f \in L^1(\mathbb{R})$, ma in generale per $f \in L^p(\mathbb{R})$.
Analogamente a come è stato definito $H^1(\mathbb{R})$, si giunge perciò a definire $W^{1,p}(\mathbb{R})$ come

$$W^{1,p}(\mathbb{R}) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \exists\, Df \in L^p(\mathbb{R}) \}$$

e più in generale, se anche la Df è derivabile e così via m-volte,

$$W^{m,p}(\mathbb{R}) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}) : \exists\, D^k f \in L^p(\mathbb{R}),\ 0 \le k \le m \}.$$

Gli spazi ora definiti sono in generale spazi di Banach (qui l'integrale è sempre quello di Lebesgue) con la norma

$$\| f \|_{W^{m,p}(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{m} \| D^k f \|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Nel caso particolare $p = 2$ si tratta di spazi di Hilbert e in tal caso si usa la notazione

$$W^{m,2}(\mathbb{R}) = H^m(\mathbb{R})$$

e la norma è indotta dal prodotto scalare

$$< f, g >_{H^m(\mathbb{R})} = \sum_{k=0}^{m} < D^k f , D^k g >_{L^2(\mathbb{R})} .$$

Per gli spazi $H^m(\mathbb{R})$ si può ripetere quanto precedentemente detto per $H^1(\mathbb{R})$. In particolare si può concludere con il seguente risultato:

TEOREMA Condizione necessaria e sufficiente affinché $f \in L^2(\mathbb{R})$ abbia derivate generalizzate $D^k f \in L^2(\mathbb{R})$ per $k = 1, \dots, m$ è che, detta $\hat{f}$ la trasformata di Fourier di f, le funzioni

$$\xi \longmapsto |\xi|^k \hat{f}(\xi) \quad , \quad k = 1, \dots, m$$

siano a quadrato integrabile in $\mathbb{R}$. Vale poi

$$\| D^k f \|_{L^2} = \| \widehat{D^k f} \|_{L^2} = (2\pi)^k \| |\xi|^k \hat{f}(\xi) \|_{L^2} .$$

L'ultima relazione suggerisce una definizione equivalente (visto che il teorema precedente è C.N.e S.) per gli spazi di Sobolev hilbertiani $H^m(\mathbb{R})$, che è la seguente:

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \ |\xi|^\alpha \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}), \ 0 \le \alpha \le s \right\}$$

Tale definizione ha ora senso in generale per $s \in \mathbb{R}^+$. Perciò, tutte le volte che ciò può risultare utile, possiamo considerare spazi di Sobolev hilbertiani $H^s(\mathbb{R})$ per $s \in \mathbb{R}^+$, (*) secondo la definizione precedente che non fa più esplicito riferimento alla derivazione generalizzata.

Si osservi che varrà sempre

$$f \in H^s(\mathbb{R}) \implies f \in H^{s'}(\mathbb{R}) \qquad \forall\ s' \le s.$$

(*) la norma relativa è ora quella indotta dal prodotto scalare

$$< f, g >_{H^s} = \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^\alpha\right)^2 \overline{\hat{f}(\xi)}\, \hat{g}(\xi)\, d\xi, \quad \forall f, g \in H^s(\mathbb{R})$$

definibile quindi solo utilizzando la trasformata di Fourier.

CAPITOLO 11

TRASFORMATA DI LAPLACE

11.1. Trasformata di Laplace e sua inversa

Cominciamo con il seguente Lemma:

Lemma. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente assolutamente sommabile.*
Se esiste $p_0 \in \mathbb{R}$ tale che l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t$$

sia assolutamente convergente, allora $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$ è assolutamente convergente per ogni $p \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} p > p_0$.

Dimostrazione. Per ipotesi, $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ è convergente per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. Posto $\operatorname{Re} p = p_0 + q$, con $q > 0$, poniamo $T > 0$. Si ha

$$\int_0^T |e^{-pt} f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-p_0 t} |f(t)| e^{-qt}\,\mathrm{d}t = [e^{-qt}\varphi(t)]_0^T + q\int_0^T e^{-qt}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

dove $\varphi(t) = \int_0^t e^{-p_0 s}|f(s)|\,\mathrm{d}s$. Poiché $\varphi(0) = 0$, abbiamo

$$\int_0^T |e^{-pt} f(t)|\,\mathrm{d}t = e^{-qT}\varphi(T) + q\int_0^T e^{-qt}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Per ipotesi sappiamo che $\lim_{T\to\infty} \varphi(T)$ è convergente, dunque

$$\lim_{T\to\infty} e^{-qT}\varphi(T) = 0\ .$$

D'altra parte, essendo $\varphi(t) \le K$ per $t \ge 0$,

$$\int_0^T e^{-qt}\varphi(t)\,\mathrm{d}t \le \int_0^T e^{-qt} K\,\mathrm{d}t \le \frac{K}{q}(1 - e^{-qT}) \le \frac{K}{q}\ .$$

Ciò prova il Lemma.

Il Lemma precedente suggerisce la seguente

DEFINIZIONE. *Si chiama ascissa di convergenza (assoluta) della trasformata di Laplace associata alla funzione localmente assolutamente sommabile f la grandezza*

$$a = \inf \left\{ \operatorname{Re} p \ : \ \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t \quad \text{è assolutamente convergente} \right\} .$$

ESEMPIO: se

$$|f(t)| \le M e^{\alpha t} \qquad (\alpha \in \mathbb{R}) ,$$

allora l'ascissa di convergenza assoluta è minore o uguale ad α.

Se $\int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ non è assolutamente sommabile per alcun p, allora diremo che l'ascissa di convergenza è $+\infty$ (esempio: $f(t) = e^{t^2}$).

Sia ora f localmente sommabile con ascissa di assoluta convergenza $\omega \in \mathbb{R}$. Dimostriamo che la funzione

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\, \mathrm{d}t$$

è olomorfa in $\operatorname{Re} z > \omega$.

A tal fine, consideriamo anzitutto

$$F_a(z) = \int_0^a e^{-zt} f(t)\, \mathrm{d}t \qquad \operatorname{Re} z > \omega .$$

Notiamo in primo luogo che $F_a'(z)$ esiste

$$F_a'(z) = -\int_0^a t f(t) e^{-tz}\, \mathrm{d}t .$$

In effetti, per s, $h \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > \omega$, e h tali che $\operatorname{Re}(s+h) > \omega$ possiamo scrivere

$$D(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{F_a(s+h) - F_a(s)}{h} + \int_0^a f(t) t e^{-ts}\, \mathrm{d}t =$$

$$\int_0^a e^{-st} \left(\frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) f(t)\, \mathrm{d}t .$$

Ora:

$$\left| \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right| = \left| ht^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{ht}{3!} + \frac{h^2 t^2}{4!} \dots \right) \right|$$
$$\le |ht^2| \left(1 + \frac{|h| t}{1!} + \frac{|h|^2 t^2}{2!} + \dots \right) = ht^2 e^{|h| t} .$$

Per $t \in [0, a]$ avremo dunque

$$\left|\frac{e^{-ht}-1}{t}+t\right| \leq ha^2 e^{|h|a} \,,$$

e quindi

$$|D(h)| \leq ha^2 e^{|h|a} \int_0^a e^{+|\operatorname{Re} s|t} |f(t)| \,\mathrm{d}t \leq$$
$$\leq h \left(a^2 e^{|h|a} e^{|\operatorname{Re} s|a} \int_0^a |f(t)| \,\mathrm{d}t \right) .$$

Pertanto $|D(h)| \to 0$ per $h \to 0$, il che prova che $F_a(z)$ è olomorfa in ogni $z \in \mathbb{C}$, con derivata

$$F_a'(z) = -\int_0^a f(t) t e^{-tz} \,\mathrm{d}t \,.$$

(In modo analogo si prova che $F_a^{(n)}(z)$ esiste e vale

$$F_a^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^a f(t) t^n e^{-tz} \,\mathrm{d}t \,.)$$

Poiché $F_a(z) \to F(z)$ al tendervi di a all'∞ *uniformemente* per $z : \operatorname{Re} z \geq \omega_1 > \omega$, ricordando il risultato che garantisce l'olomorfia del limite uniforme di successioni di funzioni olomorfe, possiamo concludere che

(1) $F(z)$ è olomorfa in $\operatorname{Re} z \geq \omega_1$, $\omega_1 > \omega$.
(2) $F_a^{(n)}(z)$ converge uniformemente a $F^{(n)}$, e quindi

$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^\infty t^n e^{-tz} f(t) \,\mathrm{d}t \,.$$

Chiameremo **originale** per la trasformazione di Laplace ogni funzione complessa della variabile reale t se soddisfa

(1) f è localmente sommabile
(2) $f(t) = 0$ per $t < 0$
(3) esistono costanti $M > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t} \,, \qquad t \geq 0 \,.$$

Esempio:

$$H(t) = \text{ funzione di Heaviside } = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \,. \end{cases}$$

Notiamo che se $\varphi(t)$ soddisfa (1) e (3), allora

$$f(t) = H(t)\varphi(t)$$

soddisfa (1), (2), (3). Per questo motivo spesso si dice che una funzione che soddisfa (1) e (3) è un originale per la trasformazione di Laplace – sostituendo che l'originale vero e proprio si ottiene per moltiplicazione con $H(t)$.

Se f è una funzione che soddisfa (1), (2), (3), la grandezza s_0 prende il nome di ascissa di crescenza. È allora evidente per quanto visto sopra che l'ascissa di convergenza associata è non superiore a s_0, e la funzione

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[f](p)$$

detta **Trasformata di Laplace** della funzione originale f, è olomorfa nel semipiano $\mathrm{Re}\,p \geq s_1$, per ogni $s_1 > s_0$. Procedendo come nel Lemma precedente è facile mostrare che per ogni p con $\mathrm{Re}\,p \geq s_1 > s_0$ si ha la stima

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right| \leq M \int_0^\infty e^{-(\mathrm{Re}\,p - s_0)t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{\mathrm{Re}\,p - s_0}\ ,$$

il che mosta che

$$\boxed{\lim_{\substack{p\to\infty \\ p\in\Sigma}} F(p) = 0}$$

per ogni settore $\Sigma = \left\{ \left|\arg z\right| < \frac{\pi}{2} - \delta \right\}$, $\delta > 0$, e in particolare,

$$\lim_{\mathrm{Re}\,p\to+\infty} F(p) = 0\ .$$

Prima di studiare le proprietà della trasformazione di Laplace, esaminiamo le prime caratteristiche della trasformazione inversa. Allo scopo, consideriamo anzitutto la seguente grandezza

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{p}\,\mathrm{d}p$$

dove l'integrale si estende alla retta $\mathrm{Re}\,p = a > 0$ percorso dal basso verso l'alto.

Osserviamo anzitutto che

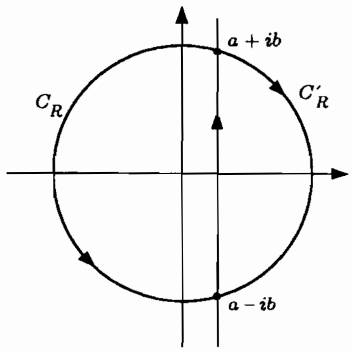

Figura 11.1.

(1) se $t > 0$, $\int_{c_R} \frac{e^{pt}}{p}\,\mathrm{d}p \to 0$ per $R \to \infty$, in virtù del Lemma di Jordan. Per il teorema dei residui, avremo

$$\int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\,\mathrm{d}p + \int_{c_R} \frac{e^{pt}}{p} = 2\pi i \mathrm{Res}\, \frac{e^{pt}}{p}\bigg|_{p=0} = 2\pi i\ ,$$

e quindi, passando al limite $R \to \infty$:

$$f(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\,\mathrm{d}p = 1 \qquad (t > 0)$$

(2) se $t < 0$, $\int_{c'_R} \frac{e^{pt}}{p}\,\mathrm{d}p \to 0$ per $R \to \infty$ (sempre per il lemma di Jordan), e quindi, applicando il I° teorema di Cauchy:

$$f(t) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{a-ib}^{a+ib} \frac{e^{pt}}{p}\,\mathrm{d}p = 0 \qquad (t < 0)\ .$$

Vediamo così che f è uguale alla funzione di Heaviside – con l'esclusione del punto in cui tale funzione è discontinua. D'altra parte, $\frac{1}{p}$ è esattamente la trasformata di Laplace della funzione di Heaviside, cosicché, almeno nel caso della funzione di Heaviside, abbiamo provato che, se l'originale $f(t)$ ha come trasformata di Laplace $F(p)$, allora nei punti di continuità di $f(t)$, si ha la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt}\,\mathrm{d}p\ .$$

In effetti, possiamo dimostrare il seguente

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DELLA FUNZIONE ORIGINALE. *Sia f un originale, e $F(p)$ la trasformata di Laplace associata. Allora, in ogni punto di continuità di $f(t)$ si ha*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p$$

dove l'integrale è esteso a qualunque retta $\operatorname{Re} p = a$, con $a > s_0 =$ "ascissa di convergenza" (o "coefficiente di crescenza") della funzione originale f.

Dimostrazione. Sia

$$f_b(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt}\left(\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}p$$

dove l'integrale $\int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau}\,\mathrm{d}\tau$ converge uniformemente rispetto a p, $\operatorname{Re} p = a$, possiamo quindi invertire l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned}
f_b(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_{a-ib}^{a+ib} e^{p(t-\tau)}\,\mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \int_{-b}^{b} e^{is(t-\tau)} i\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)} i \frac{e^{ib(t-\tau)} - e^{-ib(t-\tau)}}{i(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)e^{a(t-\tau)}\frac{\sin b(t-\tau)}{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau = \\
&= e^{at}\frac{1}{\pi}\int_{-t}^\infty f(\xi+t)e^{-a(\xi+t)}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,,
\end{aligned}$$

e, poiché $f(\xi + t) = 0$ per $\xi + t < 0$, otteniamo

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi}e^{at}\int_{-\infty}^\infty f(t+\xi)e^{-a(t+\xi)}\frac{\sin b\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{at}\int_0^\infty [f(t+\xi)e^{-a(t+\xi)} + f(t-\xi)e^{-a(t-\xi)}]\frac{\sin b\xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Ricordando che $\int_0^\infty \frac{\sin\xi}{\xi} = \frac{\pi}{2}$, possiamo anche scrivere l'espressione precedente come segue

$$f_b(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{[f(t+\xi)e^{-a\xi} - f(t)] - [f(t) - f(t-\xi)e^{a\xi}]\}\frac{\sin b\ \xi}{\xi}\,\mathrm{d}\xi + f(t)\,.$$

Usando la variabile di integrazione $y = b\xi$, otteniamo

$$\lim_{b\to\infty} f_b(t) = f(t) ,$$

il che prova l'asserto.

In particolare dal Teorema precedente vediamo che

COROLLARIO. *La funzione originale $f(t)$ è completamente determinata dalla sua trasformata di Laplace $F(p)$ (tranne che nei punti di discontinuità).*

Data una funzione della variabile complessa p, $F(p)$, è importante sapere quando essa possa esser pensata come trasformata di Laplace di un certo originale. Abbiamo già visto alcune condizioni necessarie affinché ciò avvenga (olomorfia di $F(p)$ in un semipiano $\operatorname{Re} p > \omega$, e decrescenza a zero per $\operatorname{Re} p \to +\infty$). Vediamo ora una condizione sufficiente.

TEOREMA. *Sia $F(p)$ olomorfa in un semipiano $\operatorname{Re} p > s_0$, e sia $\lim F(p) = 0$ per $\operatorname{Re} p \to \infty$ in ogni semipiano $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$, uniformemente rispetto ad $\arg p$.*

Se l'integrale

$$\text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,\mathrm{d}p$$

converge assolutamente, allora $F(p)$ è l'immagine, mediante la trasformata di Laplace, della funzione originale

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p \ . \tag{11.1}$$

Dimostrazione. Sia p_0 fissato con $\operatorname{Re} p_0 > a$. Allora, se $f(t)$ è definito dalla formula (11.1), si ha

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-p_0 t} \left\{ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p \right\} \mathrm{d}t \ .$$

L'integrale v.p. $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p$ si può scrivere, con

$$p = a + i\sigma \ , \ dp = i d\sigma \tag{11.2}$$

come e^{at} v.p. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma t} F(a + i\sigma) d\sigma$. Per l'ipotesi di convergenza assoluta di $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,\mathrm{d}p$, quest'ultimo integrale converge uniformemente rispetto a t; possiamo invertire allora l'ordine di integrazione, ottenendo

$$\int_0^\infty e^{-p_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\,\mathrm{d}p \int_0^\infty e^{(p-p_0)t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) \frac{\mathrm{d}p}{p - p_0} \ .$$

D'altra parte, per le ipotesi fatte su F, su ogni arco di circonferenza giacente nel semipiano $\mathrm{Re}\,p \geq a$, sappiamo che

$$\max\{|F(p)|\,,\ |p| = R\,,\ \mathrm{Re}\,p \geq a\} = \alpha_R$$

con

$$\lim_{R\to\infty} \alpha_R = 0\ .$$

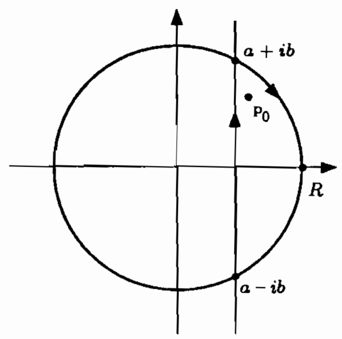

Figura 11.2.

Dunque

$$\left|\int_{|p|=R,\ \mathrm{Re}\,p\geq a} \frac{F(p)}{p-p_0}\,\mathrm{d}p\right| \leq \frac{\alpha_R \pi R}{R-|p_0|} \to 0 \text{ per } R\to\infty$$

e di conseguenza

$$-\frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)\frac{\mathrm{d}p}{p-p_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} F(p)\frac{\mathrm{d}p}{p-p_0} \text{ con } R > |p_0|\ ,$$

dove Γ_R è il contorno chiuso orientato positivamente formato dal segmento $a+ib \to a-ib$ e dall'arco $|p| = R$, $\mathrm{Re}\,p \geq a$. Il teorema dei residui fornisce però subito

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} F(p)\frac{\mathrm{d}p}{p-p_0} = F(p_0)\ .$$

Abbiamo così mostrato che $\mathcal{L}[f](p_0) = F(p_0)$ e quindi che f è l'originale di cui F è la trasformata di Laplace.

Notiamo che f è effettivamente un originale nel senso che gode delle proprietà prescritte. Infatti, per $t < 0$, il Lemma di Jordan garantisce che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|p|=R,\ \mathrm{Re}\,p\geq a} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p = 0$$

e dunque

$$\frac{1}{2\pi} \text{ v.p. } \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_R} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p \,\forall p > \mathrm{Re}\,p > a\,,$$

dove Γ_R è come sopra.

Ma $F(p)e^{pt}$ è olomorfa in $\mathrm{Re}\,p > a$, dunque

$$\int_{\Gamma_R} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p = 0\,.$$

Dunque $f = 0$ per $t < 0$.

Proviamo ancora che vale la maggiorazione "esponenziale" per $f(t)$. Infatti

$$|f(t)| \le \left|\frac{1}{2\pi}\right| e^{at} \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{\infty} |F(a+i\sigma)|\,\mathrm{d}\sigma = Me^{at} \quad \text{(cf. (11.2))}.$$

11.2. Proprietà della trasformata di Laplace

Nelle formule che seguono sottointenderemo sempre la funzione di Heaviside come fattore degli originali, e useremo la notazione

$$\underset{\text{originale}}{f(t)} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \underset{\text{trasformata di Laplace.}}{F(p)}$$

Abbiamo già notato la formula

$$1 \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{p}\,,$$

essa si estende facilmente alla seguente:

$$e^{p_0 t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{p-p_0}\,.$$

Consideriamo proprietà della trasformata di Laplace rispetto a operazioni algebriche e differenziali.

Linearità.

Sia f originale con ascissa di convergenza a_f. Sia g originale con ascissa di convergenza a_g. Allora, per ogni α, $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha f + \beta g$ è un originale con ascisse di convergenza $\max\{a_f, a_g\}$ e, se $f \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F$, $g \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet G$,

$$\alpha f + \beta g \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \alpha F + \beta G\,.$$

Omotetia.

Sia $f(t)$ originale con ascisse di convergenza a e $\alpha > 0$. Allora $f(\alpha t)$ è un originale con ascisse di convergenza αa, e, se $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p)$, allora

$$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) .$$

In effetti,

$$f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(\tau) e^{\frac{-p\tau}{\alpha}}\, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right) .$$

Derivazione dell'originale.

Siano f, f' originali, e $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p)$. Allora

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet pF(p) - f(0) .$$

Più in generale, f, $f' \dots f^{(n)}$ sono originali, allora

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

dove $f'(0)$, $f^{(k)}(0)$ designano la derivata *destra*, rispettivamente la derivata di k-esimo ordine *destra* in $t = 0$.

Dimostrazione. Abbiamo

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty f'(t) e^{-pt}\, \mathrm{d}t = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, \mathrm{d}t$$

dove, per le ipotesi fatte su f, $\lim_{t \to +\infty} f(t) e^{-pt} = 0$ e quindi

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet -f(0) + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, \mathrm{d}t = pF(p) - f(0) .$$

La dimostrazione per le derivate d'ordine superiore è la stessa.

Derivazione dell'immagine.

Sia f un originale con ascissa di convergenza σ_0. Allora, per ogni n intero positivo, $t^n f(t)$ è un originale con la stessa ascissa di convergenza, e, se

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p) ,$$

si ha

$$f(t) \cdot (-1)^n t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F^{(n)}(p) \ .$$

Dimostrazione. Poiché $F(p)$ è olomorfa per $\mathrm{Re}\, p > \sigma_0$, possiamo considerare $F'(p)$, $F''(p) \dots F^{(n)}(p), \dots$, funzioni olomorfe nello stesso semipiano. Poiché l'integrale converge uniformemente, possiamo derivare sotto segno d'integrale:

$$F'(p) = -\int_0^\infty t f(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t \ ,$$

$$F''(p) = \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t \ ,$$

e il risultato segue dal principio di induzione.

Integrazione dell'originale.

Sia f un originale con coefficiente di crescenza (ascissa di convergenza) σ_0. Allora $\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ è anch'esso originale con la stessa ascissa di convergenza, e, se

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(p) \ ,$$

si ha

$$\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \frac{F(p)}{p} \ .$$

Dimostrazione. È immediato che, se f è un originale, allora $g(t) = \int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$ è anch'esso un originale. Poiché $g'(t) = f(t)$ e $g(0) = 0$, detta G la trasformata di Laplace di $g(t)$, avremo, per il teorema di derivazione dell'originale $g(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, G(p)$,

$$g'(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, pG(p) - g(0) = pG(p) \ .$$

Ma $f(t) = g'(t)$, e poiché $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(p)$, si ha $F(p) = p\,G(p)$, ossia

$$G(p) = \frac{F(p)}{p} \ ,$$

come si voleva.

Integrazione dell'immagine (divisione per l'originale).

Sia $f(t)$ un originale, e supponiamo che $\frac{f(t)}{t}$ sia anch'essa un originale. Allora, se $f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, F(p)$, si ha

$$\frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\, \int_p^\infty F(u)\,\mathrm{d}u \ .$$

Dimostrazione. Sia $g(t) := \frac{f(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, G(p)$. Per il risultato di derivazione dell'immagine, abbiamo

$$-f(t) = -tg(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, G'(p) \; .$$

Dunque, poiché $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(p)$, abbiamo $F(p) = -G'(p)$, e quindi, se p_0 è un numero complesso fissato con $\operatorname{Re} p_0 > \sigma_0 =$ ascissa di convergenza di f, abbiamo

$$G(p) = -\int_{p_0}^{p} F(u)\,\mathrm{d}u + C \; ,$$

con C costante. Possiamo determinare il valore della costante ricordando che deve valere $\lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} G(p) = 0$: così $C = \int_{p_0}^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u$ e dunque $G(p) = \int_{p}^{\infty} F(u)\,\mathrm{d}u$, come volevasi.

Traslazione dell'originale.

Sia f un originale, con $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(p)$, per ogni $\tau > 0$ si ha

$$f(t-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{-p\tau} F(p) \; .$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} f(t-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \int_0^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt}\,\mathrm{d}t &= \int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau) e^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} f(s) e^{-p(s+\tau)}\,\mathrm{d}s = e^{-p\tau} F(p) \; . \end{aligned}$$

Traslazione dell'immagine.

Sia f originale, con ascisse di convergenza σ_0, $f \circ\!\!-\!\!\bullet\, F$. Allora per ogni $p_0 \in \mathbb{C}$: $e^{p_0 t} f(t)$ è un originale con ascisse di convergenza $\sigma_0 + \operatorname{Re} p_0$, e

$$e^{p_0 t} f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(p - p_0) \; .$$

La dimostrazione è ovvia e segue immediatamente dalla definizione.

Usiamo i risultati visti sopra per calcolare la trasformata di Laplace di alcune funzioni:

(1) Dalla linearità segue

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$
$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega}\right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}\,.$$

Analogamente si ottiene:

$$\sinh \omega t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$$
$$\cosh \omega t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{p}{p^2 - \omega^2}\,.$$

(2) Dal teorema di derivazione dell'immagine si vede immediatamente che

$$t^n \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{n!}{p^{n+1}}\,, \qquad t^n e^{p_0 t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}$$
$$t \sin \omega t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}\,; \qquad t \cos \omega t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}\,.$$

(3) Mediante la proprietà di integrazione dell'originale possiamo ottenere le formule per le trasformate di $\cos \omega t$ partendo da quella di $\sin \omega t$:

$$\sin \omega t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\,; \qquad -\cos \omega t + 1 = \omega \int_0^t \sin \omega t \,\mathrm{d}\tau$$

e quindi, perché $\omega \int_0^t \sin \omega\tau \;\; \mathrm{d}\tau \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega}{p}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, impariamo che

$$1 - \cos \omega t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$$

ossia

$$\cos \omega t = \frac{1}{p} - \frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{p^2 + \omega^2 - \omega^2}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}\,.$$

(4) Dal termine di divisione dell'originale vediamo che, perché

$$\sin t \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{p^2 + 1}\,,$$

$$\frac{\sin t}{t} \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\; \int_p^\infty \frac{1}{u^2 + 1}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p$$

ossia

$$\int_0^\infty e^{-pt}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_p^\infty \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$$

in particolare, per $p = 0$, otteniamo l'integrale Euleriano

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right](p=0) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ .$$

(5) Dalla proprietà di integrazione dell'originale e dall'esempio precedente abbiamo

$$\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}$$

(la funzione a membro sinistro si chiama **Seno Integrale**

$$\operatorname{si} t := \int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,\mathrm{d}\tau)\ .$$

(6) Come applicazione del teorema di traslazione dell'immagine otteniamo immediatamente le formule

$$e^{-\lambda t}\sin\omega t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}\ ;\quad e^{-\lambda t}\cos\omega t \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$

$$e^{-\lambda t}t^n \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}\ .$$

(7) Dal teorema di traslazione otteniamo la seguente rappresentazione della **Trasformata di Laplace di Funzioni Periodiche**: sia $f(t)$ periodica di periodo $T > 0 : f(t+T) = f(t)$ per $t \geq 0$, allora vale la formula

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\int_0^T e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t}{1-e^{-pT}}\ .$$

Dimostrazione. Introduciamo la funzione

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & 0 \leq t < T \\ 0 & t > T,\ t < 0 \end{cases}$$

e poniamo $f_0(t) \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F_0(p)$. Possiamo scrivere $f(t) = f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2T) + \ldots$ e, per il teorema di traslazione:

$$F(p) = (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \ldots)F_0(p) = \frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}} \text{ se } \operatorname{Re} p > 0\ .$$

Ma

$$F_0(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Ciò prova l'asserto.

11.3. Teoremi di convoluzione

Teorema 1. *Siano $f(t)$, $g(t)$ originali, con $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(p)$, $g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet G(p)$. Allora la funzione*

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

è anch'essa un originale, ed è

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(p)G(p) .$$

Osservazione: la funzione $t \mapsto \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$ si chiama convoluzione (o prodotto di convoluzione) delle funzioni f e g; e si indica con $f * g = (f * g)(t)$. In base al risultato del teorema, si ha $f * g = g * f$. Il teorema precedente si esprime anche

$$f * g \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet F(p)G(p) .$$

Dimostrazione dell teorema. Si verifica facilmente che $f * g$ è effettivamente un originale (le prime due proprietà sono immediate; quanto alla maggiorazione, osserviamo che

$$\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \le M^2 \int_0^t e^{s_0\tau}e^{s_0(t-\tau)}\,\mathrm{d}\tau =$$
$$= M^2 t e^{s_0 t} \le \frac{M^2}{\varepsilon} e^{(s_0+\varepsilon)t}$$

dove $\varepsilon > 0$ può esser scelto arbitrariamente piccolo.

Calcoliamo ora l'immagine di $f * g$:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}t .$$

Questo è un integrale doppio esteso alla origine del piano $(t,\tau) : \tau \le t$, calcolato mediante formula di riduzione

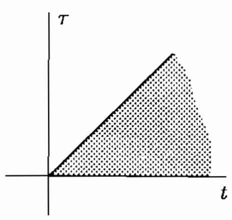

Figura 11.3.

(si integra prima per t fissato, per τ che varia da 0 e $\tau = t$, poi si integra su t da 0 a ∞). Poiché tale integrale converge assolutamente per $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, si può invertire l'ordine di integrazione:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} g(t-\tau)\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau}\,\mathrm{d}\tau \int_0^\infty g(s) e^{-ps}\,\mathrm{d}s \\ &= F(p)G(p)\ .\end{aligned}$$

Il teorema precedente ha un analogo nel caso del prodotto degli originali.

TEOREMA 2. *Siano $f(t)$, $g(t)$ originali con ascisse di convergenza s_1, s_2. Allora il loro prodotto è ancora un originale, e*

$$f(t)g(t) \circ\!\!\longrightarrow\!\bullet\ \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)\,\mathrm{d}q$$

dove $a > s_1$ e $\operatorname{Re} p > s_2 + a$.

Dimostrazione. È immediato verificare che $f(t)g(t)$ è un originale. Calcoliamone l'immagine

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Se $a > s_1$, otteniamo, in base alla formula di inversione:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty e^{-pt}\left[\text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt}\,\mathrm{d}q\right] g(t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad= \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left\{F(q)\int_0^\infty g(t)e^{-(p-q)t}\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}q\end{aligned}$$

dove l'inversione dell'ordine di integrazione è lecita data la convergenza assoluta dell'integrale.

Se, inoltre, supponiamo $\operatorname{Re} p > s_2 + a$, e così $\operatorname{Re}(p-q) > s_2$ (infatti, $\operatorname{Re} q = a$), allora $\int_0^\infty g(t)e^{-(p-q)t}\,\mathrm{d}t = G(p-q)$. Ciò prova il teorema.

11.4. TEOREMI DI SVILUPPO

Nella pratica, sono di grande importanza i teoremi che permettono di calcolare la funzione originale con sviluppo in serie a partire da sviluppi in serie per la funzione immagine (trasformata).

Per il Lemma di Jordan, $\int_{c_n'} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p \to 0$ per $n \to \infty$.

D'altra parte, per il Teorema dei residui, detti $a \pm ib_n$ i punti di intersezione di $\{|z| = R_n\}$ con la retta $\mathrm{Re}\, z = a$, abbiamo

$$\int_{a-ib_n}^{a+ib_n} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p + \int_{c_n'} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\,\{F(p)e^{pt}\}$$

dove "$\sum$" si estende ai residui della funzione nei poli contenuti all'interno del segmento circolare delimitato da c_n' e dalla retta $\mathrm{Re}\, z = a$. Poiché

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{n\to\infty} \int_{a-ib_n}^{a+ib_n} e^{pt} F(p)\,\mathrm{d}p\ ,$$

otteniamo subito il risultato voluto.

11.5. La trasformata di Laplace di potenze generalizzate

Ricordiamo anzitutto la caratterizzazione della funzione gamma di Eulero:

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty t^a e^{-t}\,\mathrm{d}t \ (\text{per } \mathrm{Re}\, a > -1)\ .$$

Sia $p \in \mathbb{R}$ e $p > 0$. Effettuando il cambiamento di variabili $s = t/p$, si scrive

$$\Gamma(a+1) = p^{a+1} \int_0^\infty s^a e^{-sp}\,\mathrm{d}s\ .$$

Otteniamo allora

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

per p reale e positivo, e quindi, per prolungamento analitico,

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

per *ogni* p con $\mathrm{Re}\, p > 0$ dove $p^{\alpha+1}$ è il ramo olomorfo determinato dalla scelta $|\arg p| < \pi/2$:

$$p^{\alpha+1} = e^{(\alpha+1)(\log|p| + i \arg p)}\ , \quad |\arg p| < \frac{\pi}{2}\ .$$

11.6. Applicazioni del teorema di convoluzione

Cominciamo con il calcolo di alcuni integrali:

1) $$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{t(5-t)}}\,\mathrm{d}t\ .$$

Possiamo considerare l'integrale proposto come il valore in 5 della convoluzione $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}}$. Per il teorema di convoluzione, $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$ poiché $\frac{1}{\sqrt{t}} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$, dove $|\arg \sqrt{p}| < \frac{\pi}{2}$. Dunque, $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \frac{\pi}{p}$, e quindi $\frac{1}{\sqrt{t}} * \frac{1}{\sqrt{t}} = \pi H(t)$ (funzione di Heaviside).

L'integrale in questione vale dunque $\pi H(5) = \pi$.

2)
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, \mathrm{d}x \; .$$

Posto $1 + x = \tau$, l'integrale diventa

$$\int_0^2 \sqrt{\frac{2-\tau}{\tau}}\, \mathrm{d}\tau = \sqrt{\tau} * \frac{1}{\sqrt{\tau}}\bigg|_{t=2} \; .$$

Ora, $\sqrt{\tau} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) p^{-3/2}$; $\frac{1}{\sqrt{\tau}} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) p^{-1/2}$, dunque

$$\sqrt{\tau} * \frac{1}{\sqrt{\tau}} \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) p^{-2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\pi} p^{-2} = \frac{\pi}{2p^2} \; .$$

Dunque $\left(\sqrt{\tau} * \frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)(t) = \frac{\pi}{2} t$, e l'integrale cercato vale π.

Consideriamo un'altra applicazione del teorema di convoluzione. Sia

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\, \mathrm{d}x \; ,$$

la funzione B di Eulero, che è definita per ogni p, q reali e positivi. Posto $F_{p,q}(t) = \int_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1}\, \mathrm{d}x$, si ha $F_{p,q}(1) = B(p,q)$; d'altra parte:

$$F_{p,q}(t) = [x^{p-1} * x^{q-1}](t) \; .$$

Quindi

$$\mathcal{L}[F_{p,q}](z) = \frac{\Gamma(p)}{z^p} \frac{\Gamma(q)}{z^q} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{z^{p+q}} \; .$$

Ma $\frac{1}{z^{p+q}}$ è la trasformata di Laplace di

$$\frac{1}{\Gamma(p+q)} t^{p+q-1} \; .$$

Di conseguenza: $F_{p,q}(t) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} t^{p+q-1}$, per cui ritroviamo, ponendo $t = 1$, la formula

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \; .$$