4.2 Teorema dei residui

Presentiamo ora un risultato importante che riguarda i residui.

Teorema 4.1 (dei residui) *Sia Ω una regione di frontiera Γ e sia $f(z)$ una funzione analitica in $\Omega \cup \Gamma$, eccetto che in un numero finito n di singolarità isolate z_k ($1 \leq k \leq n$) con z_k appartenenti all'interno di Ω. Allora:*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{j} \sum_{k=1}^{n} R_{f(z)}(z_k). \tag{4.9}$$

Dimostrazione Costruiamo (vedi figura 4.1) n cerchi C_k con $1 \leq k \leq n$, in modo

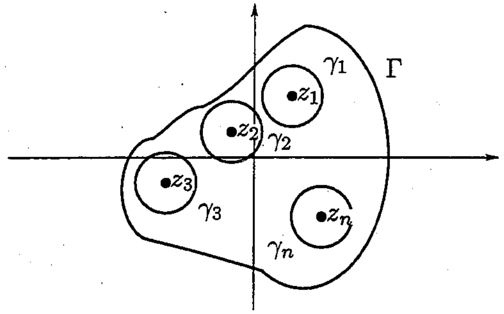

Fig. 4.1 Teorema dei residui.

che C_k abbia centro in z_k, bordo la circonferenza γ_k e raggio sufficientemente piccolo da contenere la sola singolarità z_k e da essere incluso in Ω:

$$C_k \subset \Omega, \qquad \forall k. \tag{4.10}$$

La funzione $f(z)$ è analitica nella regione

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \{C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k \cup \cdots \cup C_n\};$$

si può quindi applicare il teorema di Cauchy e ottenere che

$$\oint_{\Gamma} f(z)\ \mathrm{d}z - \oint_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_k \cup \ldots \cup \gamma_n} f(z)\ \mathrm{d}z = 0. \tag{4.11}$$

Utilizzando la proprietà additiva degli integrali al secondo membro della (4.11), si ha:

$$\oint_{\Gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \oint_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z + \cdots + \oint_{\gamma_k} f(z)\ \mathrm{d}z + \cdots + \oint_{\gamma_n} f(z)\ \mathrm{d}z \tag{4.12}$$

e, ricordando la definizione di residuo (vedi definizione 4.1), dalla (4.12) si ottiene

$$\oint_{\Gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{j} \left(R_{f(z)}(z_1) + R_{f(z)}(z_2) + \ldots + R_{f(z)}(z_k) + \ldots + R_{f(z)}(z_n) \right),$$

come volevasi dimostrare. ■

Osservazione 4.5 Il teorema dei residui permette di trasformare un integrale lungo una linea chiusa qualsiasi in una somma di integrali lungo circonferenze (residui). Ma la sua importanza è legata soprattutto alla possibilità di calcolare i residui nelle singolarità polari in modo molto semplice, senza ricorrere alla valutazione di integrali, come vedremo tra breve. ■

Osservazione 4.6 La definizione di residuo all'infinito data dalla (4.6) consente facilmente di osservare che:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(\infty) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{-\Gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = \\ &= -\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\Gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = \\ &= -\sum_{k=1}^{n} R_{f(z)}(z_k) \end{aligned} \tag{4.13}$$

ove z_k, con $1 \leq k \leq n$, sono tutte le singolarità di $f(z)$ al finito. La (4.13) esprime il fatto che, quando una funzione ha un numero finito di singolarità, *la somma di tutti i residui al finito e all'infinito di f(z) è nulla.* ■

4.2.1 Valor principale

Richiamiamo qui brevemente la definizione di *integrale improprio* su un intervallo limitato di una funzione non limitata.

Consideriamo una funzione $f(t)$ di variabile reale, continua nell'intervallo $[a, b]$, eccetto che in $t_0 \in (a, b)$ e tale che:

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \infty. \tag{4.14}$$

Definizione 4.3 (Integrale improprio) *Se $f(t)$ soddisfa le ipotesi precedenti, diciamo che l'integrale di $f(t)$ esiste in senso improprio, se esistono i due limiti*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{t_0 - \varepsilon} f(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \lim_{\eta \to 0^+} \int_{t_0 + \eta}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t; \tag{4.15}$$

in questo caso scriviamo:

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{t_0 - \varepsilon} f(t)\ \mathrm{d}t + \lim_{\eta \to 0^+} \int_{t_0 + \eta}^{b} f(t)\ \mathrm{d}t. \tag{4.16}$$

Esempio 4.3 *Calcolare l'integrale improprio*

$$\int_{-1}^{2} \log|t|\ \mathrm{d}t.$$

Si ha che

$$\int_{-1}^{2} \log|t|\ \mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{-1}^{-\varepsilon} \log|t|\ \mathrm{d}t + \lim_{\eta \to 0^+} \int_{\eta}^{2} \log|t|\ \mathrm{d}t =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\left[t\log|t|-t\right]_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\eta\to0^+}\left[t\log|t|-t\right]_{\eta}^{2} =$$
$$= -1+2\log2-2 = 2\log2-3 \tag{4.17}$$

■

Esempio 4.4 *Calcolare, al variare del parametro reale positivo α, l'integrale improprio*

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{|t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

Dalla definizione di integrale improprio, si ha

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{|t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{|t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t + \lim_{\eta\to0^+}\int_{\eta}^{2}\frac{1}{|t|^{\alpha}}\,\mathrm{d}t. \tag{4.18}$$

I due limiti della (4.18) esistono finiti se

$$\alpha<1,$$

mentre sono infiniti se $\alpha\geq1$. ■

Nelle applicazioni vi è tuttavia la necessità di dare significato ad integrali impropri non convergenti. In questi casi l'integrale deve essere interpretato nel senso del *valor principale* secondo Cauchy.

Definizione 4.4 (valor principale secondo Cauchy) *Sia $f(t)$ continua in $[a,b]$ eccetto che in $t_0\in\,]a,b[$ ove si comporti come nella (4.14); diciamo che l'integrale di $f(t)$ esiste nel senso del* valor principale secondo Cauchy, *se esiste finito il limite*

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\int_a^{t_0-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0+\varepsilon}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{4.19}$$

In questo caso, talvolta, si usa premettere v.p. *al simbolo di integrale e scrivere*

$$\text{v.p.}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\int_a^{t_0-\varepsilon} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t_0+\varepsilon}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t.\right\} \tag{4.20}$$

Esempio 4.5 *Calcolare*

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Posto $f(t)=1/t$, abbiamo visto nell'esempio precedente che l'integrale improprio di $f(t)$ nell'intervallo $[-1,2]$ non converge. Calcoliamo allora il valor principale secondo Cauchy, si ha:

$$\text{v.p.}\int_{-1}^{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to0^+}\left\{\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right\} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\{\log\varepsilon-\log1+\log2-\log\varepsilon\} = \log2, \tag{4.21}$$

in quanto i due $\log\varepsilon$ hanno segni opposti e quindi la loro somma è nulla prima del passaggio al limite. ■

La stessa situazione che abbiamo descritto con gli integrali reali si presenta con gli integrali di linea in campo complesso. Sia Ω una regione del piano complesso, che comprenda al suo interno un segmento dell'asse reale, che indichiamo con $\gamma=(a,b)$, orientato da a a b e sia $z_0\in\gamma$. Sia $f(z)$ una funzione analitica in Ω, eccetto che in z_0 ove si ha una singolarità polare di ordine n: quindi $f(z)=h(z)/(z-z_0)^n$, con $h(z)$ analitica e diversa da zero in z_0. Indichiamo con γ_ε una semicirconferenza di raggio ε e centro in z_0.

La questione relativa al valor principale, in campo complesso, è legata al seguente limite:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{h(z_0+\varepsilon e^{j\phi})}{\varepsilon^n e^{nj\phi}}\varepsilon j e^{j\phi}\,d\phi. \tag{4.22}$$

In effetti quando si ha un integrale lungo un cammino chiuso che contiene il segmento γ e con in $z_0\in\gamma$ una singolarità polare di ordine n, si applica il teorema dei residui a un cammino modificato vicino a z_0 con una semicirconferenza di raggio ε. Si deve poi sottrarre il limite della (4.22).

Vediamo ora di applicare queste considerazioni a integrali (valor principali) con poli del primo ordine lungo il cammino.

Nel caso in cui z_0 sia un polo del primo ordine il limite in (4.22) esiste sicuramente e diviene $2\pi j$ per mezzo residuo:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{h(z_0+\varepsilon e^{j\phi})}{\varepsilon e^{j\phi}}\varepsilon j e^{j\phi}\,d\phi = \pi j h(z_0) = 2\pi j\frac{1}{2}R_{f(z)}(z_0). \tag{4.23}$$

Nel caso di poli del primo ordine sul cammino di integrazione il teorema dei residui, può dunque essere presentato nel modo seguente:

Teorema 4.2 *Sia Γ il bordo regolare di una regione Ω e sia $f(z)$ analitica in $\Omega\cup\Gamma$ eccetto che in n poli z_k $(1\leq k\leq n)$ con $z_k\in\Omega$ ed eccetto che in m poli $\tilde z_i$ del primo ordine $(1\leq i\leq m)$ con $\tilde z_i\in\Gamma$, allora:*

$$v.p.\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi j\sum_{k=1}^{n}R_{f(z)}(z_k) + \pi j\sum_{k=1}^{m}R_{f(z)}(\tilde z_i) \tag{4.24}$$

4.3 Calcolo pratico dei residui nei poli

Questo paragrafo mostra la semplicità con cui si possono calcolare i residui nelle singolarià polari. Distinguiamo il calcolo tra i poli del primo ordine e quelli di ordine superiore, poichè quelli del primo ordine hanno in alcuni casi una formula pratica più semplice. Tuttavia l'espressione del residuo per poli multipli comprende anche i poli semplici

4.3.1 Calcolo pratico dei residui nei poli del primo ordine

Sia $f(z)$ una funzione che ha in z_0 un polo del primo ordine. Lo sviluppo di Laurent ha la forma

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots ,$$

ovvero:

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}\left(c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots\right) = \frac{h(z)}{(z - z_0)} ,$$

ove abbiamo posto

$$h(z) = \left(c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots\right)$$

con $h(z)$ analitica e diversa da zero in z_0. Si ha allora

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = h(z_0).} \tag{4.25}$$

Infatti, se indichiamo con γ un cerchio di raggio ε in cui h(z) è analitica, si ha:

$$R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_\gamma \frac{h(z)}{z - z_0}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} 2\pi \mathrm{j} c_{-1} = h(z_0).$$

Esempio 4.6 *Calcolare il residuo in $z_0 = 5$ di*

$$f(z) = \frac{z}{z - 5} .$$

Si ha che $h(z) = z$ (che è analitica e diversa da zero in 5) e quindi:

$$R_{f(z)}(5) = h(5) = 5.$$

■

Se $h(z)$ non è esplicitabile facilmente il residuo si ottiene nel modo seguente:

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).} \tag{4.26}$$

Esempio 4.7 *Calcolare il residuo in $z_0 = 0$ di*

$$f(z) = \frac{\cos z}{\sin z} .$$

Si ha:

$$R_{f(z)}(0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} z \frac{\cos z}{\sin z} = 1.$$

■

Un altro modo pratico per calcolare i residui in poli del primo ordine è il seguente. Supponiamo che $f(z)$ sia della forma

$$f(z) = \frac{n(z)}{d(z)} \qquad n(z_0) \neq 0,$$

dove $n(z)$ è analitica e diversa da zero in z_0, mentre $d(z)$ ha uno zero del primo ordine in z_0. Notiamo che, sotto queste ipotesi, la derivata $d'(z)$ della funzione $d(z)$ non è nulla in z_0. Abbiamo allora

$$\boxed{R_{f(z)}(z_0) = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)} .} \tag{4.27}$$

Infatti per la (4.26) si ha

$$R_{f(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) n(z)}{d(z)} ,$$

che è una forma indeterminata del tipo 0/0, a cui si può applicare la regola di de l'Hôpital, per cui

$$R_{f(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{n(z) + (z - z_0) n'(z)}{d'(z)} = \frac{n(z_0)}{d'(z_0)} .$$

Esempio 4.8 *Determinare le singolarità e calcolare i residui di*

$$f(z) = \frac{2z + 1}{z^2 - z - 2} .$$

Gli zeri del denominatore sono:

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1. \end{cases}$$

Poichè il numeratore è analitico e non si annulla in 2 e in -1, si ha che $z_1 = 2$ e $z_2 = -1$ sono poli del primo ordine. Possiamo calcolare i residui sia con la regola (4.25), che con la regola (4.27).

Iniziamo applicando la (4.25). Possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{\dfrac{2z + 1}{(z + 1)}}{(z - 2)} ;$$

la funzione $h(z)$ relativa al polo $z_1 = 2$ è quindi

$$h(z) = \frac{2z + 1}{(z + 1)} ,$$

per cui

$$R_{f(z)}(2) = \left[\frac{2z + 1}{(z + 1)}\right]_{z=2} = \frac{5}{3} .$$

Riscrivendo $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{\dfrac{2z + 1}{(z - 2)}}{(z + 1)}$$

possiamo identificare la funzione $h(z)$ relativa al polo $z_2 = -1$, che è:

$$h(z) = \frac{2z+1}{(z-2)},$$

per cui

$$R_{f(z)}(-1) = \left[\frac{2z+1}{(z-2)}\right]_{z=-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

Applicando invece la (4.27) si ha:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(2) &= \left[\frac{2z+1}{D\left(z^2-z-2\right)}\right]_{z=2} = \left[\frac{2z+1}{(2z-1)}\right]_{z=2} = \frac{5}{3}, \\ R_{f(z)}(-1) &= \left[\frac{2z+1}{D\left(z^2-z-2\right)}\right]_{z=-1} = \left[\frac{2z+1}{(2z-1)}\right]_{z=-1} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

■

Esempio 4.9 *Si calcolino i residui nei poli* $\pm j$ *del primo ordine della funzione*

$$f(z) = \frac{e^{jz}}{(z^2+1)}.$$

Utilizzando la regola (4.27) si ha:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(j) &= \left[\frac{e^{jz}}{D\left(z^2+1\right)}\right]_{z=j} = \left[\frac{e^{jz}}{2z}\right]_{z=j} = \frac{e^{-1}}{2j} = -j\frac{1}{2e}, \\ R_{f(z)}(-j) &= \left[\frac{e^{jz}}{D\left(z^2+1\right)}\right]_{z=-j} = \left[\frac{e^{jz}}{2z}\right]_{z=-j} = \frac{e}{-2j} = j\frac{e}{2}. \end{aligned}$$

■

Osservazione 4.7 I poli dell'ultimo esempio sono complessi coniugati mentre i corrispondenti residui non lo sono. Ciò è conseguenza del fatto che la funzione non è hermitiana. La regola che afferma che *a poli complessi coniugati corrispondono residui complessi coniugati* vale infatti solo se la funzione è hermitiana. Ricordiamo che $f(z)$ è hermitiana se e solo se:

$$f^*(z) = f(z^*). \tag{4.28}$$

Si può vedere facilmente che se $f(z)$ soddisfa alla (4.28) allora f assume valori reali per valori reali della variabile. Si può tuttavia mostrare anche il viceversa. Possiamo dunque assumere come definizione equivalente di hemitianità la seguente:

> $f(z)$ *è detta hermitiana se e solo se assume valori reali per valori reali della variabile.*

■

Esempio 4.10 *Calcolare i residui nei poli* $\pm j$ *del primo ordine della funzione*

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)}.$$

Utilizzando la regola (4.27) si ha:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(j) &= \left[\frac{e^z}{D\left(z^2+1\right)}\right]_{z=j} = \left[\frac{e^z}{2z}\right]_{z=j} = \\ &= \frac{e^j}{2j} = e^{-j\pi/2}\frac{e^j}{2} = \frac{1}{2}e^{(1-\pi/2)j} \\ R_{f(z)}(-j) &= \left[\frac{e^z}{D\left(z^2+1\right)}\right]_{z=-j} = \left[\frac{e^{-j}}{-2z}\right]_{z=-j} = \\ &= \frac{e^{-j}}{-2j} = \frac{1}{2}e^{j\pi/2}e^{-j} = \frac{1}{2}e^{(-1+\pi/2)j} \end{aligned}$$

Osserviamo che $f(z)$ è hermitiana: infatti per valori reali della varabile $z = x$ si ha

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1},$$

che è una funzione a valori reali. Abbiamo ottenuto che

$$R_f(-j) = (R_f(j))^*$$

a conferma di quanto visto nell'osservazione precedente. ■

Esempio 4.11 *Verificare che la funzione*

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \tag{4.29}$$

ha un polo semplice nell'origine e calcolarne il residuo.

Sviluppando $\sin z$ in serie di Taylor con centro $z_0 = 0$, si ottiene che

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 + \dots;$$

si ha subito che l'origine è un polo del primo ordine e che il residuo, che è il coefficiente di z^{-1}, è uguale a 1. D'altronde si ha pure che

$$R_f(0) = \lim_{z\to 0} z\frac{\sin z}{z^2} = 1.$$

■

4.3.2 Calcolo pratico dei residui nei poli multipli

Consideriamo una funzione $f(z)$ che abbia in z_0 un polo di ordine $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
f(z) = & \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \ldots + \\
& + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots ,
\end{aligned}
$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
f(z) = & \frac{1}{(z-z_0)^k}(c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + c_{-k+2}(z-z_0)^2 + \cdots + \\
& + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \cdots) = \\
= & \frac{h(z)}{(z-z_0)^k} ,
\end{aligned}
$$

ove abbiamo posto:

$$
h(z) = \left(c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \cdots\right) .
$$

La funzione $h(z)$ risulta analitica e diversa da zero in z_0. Si ha:

$$
\boxed{R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} h^{(k-1)}(z_0).} \tag{4.30}
$$

Se $h(z)$ non è esplicitabile facilmente il residuo si ottiene nel modo seguente:

$$
\boxed{R_{f(z)}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left(\frac{\mathrm{d}^{(k-1)}}{\mathrm{d}z^{(k-1)}} \left((z-z_0)^k f(z)\right) \right) .} \tag{4.31}
$$

Esempio 4.12 *Calcolare il residuo nel polo $z_0 = 1$ della funzione:*

$$
f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 .
$$

Si osservi che in 1 vi è un polo del secondo ordine e che la corrispondente funzione $h(z)$ è

$$
h(z) = (z+1)^2,
$$

da cui si ricava:

$$
h'(z) = 2(z+1);
$$

quindi per la (4.30) si ha:

$$
R_{f(z)}(1) = h'(1) = [2(z+1)]_{z=1} = 4.
$$

■

Esempio 4.13 *Calcolare il residuo nel polo $z_0 = \mathrm{j}$ della funzione*

$$
f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}z}}{z(z^2+1)^2} .
$$

Si osservi che in j vi è un polo del secondo ordine e che la corrispondente funzione $h(z)$ è

$$
h(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}z}}{z(z+\mathrm{j})^2}
$$

da cui si ricava:

$$
h'(z) = \frac{\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}z} z(z+\mathrm{j})^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}z}[(z+\mathrm{j})^2 + 2z(z+\mathrm{j})]}{z^2(z+\mathrm{j})^4} ,
$$

e quindi per la (4.30) si ha:

$$
R_{f(z)}(\mathrm{j}) = h'(\mathrm{j}) = \frac{\mathrm{j}\mathrm{e}^{-1}(-4\mathrm{j}) - \mathrm{e}^{-1}[-4-4]}{-16} = \frac{4+8}{-16e} = -\frac{3}{4e} .
$$

■

Esempio 4.14 *Calcolare il residuo in $z_0 = 0$ della funzione:*

$$
f(z) = \frac{\sin z}{z^3}.
$$

Sviluppando $\sin z$ in serie di potenze di z si ha:

$$
f(z) = \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} z^2 + \ldots .
$$

Dall'esame di questo sviluppo concludiamo che la funzione $f(z)$ ha un polo del secondo ordine in $z_0 = 0$ e che il residuo è

$$
R_{f(z)}(0) = c_{-1} = 0.
$$

Per il calcolo del residuo, possiamo anche utilizzare la (4.31), ottenendo

$$
R_{f(z)}(0) = \frac{1}{(1)!} \lim_{z \to 0} \left[\frac{d}{\mathrm{d}z} \left((z)^2 \frac{\sin z}{z^3} \right) \right] = \lim_{z \to 0} \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = 0.
$$

■

Osservazione 4.8 Si osservi che la funzione dell'esempio 4.14 non è analitica in $z_0 = 0$; tuttavia il suo residuo in $z_0 = 0$ è nullo. ■

4.4 Calcolo di integrali di linea con il metodo dei residui

Iniziamo in questo paragrafo ad applicare, al calcolo di integrali di linea lungo cammini chiusi in $\mathbb{C}$, le regole pratiche per il calcolo dei residui che abbiamo appena discusso.

Esempio 4.15 *Si calcoli l'integrale*

$$\oint_\gamma \frac{z}{z^3+1}\,\mathrm{d}z,$$

ove γ è l'unione del segmento da 2j *a* -2j *sull'asse immaginario e della semicirconferenza di raggio* 2 *e centro l'origine situata nel semipiano destro (vedi figura 4.2).*

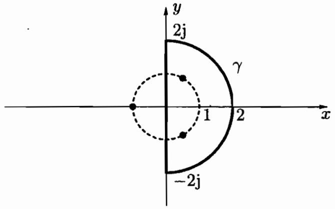

Fig. 4.2 Cammino γ di integrazione.

Cerchiamo i poli della funzione integranda $f(z)$:

$$z^3+1=0 \Longrightarrow z^3=-1=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi+2k\pi\mathrm{j}}$$

e quindi

$$\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi+2k\pi\mathrm{j}}\right)^{1/3}=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}5\pi/3}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}\,.\end{cases}$$

I poli della funzione integranda $f(z)$ sono tutti del primo ordine; i poli $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}$ ed $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}$ stanno all'interno della regione racchiusa da γ, mentre $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}$ è esterno. Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}) &= \left[z/(3z^2)\right]_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}} &= \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}\,,\\ R_{f(z)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}) &= \left(R_{f(z)}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3})\right)^* &= \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}\,.\end{aligned}$$

Infine per il teorema dei residui otteniamo:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \frac{z}{z^3+1}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{j}\left(R_{f(z)}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3})+R_{f(z)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3})\right)=\\ &=2\pi\mathrm{j}(1/3)\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/3}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/3}\right)=2\pi\mathrm{j}(1/3)2\cos(\pi/3)=(2/3)\pi\mathrm{j}\,,\end{aligned}$$

che conclude l'esercizio. ■

Esempio 4.16 *Calcolare il valor principale dell'integrale lungo il cammino Γ, formato dal segmento* $]-3,3[$ *sull'asse reale e dalla semicirconferenza superiore di raggio* 3 *e centro l'origine del piano complesso, della funzione*

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)\left(z^2+4\right)}\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\text{v.p.}\oint_\Gamma \frac{1}{(z-1)\left(z^2+4\right)}\,\mathrm{d}z &= 2\pi\mathrm{j}R_{f(z)}(2\mathrm{j})+\pi\mathrm{j}R_{f(z)}(1)=\\ &=2\pi\mathrm{j}\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\mathrm{j}\right)+\pi\mathrm{j}\left(\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{10}\pi.\end{aligned}$$

■

4.5 Integrali impropri di funzioni razionali con il metodo dei residui

Prendiamo in considerazione integrali tra $-\infty$ e $+\infty$ di funzioni razionali (rapporto di due polinomi), con il polinomio a denominatore di due gradi maggiore del grado del polinomio a numeratore, in modo che sia assicurata la convergenza a $\pm\infty$.

Teorema 4.3 *Sia $f(x)$ una funzione razionale tale per cui:*

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

e la differenza tra il grado di $Q(x)$ e il grado di $P(x)$ sia ≥ 2. Siano $f(z)$, $P(z)$ e $Q(z)$ le estensioni a $\mathbb{C}$ di $f(x)$, $P(x)$ e $Q(x)$. La funzione $f(z)$ non abbia sull'asse reale poli di ordine >1. Siano:

$$\begin{array}{lll} z_k & \text{poli di} f(z) \text{con} & 1\leq k\leq n \quad \operatorname{Im} z_k>0\\ \tilde{z}_i & \text{poli semplici di} f(z) \text{con} & 1\leq i\leq m \quad \operatorname{Im}\tilde{z}_i=0.\end{array}$$

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{j}\left(\sum_{k=1}^{n}R_{f(z)}(z_k)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}R_{f(z)}(\tilde{z}_i)\right).\tag{4.32}$$

Diamo un cenno della dimostrazione, nel caso in cui non ci siano poli sull'asse reale. Osserviamo innanzi tutto che

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R}f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{[-R,+R]}f(z)\,\mathrm{d}z,\tag{4.33}$$

ove si è pensato l'intervallo reale $[-R, +R]$ come un cammino nel piano complesso.

Il punto centrale della dimostrazione consiste nel mostrare che possiamo aggiungere il limite per $R \to \infty$ dell'integrale su una semicirconferenza di raggio R, in quanto tale limite è nullo. Se γ_R è la semicirconferenza superiore di centro l'origine di $\mathbb{C}$ e raggio R dobbiamo mostrare che

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 0. \tag{4.34}$$

Infatti, in virtù delle ipotesi sui gradi dei polinomi a numeratore e a denominatore di $f(z)$, si ha che per un'opportuna costante M

$$|f(z)| \leq M \left|\frac{1}{z^2}\right| \qquad \text{su } \gamma_R \tag{4.35}$$

e quindi

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\, dz\right| \leq M \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R\, d\vartheta = M\frac{\pi}{R} \xrightarrow{R\to+\infty} 0. \tag{4.36}$$

Se aggiungiamo il primo membro della (4.34) nella (4.33), otteniamo un integrale lungo il cammino chiuso $[-R, +R] \cup \gamma_R$, al quale possiamo applicare il teorema dei residui e, tenendo presente che per R grande in $[-R, +R] \cup \gamma_R$ sono racchiusi tutti i poli del semipiano superiore, si ha:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,+R]} f(z)\, dz + \lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \\ &= \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,+R]\cup\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} R_{f(z)}(z_k). \end{aligned} \tag{4.37}$$

■

Osservazione 4.9 Gli integrali impropri di funzioni razionali possono essere calcolati anche con i metodi classici della teoria delle funzioni reali di variabile reale. È noto infatti che le funzioni razionali ammettono primitive formate da funzioni elementari. Tuttavia il metodo dei residui del teorema 4.3 rende molto più agevole il calcolo. ■

Esempio 4.17 *Si calcoli con il metodo dei residui l'integrale improprio*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Utilizzando il teorema 4.3 si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = 2\pi j\, R_{f(z)}(j) = 2\pi j \frac{1}{2j} = \pi,$$

ove con $f(z)$ si è indicata la estensione al piano complesso della funzione integranda

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

che ha in $\pm j$ due poli del primo ordine; il residuo della funzione integranda nel polo j è:

$$R_{f(z)}(j) = \left[\frac{1}{D\,(1+z^2)}\right]_{z=j} = \left[\frac{1}{2z}\right]_{z=j} = \frac{1}{2j}.$$

■

Osservazione 4.10 L'integrale dell'esempio 4.17 può essere calcolato anche direttamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} [\arctan x]_{-R}^{+R} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

■

Esempio 4.18 *Calcolare con il metodo dei residui l'integrale improprio*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Utilizzando il teorema 4.3 si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx = 2\pi j\, R_{f(z)}(j) = 2\pi j \left(-\frac{1}{4}j\right) = \frac{\pi}{2}$$

ove con $f(z)$ si è indicata la estensione al piano complesso della funzione integranda:

$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}.$$

La funzione $f(z)$ ha in $\pm j$ due poli del secondo ordine; il residuo in j è:

$$\begin{aligned} R_{f(z)}(j) &= \left[\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+j)^2}\right]_{z=j} = \left[\frac{2z(z+j)^2 - 2z^2(z+j)}{(z+j)^4}\right]_{z=j} = \\ &= \frac{2j(2j)^2 - 2j^2 2j}{(2j)^4} = \frac{-8j+4j}{16} = -\frac{1}{4}j. \end{aligned}$$

■

4.6 Lemma di Jordan

Il lemma di Jordan è uno strumento che consente di calcolare con il metodo dei residui degli integrali impropri interessanti per le applicazioni. In particolare sono integrali di questo tipo quelli che intervengono nelle trasformate e nelle antitrasformate di Fourier e di Laplace. Distinguiamo, per chiarezza espositiva, due versioni del lemma di Jordan, una che riguarda integrali lungo l'asse reale e l'altra che riguarda integrali lungo cammini paralleli all'asse immaginario.

Per uniformarci alle notazioni abituali in campo applicativo, indichiamo la variabile reale con la lettera t (tempo) e la variabile complessa con $s = \sigma + j\omega$ (frequenze o pulsazioni complesse) (talvolta indicheremo anche $s = t + j\omega$).

Teorema 4.4 (lemma di Jordan A) *Sia data la funzione*

$$f(t) = \frac{P(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}}{Q(t)}$$

con

$t \in \mathbb{R}$,	$a \in \mathbb{R}$,	$a \neq 0$,	$s = t + \mathrm{j}\omega$,
grado di $Q(s)$ > grado di $P(s)$			
s_k zeri di $Q(s)$ con $1 \leq k \leq n$		$\mathrm{Im}\, s_k > 0$	$P(s_k) \neq 0$
$\tilde{s}_i$ zeri semplici di $Q(s)$ con $1 \leq i \leq m$		$\mathrm{Im}\, \tilde{s}_i = 0$	$P(\tilde{s}_k) \neq 0$
$\hat{s}_h$ zeri di $Q(s)$ con $1 \leq h \leq p$		$\mathrm{Im}\, \hat{s}_h < 0$	$P(\hat{s}_h) \neq 0$.

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}at}}{Q(t)}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} +2\pi\mathrm{j}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_{f(s)}(s_k) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} R_{f(z)}(\tilde{z}_i)\right) & a > 0 \\ -2\pi\mathrm{j}\left(\displaystyle\sum_{h=1}^{p} R_{f(s)}(\hat{s}_h) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} R_{f(z)}(\tilde{z}_i)\right) & a < 0. \end{cases} \tag{4.38}$$

Facciamo un cenno di dimostrazione, nel caso in cui non ci siano zeri di $Q(t)$ sull'asse reale. Osserviamo innanzi tutto che:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to+\infty}\int_{[-R,+R]} f(s)\,\mathrm{d}s \tag{4.39}$$

ove si è pensato l'intervallo reale $[-R,+R]$ come un cammino nel piano complesso. Ora il punto centrale della dimostrazione consiste nel mostrare che possiamo aggiungere il limite, per R che tende a $+\infty$, dell'integrale su una opportuna semicirconferenza di raggio R, in quanto tale limite è nullo. Sia γ_R una semicirconferenza di centro l'origine del piano complesso e raggio R, preciseremo in seguito in quali casi dovrà essere la semicirconferenza superiore e in quali quella inferiore, si ha:

$$\left|\frac{P(s)}{Q(s)}\right| \leq \frac{M}{R} \qquad \text{su } \gamma_R$$

per una opportuna costante M. Inoltre:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}as}\right| = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{j}a(\sigma+\mathrm{j}\omega)}\right| = \mathrm{e}^{-a\omega} \begin{cases} \overset{\omega\to+\infty}{\rightrightarrows} 0 & \text{se } a > 0 \\ \overset{\omega\to-\infty}{\rightrightarrows} 0 & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Si dovrà perciò scegliere γ_R nel semipiano superiore se $a > 0$ oppure γ_R nel semipiano inferiore se $a < 0$. Mostriamo ora che:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(s)\,\mathrm{d}s = 0. \tag{4.40}$$

Infatti parametrizzando γ_R come il luogo delle $s = R\mathrm{e}^{\mathrm{j}\vartheta}$, al variare di ϑ, si ha nel caso di $a > 0$:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(s)\,\mathrm{d}s\right| \leq M\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{-aR\sin\vartheta}}{R}R\,\mathrm{d}\vartheta = 2M\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-aR\sin\vartheta}\,\mathrm{d}\vartheta \leq$$

$$\leq 2M\frac{1}{aR}\left[-\mathrm{e}^{-aR\pi/2}+1\right] \overset{R\to+\infty}{\rightrightarrows} 0 \tag{4.41}$$

e analogamente nel caso di $a < 0$. Se ora noi aggiungiamo il primo membro della (4.40) nella (4.39) otteniamo un integrale lungo il cammino chiuso $[-R,+R] \cup \gamma_R$, al quale possiamo applicare il teorema dei residui, tenendo presente che per R grande in $[-R,+R] \cup \gamma_R$ sono compresi tutti i poli del semipiano:

$$I = \lim_{R\to+\infty}\int_{[-R,+R]} f(s)\,\mathrm{d}s + \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\oint_{[-R,+R]\cup\gamma_R} f(s)\,\mathrm{d}s = \pm 2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n} R_{f(s)}(s_k). \tag{4.42}$$

Il segno $\pm$ nell'ultimo membro (4.42) dipende dal fatto che si deve scegliere il segno $+$ se $a > 0$, in quanto $[-R,+R] \cup \gamma_R$ è nel semipiano superiore ed è percorso in senso antiorario, mentre si deve scegliere il segno $-$ se $a < 0$, in quanto $[-R,+R] \cup \gamma_R$ è nel semipiano inferiore ed è percorso in senso orario. ■

Esempio 4.19 *Calcolare con il metodo dei residui l'integrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Utilizzando il teorema 4.4 si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi\mathrm{j}\,R_{f(s)}(\mathrm{j}) & \text{se } -\omega > 0 \\ -2\pi\mathrm{j}\,R_{f(s)}(-\mathrm{j}) & \text{se } -\omega < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2\pi\mathrm{j}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega s}}{s+\mathrm{j}}\right]_{s=\mathrm{j}} = 2\pi\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{e}^{\omega}}{2\mathrm{j}} = \pi\mathrm{e}^{\omega} & \text{se } \omega < 0 \\ -2\pi\mathrm{j}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega s}}{s-\mathrm{j}}\right]_{s=-\mathrm{j}} = -2\pi\mathrm{j}\dfrac{\mathrm{e}^{-\omega}}{-2\mathrm{j}} = \pi\mathrm{e}^{-\omega} & \text{se } \omega > 0 \end{cases}$$

$$= \pi\mathrm{e}^{-|\omega|},$$

ove con $f(s)$ si è indicata l'estensione al piano complesso della funzione integranda:

$$f(s) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega s}}{1+s^2}$$

che ha due poli del primo ordine in $\pm\mathrm{j}$. ■

Esempio 4.20 *Calcolare con il metodo dei residui*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Osserviamo innanzitutto che l'integrale proposto è ricondotto a un integrale del tipo considerato nel teorema 4.4 grazie alle formule di Eulero; infatti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{Im}\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}}{t}\, \mathrm{d}t = \mathbf{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}}{t}\, \mathrm{d}t. \tag{4.43}$$

Il primo membro della (4.43) è l'integrale di una funzione continua, mentre il secondo membro è un valor principale. Possiamo applicare il teorema 4.4 e ottenere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t = \mathbf{Im}\ 2\pi\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,R_{f(s)}(0) = \mathbf{Im}\ 2\pi\mathrm{j}\,\frac{1}{2}\,1 = \pi,$$

ove con $f(s)$ si è indicata la funzione

$$f(s) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}s}}{s},$$

che ha lungo il cammino di integrazione un polo del primo ordine in 0. ■

Prendiamo ora in considerazione quegli integrali impropri, lungo cammini paralleli all'asse immaginario, che intervengono nelle antitrasformate di Laplace.

Teorema 4.5 (lemma di Jordan B) *Sia data la seguente funzione:*

$$f(s) = \frac{P(s)\mathrm{e}^{ts}}{Q(s)}$$

con

$t \in \mathbb{R}$, $\quad t \neq 0$, $\quad s = \sigma + \mathrm{j}\omega$,
grado di $Q(s)$ > grado di $P(s)$,
$Q(s)$ analitica per $\mathrm{Re}\, s = \sigma_0$,
s_k zeri di $Q(s)$con $1 \leq k \leq n$, $\quad \mathrm{Re}\, s_k > \sigma_0$, $\quad P(s_k) \neq 0$,
$\bar{s}_i$ zeri di $Q(s)$con $1 \leq i \leq m$, $\quad \mathrm{Re}\, \bar{s}_i < \sigma_0$, $\quad P(\bar{s}_k) \neq 0$.

Allora:

$$\int_{\sigma_0-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{j}\infty} \frac{P(s)\mathrm{e}^{ts}}{Q(s)}\, \mathrm{d}s = \begin{cases} -2\pi\mathrm{j}\sum_{k=1}^{n} R_{f(s)}(s_k) & t<0 \quad \mathrm{Re}\, s_k > \sigma_0 \\ 2\pi\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n} R_{f(s)}(\bar{s}_i) & t>0 \quad \mathrm{Re}\, \bar{s}_i < \sigma_0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Per verificare l'asserto si possono ripetere i ragionamenti del teorema 4.4, prendendo in considerazione semicirconferenze di centro $\sigma_0 + \mathrm{j}0$ e situate a destra oppure a sinistra della retta verticale per $\sigma_0 + \mathrm{j}0$ a seconda che

$$|\mathrm{e}^{ts}| = \mathrm{e}^{t\sigma}$$

tenda a zero per $\sigma \to +\infty$ (se $t < 0$) oppure per $\sigma \to -\infty$ (se $t > 0$). ■

Esempio 4.21 *Calcoliamo utilizzando il lemma di Jordan, nell'ipotesi che $\sigma_0 > 0$, il seguente integrale:*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{\sigma_0-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{j}\infty} \frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{st}\, \mathrm{d}s = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}(-2\pi\mathrm{j})\,0 & t<0, \\ \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}2\pi\mathrm{j}\,\left(R_{f(s)}(\mathrm{j}) + R_{f(s)}(-\mathrm{j})\right) & t>0. \end{cases}$$

Il calcolo dei residui fornisce

$$R_f(\mathrm{j}) = \left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{D(s^2+1)}\right]_{s=\mathrm{j}} = \left[\frac{\mathrm{e}^{st}}{2s}\right]_{s=\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}},$$
$$R_f(-\mathrm{j}) = (R_f(\mathrm{j}))^* = -\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}},$$

e quindi otteniamo:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{\sigma_0-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{j}\infty} \frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{st}\, \mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & t<0 \\ (\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})/(2\mathrm{j}) = \sin t & t>0. \end{cases}$$

■

Esempio 4.22 *Calcoliamo utilizzando il Lemma di Jordan, nell'ipotesi che $\sigma_0 > 0$, il seguente integrale:*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{\sigma_0-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{j}\infty} \frac{s}{s^2+1}\mathrm{e}^{st}\, \mathrm{d}s = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}(-2\pi\mathrm{j})\,0 & t<0 \\ \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}2\pi\mathrm{j}\,\left(R_{f(s)}(\mathrm{j}) + R_{f(s)}(-\mathrm{j})\right) & t>0 \end{cases}$$

Calcoliamo dapprima i residui, ottenendo

$$R_f(\mathrm{j}) = \left[\frac{s\mathrm{e}^{st}}{D(s^2+1)}\right]_{s=\mathrm{j}} = \left[\frac{s\mathrm{e}^{st}}{2s}\right]_{s=\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}}{2},$$
$$R_f(-\mathrm{j}) = (R_f(\mathrm{j}))^* = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t}}{2},$$

per cui si ha:

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{\sigma_0-\mathrm{j}\infty}^{\sigma_0+\mathrm{j}\infty} \frac{1}{s^2+1}\mathrm{e}^{st}\, \mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & t<0 \\ (\mathrm{e}^{\mathrm{j}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})/(2) = \cos t & t>0, \end{cases}$$

che conclude l'esercizio. ■

Esempio 4.23 *Calcoliamo, utilizzando il Lemma di Jordan, l'integrale*

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma_0 - \mathrm{j}\infty}^{\sigma_0 + \mathrm{j}\infty} \frac{1}{s} \mathrm{e}^{st} \, \mathrm{d}s \,,$$

prima nell'ipotesi che sia $\sigma_0 > 0$*, poi nell'ipotesi che sia* $\sigma_0 < 0$.

Iniziamo con il calcolo dell'unico residuo:

$$R_f(0) = \left[\mathrm{e}^{st}\right]_{s=0} = 1.$$

Se $\sigma_0 > 0$ abbiamo

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma_0 - \mathrm{j}\infty}^{\sigma_0 + \mathrm{j}\infty} \frac{1}{s} \mathrm{e}^{st} \, \mathrm{d}s = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0, \end{cases}$$

mentre, se $\sigma_0 < 0$, si ottiene

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{\sigma_0 - \mathrm{j}\infty}^{\sigma_0 + \mathrm{j}\infty} \frac{1}{s} \mathrm{e}^{st} \, \mathrm{d}s = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t > 0. \end{cases}$$

■

4.7 Scomposizione in fratti semplici

In questo paragrafo applichiamo alcuni dei risultati precedenti alla scomposizione in fratti semplici di funzioni razionali (rapporto di due polinomi). La scomposizione in fratti può essere fatta anche con metodi elementari e, in questa veste, è già nota al lettore.

Qui vogliamo fissare la nostra attenzione su un altro metodo, che fa intervenire il calcolo di residui. Questo metodo presenta molti vantaggi ed è utilizzato abitualmente in contesti applicativi di grande interesse, quali il calcolo dell'antitrasformata di Laplace di funzioni razionali, che vedremo in un capitolo successivo.

Data una funzione razionale

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_m(s)} \,,$$

ove $s = \sigma + \mathrm{j}\omega$ è la variabile complessa, $P_n(s)$ un polinomio di grado n e $\tilde{P}_m(s)$ un polinomio di grado m, ci si propone di scomporre $F(s)$ in una somma di termini che siano polinomi o funzioni razionali del tipo

$$\frac{A}{(s - s_0)^k}$$

oppure del tipo

$$\frac{B}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{Cs}{(s - \sigma_0)^2 + \omega_0^2} \,, \tag{4.45}$$

con A, B e C costanti e k intero positivo.

Iniziamo a trattare la scomposizione in fratti semplici dal caso in cui $F(s)$ ha solo poli semplici.

4.7.1 Poli semplici

Sia data la seguente funzione razionale:

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_m(s)} \tag{4.46}$$

ove $P_n(s)$ e $\tilde{P}_m(s)$ sono due polinomi di grado rispettivamente n e m; il denominatore $\tilde{P}_m(s)$ si annulli in m punti

$$s_1, \, s_2, \, s_3, \, s_4, \cdots s_m$$

tutti distinti, in cui non si annulla il numeratore.

È noto che scomporre $F(s)$ in fratti semplici significa scriverla nella forma

$$F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \cdots + \frac{A_m}{s - s_m} \,, \tag{4.47}$$

dove $Q_{n-m}(s)$ è il quoziente di P_n e $\tilde{P}_m$ (che è presente solo nel caso in cui $n \geq m$) e dove A_1, A_2, $\cdots A_m$ sono delle opportune costanti.

Osservazione 4.11 Talvolta la scomposizione in fratti semplici si ricava subito dall'esame della funzione $F(s)$, come nel caso seguente:

$$F(s) = \frac{2}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{s-1} + \frac{-1}{s+1} \,.$$

■

Osservazione 4.12 Vediamo un esempio di scomposizione con il noto metodo algebrico, che richiede la soluzione di un sistema lineare. Consideriamo la funzione

$$F(s) = \frac{2s^2 + 1}{(s+2)(s-1)}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{2s^2 + 1}{(s+2)(s-1)} &= Q_0 + \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1} = \\ &= \frac{Q_0(s+2)(s-1) + A(s-1) + B(s+2)}{(s+2)(s-1)} = \\ &= \frac{Q_0 s^2 + (Q_0 + A + B)s + (-2Q_0 - A + 2B)}{(s+2)(s-1)} \,. \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti dei numeratori del primo e dell'ultimo membro otteniamo il sistema

$$\begin{cases} Q_0 = 2 \\ Q_0 + A + B = 0 \\ -2Q_0 - A + 2B = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} Q_0 = 2 \\ A = -3 \\ B = 1 \end{cases} \tag{4.48}$$

e infine

$$F(s) = 2 + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s-1}\,.$$

Ricordiamo che, in generale, si ottiene un sistema del tipo (4.48), che fornisce in modo unico le costanti $A_1, A_2, \cdots A_m$ e i coefficienti di $Q_{n-m}(s)$; questo fatto giustifica la formula (4.47) della scomposizione. ∎

Uso dei residui

Dimostriamo ora che nella formula (4.47) le costanti $A_1, A_2, \cdots A_m$ possono essere ottenute con il calcolo di opportuni residui. Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_m$, m circonferenze di centro rispettivamente $s_1, s_2, s_3, \cdots s_m$ e raggio sufficientemente piccolo in modo da circondare una sola singolarità polare (vedi figura 4.3). Si ha che

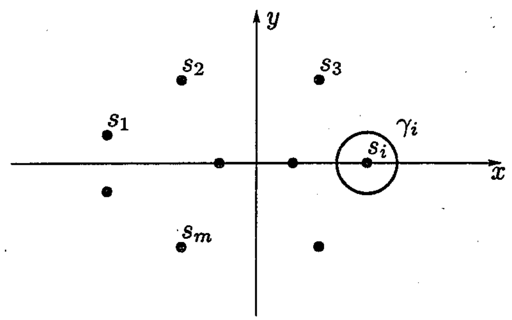

Fig. 4.3 Scomposizione in fratti.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} F(s)\,\mathrm{d}s = & \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} Q_{n-m}(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} \frac{A_1}{s-s_1}\,\mathrm{d}s + \cdots \\ & + \cdots + \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} \frac{A_i}{s-s_i}\,\mathrm{d}s + \cdots \\ & + \cdots + \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} \frac{A_m}{s-s_m}\,\mathrm{d}s\,; \end{aligned} \tag{4.49}$$

gli integrandi a secondo membro sono tutti analitici nel cerchio di bordo γ_i, eccetto quello che ha a denominatore $s - s_i$ per cui si ha:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} F(s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} \frac{A_i}{s-s_i}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} A_i\, 2\pi \mathrm{j} = A_i\,. \tag{4.50}$$

Ma si ha pure:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{\gamma_i} F(s)\,\mathrm{d}s = R_{F(s)}(s_i). \tag{4.51}$$

Il confronto tra le (4.50) e (4.51) mostra che

$$A_i = R_{F(s)}(s_i), \qquad i = 1, 2, \cdots m;$$

le costanti $A_1, A_2, \cdots A_m$ sono i residui di $F(s)$ in $s_1, s_2, \cdots s_m$. Quindi:

$$\boxed{F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se}\, n \geq m} + \frac{R_F(s_1)}{s-s_1} + \frac{R_F(s_2)}{s-s_2} + \cdots + \frac{R_F(s_m)}{s-s_m}\,.} \tag{4.52}$$

Esempio 4.24 *Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la seguente funzione razionale:*

$$F(s) = \frac{2s^2+1}{(s+2)(s-1)}\,.$$

Per la (4.52) si ha:

$$F(s) = \frac{2s^2+1}{(s+2)(s-1)} = Q_0 + \frac{R_{F(s)}(-2)}{s+2} + \frac{R_{F(s)}(1)}{s-1}\,.$$

Dal calcolo dei residui otteniamo:

$$\begin{aligned} R_{F(s)}(-2) &= \left.\frac{2s^2+1}{s-1}\right|_{s=-2} = \tfrac{9}{-3} = -3, \\ R_{F(s)}(1) &= \left.\frac{2s^2+1}{s+2}\right|_{s=1} = \tfrac{3}{3} = 1. \end{aligned}$$

Osservando che numeratore e denominatore sono due polinomi dello stesso grado, otteniamo subito che Q_0 è il rapporto dei coefficienti di grado massimo: $Q_0 = 2$. In conclusione, abbiamo:

$$F(s) = \frac{2s^2+1}{(s+2)(s-1)} = 2 + \frac{-3}{s+2} + \frac{1}{s-1}\,.$$

Il lettore è invitato a confrontare il metodo dei residui utilizzato in questo esercizio con il metodo del sistema utilizzato nell'osservazione 4.12. ∎

Esempio 4.25 *Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione razionale*

$$F(s) = \frac{15s^4 + 10s^3 - 45s^2 - 16s + 12}{(s^2-4)(s^2-1)s}\,.$$

La funzione ha come numeratore un polinomio di grado inferiore a quello del denominatore, per cui $Q_{n-m} = 0$. Per la (4.52) si ha:

$$F(s) = \frac{R_{F(s)}(-2)}{s+2} + \frac{R_{F(s)}(-1)}{s+1} + \frac{R_{F(s)}(0)}{s} + \frac{R_{F(s)}(1)}{s-1} + \frac{R_{F(s)}(2)}{s-2}.$$

Calcoliamo i residui:

$$\begin{aligned}
R_{F(s)}(-2) &= \left.\frac{15s^4+10s^3-45s^2-16s+12}{(s+1)s(s-1)(s-2)}\right|_{s=-2} &= \frac{24}{24} &= 1,\\
R_{F(s)}(-1) &= \left.\frac{15s^4+10s^3-45s^2-16s+12}{(s+2)s(s-1)(s-2)}\right|_{s=-1} &= \frac{-12}{-6} &= 2,\\
R_{F(s)}(0) &= \left.\frac{15s^4+10s^3-45s^2-16s+12}{(s+2)(s+1)(s-1)(s-2)}\right|_{s=0} &= \frac{12}{4} &= 3,\\
R_{F(s)}(1) &= \left.\frac{15s^4+10s^3-45s^2-16s+12}{(s+2)(s+1)s(s-2)}\right|_{s=1} &= \frac{-24}{-6} &= 4,\\
R_{F(s)}(2) &= \left.\frac{15s^4+10s^3-45s^2-16s+12}{(s+2)(s+1)s(s-1)}\right|_{s=2} &= \frac{120}{24} &= 5.
\end{aligned}$$

Quindi possiamo scrivere $F(s)$ nella forma

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s} + \frac{4}{s-1} + \frac{5}{s-2}.$$

■

4.7.2 Poli multipli

Prendiamo in considerazione una funzione razionale con un solo polo multiplo; la formula così ottenuta si estende poi facilmente al caso di funzioni razionali con più poli. Sia

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_m(s)}$$

con $\tilde{P}_m(s)$ avente uno zero di molteplicità m in s_0 e $P_n(s_0) \neq 0$. Si ha la seguente scomposizione:

$$F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + \frac{A_m}{(s-s_0)^m} + \frac{A_{m-1}}{(s-s_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(s-s_0)^2} + \frac{A_1}{(s-s_0)}, \tag{4.53}$$

ove il polinomio Q_{n-m} è presente solo se $n \geq m$; le costanti a numeratore hanno l'espressione

$$\begin{aligned}
A_m &= R_{(s-s_0)^{m-1}F(s)}(s_0) &= c_{-m}\,,\\
A_{m-1} &= R_{(s-s_0)^{m-2}F(s)}(s_0) &= c_{-(m-1)}\,,\\
&\vdots\\
A_2 &= R_{(s-s_0)F(s)}(s_0) &= c_{-2}\,,\\
A_1 &= R_{F(s)}(s_0) &= c_{-1}\,,
\end{aligned} \tag{4.54}$$

ove con

$$R_{(s-s_0)^{m-1}F(s)}(s_0),\ R_{(s-s_0)^{m-2}F(s)}(s_0),\ \cdots\ R_{(s-s_0)F(s)}(s_0),\ R_{F(s)}(s_0)$$

si sono indicati rispettivamente i residui delle funzioni

$$(s-s_0)^{m-1}F(s),\ (s-s_0)^{m-2}F(s),\ \cdots\ (s-s_0)F(s),\ F(s)$$

mentre

$$c_{-m},\ c_{-(m-1)},\ \cdots\ c_2,\ c_{-1}$$

indicano i coefficienti di indice negativo dello sviluppo di Laurent di centro s_0 di $F(s)$:

$$F(s) = \frac{c_{-m}}{(s-s_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(s-s_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_2}{(s-s_0)^2} + \frac{c_1}{(s-s_0)} + c_0 + c_1(s-s_0) + \cdots \tag{4.55}$$

Dimostriamo le formule (4.53) e (4.54). Il coefficiente A_1 si ottiene integrando la (4.53) su una circonferenza γ di centro s_0:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma F(s)\,ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma Q_{n-m}(s)\,ds + \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{A_m}{(s-s_0)^m}\,ds\, +&\\
+\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{A_{m-1}}{(s-s_0)^{m-1}}\,ds + \cdots + \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{A_2}{(s-s_0)^2}\,ds\, +&\\
+\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{A_1}{(s-s_0)}\,ds.&
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Ricordando la (4.5), tutti gli addendi a secondo membro della (4.56) sono nulli eccetto l'ultimo, che è

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma F(s)\,ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{A_1}{(s-s_0)}\,ds = \frac{1}{2\pi j}A_1\,2\pi j = A_1\,. \tag{4.57}$$

Integrando inoltre lo sviluppo di Laurent (4.55) di $F(s)$ centrato in s_0 si ha

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma F(s)\,ds = \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{c_{-m}}{(s-s_0)^m}\,ds + \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{c_{-(m-1)}}{(s-s_0)^{m-1}}\,ds + \cdots +$$

$$+\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{c_2}{(s-s_0)^2}\,ds + \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma \frac{c_1}{(s-s_0)}\,ds +$$
$$+\frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma c_0\,ds + \frac{1}{2\pi j}\oint_\gamma c_1(s-s_0)\,ds + \cdots = c_{-1}\,. \qquad (4.58)$$

Le (4.57) e (4.58) ci permettono di concludere che

$$A_1 = c_{-1} = R_{F(s)}(s_0).$$

Per gli altri coefficienti A_2, A_3, $\cdots$, A_m si integra su γ non la $F(s)$, ma le funzioni

$$(s-s_0)^{k-1}\,F(s) \qquad k=2,\,3,\,\cdots m$$

e si ottiene:

$$A_k = c_{-k} = R_{(s-s_0)^{k-1}F(s)}(s_0).$$

■

Esempio 4.26 *Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione razionale*

$$F(s) = \frac{s^5}{(s-1)^5}\,.$$

Per le (4.53) e (4.54) si ha:

$$F(s) = 1 + \frac{c_{-5}}{(s-1)^5} + \frac{c_{-4}}{(s-1)^4} + \frac{c_{-3}}{(s-1)^3} + \frac{c_{-2}}{(s-1)^2} + \frac{c_{-1}}{(s-1)}\,.$$

Il calcolo dei coefficienti c_{-k} con $k \in 1, 2, \cdots 5$ mediante i residui ci fornisce:

$$\begin{aligned}
c_{-5} &= R_{(s-1)^4F(s)}(1) = s^5\big|_{s=1} &&= 1,\\
c_{-4} &= R_{(s-1)^3F(s)}(1) = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{ds}s^5\right]_{s=1} = 5s^4\big|_{s=1} &&= 5,\\
c_{-3} &= R_{(s-1)^2F(s)}(1) = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{ds^2}s^5\right]_{s=1} = \tfrac{1}{2}20s^3\big|_{s=1} &&= 10,\\
c_{-2} &= R_{(s-1)F(s)}(1) = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{ds^3}s^5\right]_{s=1} = \tfrac{1}{6}60s^2\big|_{s=1} &&= 10,\\
c_{-1} &= R_{F(s)}(1) = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{ds^4}s^5\right]_{s=1} = \tfrac{1}{24}120s\big|_{s=1} &&= 5.
\end{aligned}$$

Osservando poi che la nostra funzione ha a numeratore e a denominatore due polinomi dello stesso grado, otteniamo subito che Q_0 è il rapporto dei coefficienti di grado massimo: $Q_0 = 1$. Quindi

$$F(s) = 1 + \frac{1}{(s-1)^5} + \frac{5}{(s-1)^4} + \frac{10}{(s-1)^3} + \frac{10}{(s-1)^2} + \frac{5}{(s-1)}\,.$$

■

Esempio 4.27 *Scomporre in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione razionale*

$$F(s) = \frac{2s^3+4s^2+3s-1}{(s+1)^2(s-1)}\,.$$

Si ha, con considerazioni analoghe a quelle dell'esercizio precedente, $Q_0 = 2$. Utilizzando la (4.52) per il polo semplice $s_1 = 1$ e le (4.53) e (4.54) per il polo doppio $s_2 = -1$ si ha:

$$F(s) = 2 + \frac{R_{F(s)}(1)}{(s-1)} + \frac{c_{-2}}{(s+1)^2} + \frac{c_{-1}}{(s+1)}\,.$$

Ora il calcolo dei coefficienti è dato da:

$$\begin{aligned}
& R_{F(s)}(1) &&= \left.\frac{2s^3+4s^2+3s-1}{(s+1)^2}\right|_{s=1} = \tfrac{8}{4} = 2,\\
c_{-2} = {}& R_{(s+1)F(s)}(-1) &&= \left.\frac{2s^3+4s^2+3s-1}{s-1}\right|_{s=-1} = \tfrac{-2}{-2} = 1,\\
c_{-1} = {}& R_{F(s)}(-1) &&= \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{ds}\frac{2s^3+4s^2+3s-1}{(s+1)^2}\right]_{s=-1} =\\
& &&= \left.\frac{(6s^2+8s+3)(s-1)-(2s^3+4s^2+3s-1)}{(s-1)^2}\right|_{s=-1} = 0,
\end{aligned}$$

da cui:

$$F(s) = 2 + \frac{2}{(s-1)} + \frac{1}{(s+1)^2}\,.$$

■

4.7.3 Poli semplici complessi coniugati

Il caso di poli semplici complessi coniugati rientra in quello già visto per i poli semplici; tuttavia, soprattutto in vista della antitrasformata di Laplace, riteniamo opportuno presentare la scomposizione in una forma che conserva a denominatore polinomi di secondo grado a coefficienti reali.

Prendiamo in considerazione una funzione razionale con una coppia di poli semplici complessi coniugati; si può poi estendere la formula ottenuta al caso di funzioni razionali con più poli. Sia

$$F(s) = \frac{P_n(s)}{\tilde{P}_2(s)}$$

con $\tilde{P}_2(s)$ avente una coppia di zeri semplici in $s_0 = \sigma_0 + \mathrm{j}\omega_0$ e $s_0^* = \sigma_0 - \mathrm{j}\omega_0$. Inoltre supponiamo che $P_n(s)$ e $\tilde{P}_2(s)$ siano polinomi a coefficienti reali (per cui la funzione $F(s)$ sia hermitiana. Si ha la seguente scomposizione:

$$F(s) = \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + 2\alpha \frac{s-\sigma_0}{(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2} - 2\beta \frac{\omega_0}{(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2}\,, \tag{4.59}$$

ove il polinimio Q_{n-m} è presente solo se $n \geq 2$; le costanti reali α e β hanno la seguente espressione

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{Re} R_{F(s)}(s_0), \\ \beta &= \operatorname{Im} R_{F(s)}(s_0), \end{aligned} \tag{4.60}$$

ovvero:

$$\alpha + \mathrm{j}\beta = R_{F(s)}(s_0). \tag{4.61}$$

Dimostriamo le formule (4.59) e (4.61). Esse si ottengono da quelle per i poli semplici [vedi (4.52)] osservando che, per funzioni razionali a coefficienti reali, a poli complessi coniugati corrispondono residui complessi coniugati. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} F(s) &= \underbrace{Q_{n-m}(s)}_{\text{se } n \geq m} + \frac{(\alpha+\mathrm{j}\beta)}{(s-\sigma_0)-\mathrm{j}\omega_0} + \frac{(\alpha-\mathrm{j}\beta)}{(s-\sigma_0)+\mathrm{j}\omega_0} = \\ &= Q_{n-m}(s) + \frac{(\alpha+\mathrm{j}\beta)[(s-\sigma_0)+\mathrm{j}\omega_0] + (\alpha-\mathrm{j}\beta)[(s-\sigma_0)-\mathrm{j}\omega_0]}{[(s-\sigma_0)-\mathrm{j}\omega_0][(s-\sigma_0)+\mathrm{j}\omega_0]} = \\ &= Q_{n-m}(s) + \\ &\quad + \frac{\alpha(s-\sigma_0) + \mathrm{j}\beta(s-\sigma_0) + \mathrm{j}\alpha\omega_0 - \beta\omega_0}{[(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2]} + \\ &\quad + \frac{\alpha(s-\sigma_0) - \mathrm{j}\beta(s-\sigma_0) - \mathrm{j}\alpha\omega_0 - \beta\omega_0}{[(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2]} = \\ &= Q_{n-m}(s) + \frac{2\alpha(s-\sigma_0)}{[(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2]} + \frac{-2\beta\omega_0}{[(s-\sigma_0)^2+\omega_0^2]}\,, \end{aligned}$$

che dimostra la (4.59). ■

Esempio 4.28 *Si scomponga in fratti semplici, con il metodo dei residui, la funzione*

$$F(s) = \frac{10s-22}{s^2+4s+13}\,.$$

Il denominatore si può scrivere come

$$s^2+4s+13 = (s+2)^2+3^2,$$

per cui $F(s)$ ha i due poli semplici complessi coniugati

$$\sigma_0 \pm \mathrm{j}\omega_0 = -2 \pm \mathrm{j}3,$$

e il residuo in $-2+\mathrm{j}3$ è

$$\begin{aligned} R_{F(s)}(-2+\mathrm{j}3) = \alpha + \mathrm{j}\beta &= \left[\frac{10s-22}{2s+4}\right]_{s=-2+3\mathrm{j}} \\ &= \frac{-20+30\mathrm{j}-22}{-4+6\mathrm{j}+4} = \frac{-42+30\mathrm{j}}{6\mathrm{j}} = 5+7\mathrm{j}. \end{aligned}$$

Utilizzando le (4.59) e (4.61) si ha dunque:

$$F(s) = 2\alpha\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - 2\beta\frac{3}{(s+2)^2+9} = 10\frac{s+2}{(s+2)^2+9} - 14\frac{3}{(s+2)^2+9}\,,$$

che è la scomposizione richiesta dall'esercizio. ■

Esempio 4.29 *Scomporre in fratti semplici la funzione*

$$F(s) = \frac{s^2}{2s^2+2s+1}\,.$$

Scrivendo il denominatore come

$$2s^2+2s+1 = 2\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right],$$

determiniamo i due poli semplici complessi coniugati, che sono

$$\sigma_0 \pm \mathrm{j}\omega_0 = -\frac{1}{2} \pm \mathrm{j}\frac{1}{2}\,.$$

Il residuo in $-1/2+\mathrm{j}/2$ è

$$R_{F(s)}\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{j}\frac{1}{2}\right) = \alpha+\mathrm{j}\beta = \left[\frac{s^2}{4s+2}\right]_{s=-1/2+\mathrm{j}/2} = \frac{1/4-\mathrm{j}/2-1/4}{-2+2\mathrm{j}+2} = \frac{-\mathrm{j}/2}{2\mathrm{j}} = -\frac{1}{4}\,.$$

Utilizzando le (4.59) e (4.61) si ha dunque:

$$F(s) = \frac{1}{2} + 2\alpha\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1/4} - 2\beta\frac{1/2}{(s+1/2)^2+1/4} = \frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2+1/4}\,.$$

■

Esempio 4.30 *Si scomponga in fratti semplici la funzione*

$$F(s) = \frac{3s^5+7}{2s^3(s^2+1)}\,.$$

Il denominatore ha uno zero triplo in zero e due zeri semplici complessi coniugati in $\pm$j; non annullandosi il numeratore di $F(s)$ in tali punti, $F(s)$ presenta un polo triplo in zero e due poli semplici complessi coniugati in $\pm$j. I residui e i coefficienti della scomposizione sono

$$
\begin{aligned}
c_{-3} = R_{s^2F(s)}(0) &= \left[\frac{3s^5+7}{2(s^2+1)}\right]_{s=0} = \frac{7}{2}\,,\\
c_{-2} = R_{sF(s)}(0) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{3s^5+7}{2(s^2+1)}\right]_{s=0} = 0\,,\\
R_{F(s)}(0) &= \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\frac{3s^5+7}{2(s^2+1)}\right]_{s=0} = -\frac{7}{2}\,,\\
R_{F(s)}(\mathrm{j}) &= \left[\frac{3s^5+7}{10s^4+6s^2}\right]_{s=\mathrm{j}} = \frac{7}{4}+\mathrm{j}\frac{3}{4}\,.
\end{aligned}
$$

Utilizzando le (4.53), (4.54), (4.59) e (4.61) si ha dunque:

$$
F(s) = \frac{3}{2} + \frac{7/2}{s^3} + \frac{-7/2}{s} + \frac{7}{2}\frac{s}{(s^2+1)} - \frac{3}{2}\frac{1}{(s^2+1)}
$$

che è la scomposizione richiesta dall'esercizio. ■