Problema di Cauchy

Data una eq. ne differenziale del primo ordine e date le condizioni iniziali sarà in generale valido il teorema seguente.

TEOREMA DI CAUCHY (Esistenza ed unicità)

Siano $W \subset E$ un sottoinsieme aperto di uno spazio vettoriale normato E ed $f: W \to E$ un'applicazione di classe C^1.
Sia ora $x_0 \in W$ allora $\exists$ $a > 0$ ed una unica soluzione $u: J \to W$ con $J = [t_0 - a, t_0 + a]$ del problema di Cauchy definito come:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

(inteso come sistema di equazioni differenziali)

Ci chiediamo ora cosa accade in termini di soluzioni per il caso di problemi ai limiti. In particolare vogliamo andare a scoprire quando la soluzione $\exists$ in tale tipo di problemi.

PROBLEMI AI LIMITI, GREEN'S FUNCTIONS ED STURM-LIOUVILLE THEORY

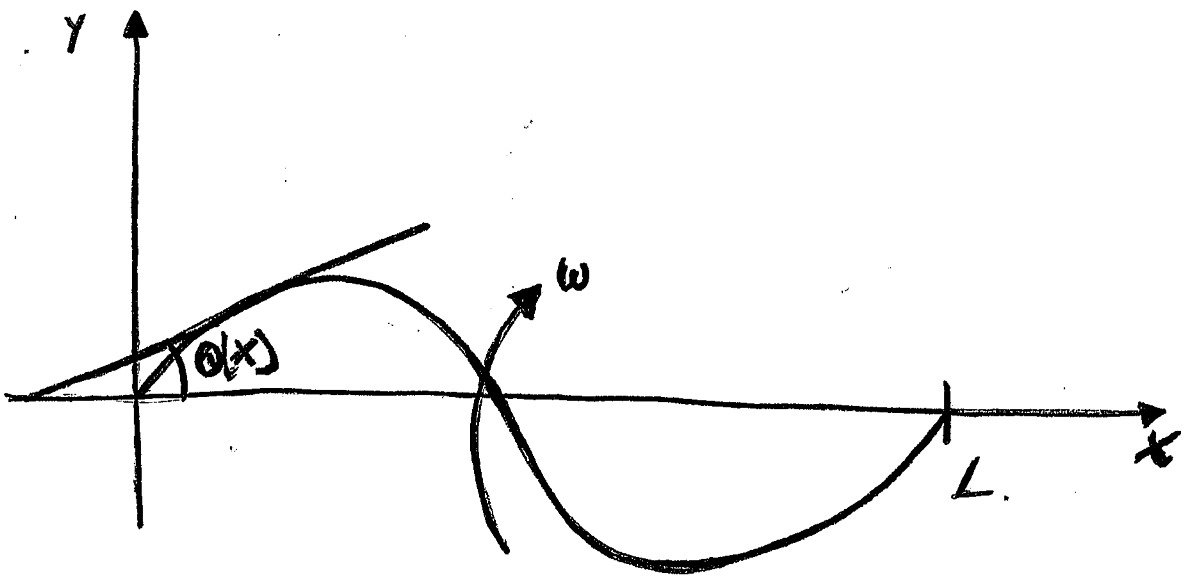


Fig. 1

Considero il problema esposto nella figura precedente in cui si ha una fune ancorata nei punti $x=0$ ed $x=L$ che ruota con velocità costante pari ad ω (velocità angolare) attorno all'asse delle x.

L'obiettivo è quello di andare a scrivere una equazione differenziale tale da descrivere la dinamica del sistema in oggetto.

Al fine di poter andare a scrivere tale eq.ne differenziale dovremo fare delle opportune assunzioni da cui partire.

a) La tensione sulla corda è tale per cui ogni forza di piegamento introdotta nel sistema è trascurabile rispetto alla tensione presente nella fune.

b) La tensione agisce lungo la tangente locale della corda ed essa ha una ampiezza costante pari a T;

c) Ogni movimento, spostamento nella direzione dell'asse delle x è trascurabile;

d) Gli effetti della forza di gravità sono trascurabili.

e) Non ci sono attriti, né dovuti alla resistenza dell'aria né dovuti al fissaggio della corda ad i suoi bordi;

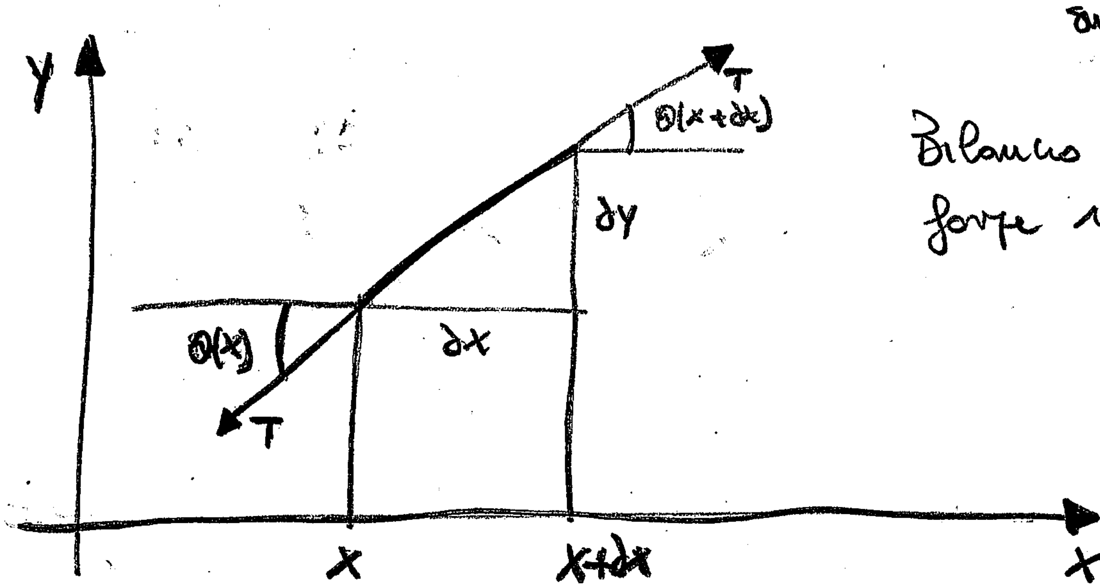
f) Lo spessore della corda è trascurabile, mentre essa possiede una densità costante ρ (massa per unità di lunghezza);

Chiamiamo ora come "ω" la velocità angolare della corda rispetto all'asse delle x e $\theta(t)$ è l'angolo tangente che la corda forma sempre con l'asse delle x (__nota bene__ $\theta(t)$ è sempre una importante funzione nel problema in esame)

Analizziamo ora una sezione della fune, indicata in figura 1, ed andiamo a scrivere il bilancio delle forze per tale sezione:

T(x) = tensione sulla corda.

Bilancio delle forze in <u>y</u>



<u>Figura 2</u>.

La relazione per il bilancio delle forze che otteniamo sarà la seguente:

$$T \sin\theta(x+\partial x) - T\sin\theta(x) = -\rho\omega^2 y\sqrt{\partial x^2+\partial y^2}$$

ora posso pensare di dividere il tutto per ∂x ed andare a fare il limite della relazione precedente e dunque scriverò ed otterrò quanto segue ⇒

$$\lim_{dx\to 0} \frac{T \,\text{sen}\,\theta(x+dx) - T\,\text{sen}\,\theta(x)}{dx} = -\rho\,\omega^2 y\,\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}.$$

$$T\,\frac{\partial}{\partial x}\left\{\text{sen}\,\theta(x)\right\} + \rho\,\omega^2 y\,\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 0$$

definendo a tale proposito quanto segue ed avrò dicendo ora che $\Rightarrow$ $\frac{\partial y}{\partial x} = \tan\theta$.

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\partial y}{\partial x}\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

infatti è come che ora che:

$$\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta}}} = \frac{\frac{\text{sen}\,\theta}{\cancel{\cos\theta}}}{\frac{1}{\cancel{\cos\theta}}} = \text{sen}\,\theta$$

da cui potrò scrivere sostituendo: (vedi pagina 2 bis)

$$T\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho\,\omega^2 y\left\{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}^2 = 0 \quad (*)$$

l'equazione sopra ottenuta deve essere risolta ponendo $y(0) = y(\ell) = 0$ che costituiscono le soluzioni ai bordi da imporre tale equazione non ammette soluzioni elementari a meno di quella banale con $y=0$.

Abbiamo:

② bis

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dy}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{d\operatorname{sen}\theta}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}\cancel{2}\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left[\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}\right]$$

che in termini trigonometrici equivale a dire

ora che ⇒

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} - \frac{\tan^2\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)^3}}\right] =$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{1+\cancel{\tan^2\theta} - \cancel{\tan^2\theta}}{(1+\tan^2\theta)\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right]$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left[\frac{1}{(1+\tan^2\theta)\sqrt{1+\tan^2\theta}}\right]$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\left[\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right]$$

da cui moltiplicando per $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ ottengo la (*)

ovvero scritto che ↓

$$T \frac{\partial}{\partial x}\left\{\sin \theta(x)\right\} + \rho\, \omega^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 0$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left\{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right\} + \rho\, \omega^2 y \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 0$$

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left\{\left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\} + \rho\, \omega^2 y \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left\{1\right\} + \rho\, \omega^2 y \left(1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^2 = 0.}$$

c.v.d.

Ricordando ora per la porzione c

si potrà andare a scrivere ciò che segue

ed avendo a tale proposito ⇒

$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$ e dunque potremo scrivere anche ciò

che segue ⇒

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \lambda y = 0}$$ con $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

dove $\lambda = \frac{\rho w^2}{T}$

Se cerchiamo una soluzione della forma

$y = A e^{mx}$ otteniamo $m^2 + \lambda = 0$ e dunque

ora che $m = \pm i \lambda^{\frac{1}{2}}$ e dunque la una

soluzione sarà la seguente e cioè:

$$\boxed{y = A e^{i\lambda^{\frac{1}{2}} x} + B e^{-i\lambda^{\frac{1}{2}} x}}.$$

Ponendo ora le condizioni ai bordi

si otterrà ciò che segue ⇒

per $y(0)=0$ avrò ora ossia che:

$$\boxed{y = A e^{i\lambda^{\frac{1}{2}}x} + B e^{-i\lambda^{\frac{1}{2}}x}}$$

da cui ho che: $y(0)=0$

$$\boxed{0 = A e^{i0} + B e^{-i0}}$$

$\Rightarrow \quad -A = +B$

ed ponendo $y(\ell)=0$ avrò che:

$$\boxed{-e^{i\lambda^{\frac{1}{2}}\ell} + e^{-i\lambda^{\frac{1}{2}}\ell} = 0}$$

$$\boxed{e^{i\lambda^{\frac{1}{2}}\ell} = e^{-i\lambda^{\frac{1}{2}}\ell} \quad (*)}$$

Ora posso scrivere però anche che

$\lambda^{\frac{1}{2}} = \alpha + i\beta$ (questo giunsolvendo il problema)

equiparando nella relazione precedente $(*)$

parte reale ed immaginaria $\Rightarrow$

$$\boxed{e^{i(\alpha+i\beta)\ell} = e^{-i(\alpha+i\beta)\ell}}$$

$$\boxed{e^{i\alpha\ell-\beta\ell} = e^{-i\alpha\ell+\beta\ell}}$$

da cui ho che:

$$e^{-\beta\ell + i\alpha\ell} = e^{-\beta\ell}(\cos\alpha\ell + i\,\mathrm{sen}\,\alpha\ell)$$

$$e^{\beta\ell - i\alpha\ell} = e^{\beta\ell}(\cos\alpha\ell - i\,\mathrm{sen}\,\alpha\ell)$$

$$\Rightarrow \quad \left(e^{-\beta\ell} - e^{\beta\ell}\right)\cos\alpha\ell = 0 \qquad (a)$$

$$\left(e^{-\beta\ell} + e^{\beta\ell}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\ell = 0 \qquad (b)$$

Per la (a) possiamo avere ora dunque quanto segue $\Rightarrow$

or $\left(e^{-\beta\ell} - e^{\beta\ell}\right) = 0$

or $\cos\alpha\ell = 0$.

il che implica or $\beta = 0$ or $(*)\ \alpha\ell = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

per "n" intero.

Allo stesso modo per la (b) potrò/dovrò avere ciò che segue ed avrò dunque che

$$\boxed{\left(e^{-\beta\ell} + e^{\beta\ell}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\ell = 0}$$

da cui ho ora che il caso $(*)$ lascia la precedente senza soluzioni $\Rightarrow$ che

$\beta = 0$ e dunque $\boxed{(\underbrace{e^0 + e^0}_{=2})\,\mathrm{sen}\,\alpha\ell = 0}$

$\boxed{2 i \cdot \sin \alpha \ell = 0}$ e dunque dovrò avere

ciò che segue $\Rightarrow$

$\boxed{\sin \alpha \ell = 0}$ ma questo significa

dire ora che $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha \ell = n\pi}$ con "n" intero

e viste le posizioni precedenti in cui si diceva

che $\lambda^{\frac{1}{2}} = \alpha + i\beta$, $\beta = 0$ $\lambda^{\frac{1}{2}} = \alpha$.

ed ho ora però che $\boxed{\alpha \ell = n\pi}$ e dunque

avremo anche che $\boxed{\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{n\pi}{\ell}}$

ed in termini di soluzioni

scriveremo $\Rightarrow$

$$\boxed{y = A_n \left(e^{\frac{i n\pi x}{\ell}} - e^{-\frac{i n\pi x}{\ell}} \right) = 2i A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)}$$

Per ottenere y come risultato reale scriviamo

$\boxed{A_n = \frac{a_n}{2i}}$ per $a_n \in \mathbb{R}$, il quale ci

porterà a dire:

$$\boxed{y = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell} \right)} \quad \text{per } n = 1, 2, \text{------}$$

avremo perciò per:

$$\boxed{n = 0} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

I valori di λ per i quali c'è una soluzione non banale del problema, che indichiamo ora $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}$ sono detti: AUTOVALORI del problema ed i limiti a cui corrisponderanno le funzioni $y = \sin \lambda^{\frac{1}{2}} x$ dette AUTOFUNZIONI

visto il fatto per cui le autofunzioni sono legate ad "n" diremo che si potranno definire delle "autofrequenze" per cui il problema preso in esame ha soluzione. Tali autofrequenze saranno le seguenti e cioè potrò dire ora che

$$\left[\begin{array}{l} a)\ \lambda = \frac{\rho w^2}{T} \\ b)\ \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \end{array}\right]$$

$$\boxed{w = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}}$$

visto che $\lambda = \frac{\rho\, w^2}{T}$ ed ora $\lambda^{\frac{1}{2}} = w\sqrt{\frac{\rho}{T}}$

ed ho che $\lambda^{\frac{1}{2}} = \frac{n\pi}{l}$. $\quad \frac{n\pi}{l} = w\sqrt{\frac{\rho}{T}}$.

$$\boxed{w = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}}$$

AUTOFREQUENZE

[$\exists$ tante infinite soluzioni, ma discrete]

II CASO DI DATI AI BORDI NON OMOGENEI

Consideriamo ancora il caso precedente o meglio e' esempio di ordini precedente in cui si è presa in considerazione una corda "rotante".

Vado ora a "supporre" che ci sia una forza esterna del tipo $T F(x)$ agente verso l'asse x ed i bordi l'incognita sarà il problema seguente $\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = F(x)}$$

ed avrò posto ora che $y(0) = y(l) = 0$

si potrà risolvere la precedente utilizzando il metodo di variazione delle costanti il quale fornirà la seguente soluzione ed ovvero avremo ora quindi che

$$\boxed{y(x) = A \cos \lambda^{\frac{1}{2}} x + B \operatorname{sen} \lambda^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_0^x F(s) \operatorname{sen} \lambda^{\frac{1}{2}} (x-s)\, ds \qquad (\#)}$$

per soddisfare le condizioni al contorno dovremo avere ciò che segue ed ovvero

$\Rightarrow$

la prima condizione è che si adotta ora $y(0)=0$ e dunque ho che

$\Rightarrow$ $\boxed{A=0}$. per $y(\ell)=0$ andremo, invece, a scrivere quanto segue $\Rightarrow$ (ricordando la #)

$y(\ell)=0 \Rightarrow$

$$\boxed{B \operatorname{sen} \lambda^{\frac{1}{2}}\ell + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}\int_0^\ell F(s) \operatorname{sen} \lambda^{\frac{1}{2}}(x-s)\, ds = 0} \quad (*)$$

nel caso in cui λ non è un autovalore si ha che $\operatorname{sen} \lambda^{\frac{1}{2}}\ell \neq 0$ e dunque la $(*)$ possiede una unica soluzione scritta a partire da:

$$\boxed{B = -\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} \ell}\int_0^\ell F(s) \operatorname{sen} \lambda^{\frac{1}{2}}(x-s)\, ds.}$$

sostituendo allora B nella $(\#)$ ho ottenuto la mia soluzione.

Allo stesso modo posso andare a scrivere ciò che segue nel caso in cui λ è un autovalore $\Rightarrow$

$\sin \lambda^{\frac{1}{2}} \ell = 0$ ci sarà in tale caso una soluzione per valori arbitrari di B definita come di seguito:

$$\boxed{y(x) = B \sin \lambda^{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}} \int_0^x F(s) \sin \lambda^{\frac{1}{2}} (x-s)\, ds \quad (\#\#)}$$

purché si abbia ora che:

$$\boxed{\int_0^\ell F(s) \sin \lambda^{\frac{1}{2}} (\ell - s)\, ds = 0} \qquad (**)$$

se ho che F(s) non soddisfa questo integrale essa non sarà una soluzione.

Questa situazione in cui in pratica può esservi o non esservi una soluzione per un problema ad i limiti è in contrasto con quanto accade nel caso di analisi dei problemi di Cauchy in cui data l'equazione differenziale ordinaria ed allo stesso tempo date le condizioni iniziali $\exists$ soluzione per Teo di Cauchy e l'

In termini fisici invece riportando tutto all'analisi del problema precedente, e cioè del problema della corda, possiamo dire quanto segue $\Rightarrow$

a) Nel caso di inserimento di un termine forzante se ora "w" non è un'autofrequenza si avrà un'unica soluzione.

b) Nel caso in cui invece, w è un autovalore e si ha allo stesso modo che il termine forzante soddisfa la condizione integrale (**) ci sarà una soluzione ovvero la (##) che è combinazione lineare della autosoluzione ed della risposta al termine forzante.

c) Nel caso in w è un autovalore ed inoltre si ha ora dunque che il termine forzante non soddisfa la condizione (**) allora si avrà che ⇒ non si hanno soluzioni

nota bene

Situazione di analisi molto diversa dai problemi di Cauchy (esposti a pagina zero)

III CASO GENERALE DI PROBLEMA AI LIMITI

Si è visto nelle pagine precedenti come il caso di problemi ad i limiti sia tale da potere non avere delle soluzioni.
Esaminiamo ora il caso generale di problema ad i limiti con termine forzante scrivendo perciò l'equazione che segue ed avendo che ⬇

$$\boxed{(p(x)\,y'(x))' + q(x)\,y(x) = f(x)} \;(*) \quad \text{con } \begin{array}{l} y(a)=0 \\ y(b)=0 \end{array}$$

Se ho ora che $u(x)$ è una soluzione di un problema omogeneo si potrà scrivere ciò che segue ed avendo ⟹

$$\boxed{(p(x)\,u'(x))' + q(x)\,u(x) = 0} \quad \text{con } \begin{array}{l} u(a)=0 \\ u(b)=0 . \end{array}$$

moltiplicando ora la $(*)$ per $u(x)$ ed integrando nell'intervallo $[a,b]$ si avrà perciò ora che ⬇

$$\boxed{\int_a^b u(x)\left\{(p(x)\,y'(x))' + q(x)\,y(x)\right\}dx = \int_a^b u(x)\,f(x)\,dx \quad (\#)}$$

ed ora andando ad integrare per parti si otterrà quanto segue ed ossia avremo ⟹

$$\int_a^b u(x)\,\big(p(x)\,y'(x)\big)'\,dx =$$

$$\big[u(x)\;p(x)\;y'(x)\big]_a^b - \int_a^b p(x)\,y'(x)\,u'(x)\,dx.$$

$$= -\int_a^b p(x)\,y'(x)\,u'(x)\,dx.$$

ricordando che $u(a)=0$, $u(b)=0$.

Integrando ancora per parti ottengo da nuovo ciò che segue ➡

Parto da:

$$-\int_a^b p(x)\,y'(x)\,u'(x)\,dx$$

$$= -\big[p(x)\;u'(x)\;y(x)\big]_a^b + \int_a^b \big(p(x)\,u'(x)\big)'\,y(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \big(p(x)\,u'(x)\big)'\,y(x)\,dx$$

usando $y(a)=y(b)=0$. Sostituendo questa ultima espressione nella (#) ottengo ora dunque però che ⇒

$$\int_a^b y(x)\left\{(p(x)\,u'(x))' + q(x)\,u(x)\right\} dx = \int_a^b u(x)\, f(x)\, dx.$$

ed allora $u(x)$ è una soluzione del problema omogeneo:

$$\boxed{\int_a^b u(x)\, f(x)\, dx = 0}$$

IV FUNZIONI DI GREEN

Risolviamo ora la seguente:

$$\boxed{(p(x)\,y'(x))' + q(x)\,y(x) = f(x)} \quad \text{con} \quad \begin{matrix} y(a)=0 \\ y(b)=0 \end{matrix}$$

Utilizzando il metodo di variazione delle costanti, da tale metodo otteniamo ora ciò che segue ed ovvero che $\Rightarrow$

$$(*) \quad \boxed{y(x) = A\,u_1(x) + B\,u_2(x) + \int_{s=a}^{x} \frac{f(s)}{W(s)}\left\{u_1(s)\,u_2(x) - u_1(x)\,u_2(s)\right\} ds}$$

In cui ho che $u_1(x)$ ed $u_2(x)$ sono soluzioni del problema omogeneo ed $W(x) = u_1(x)\,u_2'(x) - u_1'(x)\,u_2(x)$ è il Wronskiano della equazione omogenea.

Imponendo in tale caso le condizioni ad i limiti si potrà dire ora di nuovo che ⟹

ricordo $y(a)=0 \qquad y(b)=0$

e le impongo ottenendo che ↓

$$A u_1(a) + B u_2(a) = 0$$

$$A u_1(b) + B u_2(b) = \int_a^b \frac{f(s)}{W(s)} \left\{ u_1(b) u_2(s) - u_1(s) u_2(b) \right\} ds$$

Purché ora $u_1(a) u_2(b) \neq u_1(b) u_2(a)$, possiamo risolvere questo sistema di equazioni ed andare a sostituire il risultato nella (*) ottenendo ora perciò

$$y(x) = \int_a^b \frac{f(s)}{W(s)} \frac{\left\{ u_1(b) u_2(s) - u_1(s) u_2(b) \right\} \left\{ u_1(a) u_2(x) - u_1(x) u_2(a) \right\}}{u_1(a) u_2(b) - u_1(b) u_2(a)} ds$$

$$+ \int_a^x \frac{f(s)}{W(s)} \left\{ u_1(s) u_2(x) - u_1(x) u_2(s) \right\} ds \qquad (**)$$

Questo tipo di soluzione formalmente corretta non è molto comoda da usare.

Al fine di migliorare la precedente

si può ora notare che le funzioni definite come:

$$\boxed{v_1(x) = u_1(a)\,u_2(x) - u_1(x)\,u_2(a)}$$ ed

$$\boxed{v_2(x) = u_1(b)\,u_2(x) - u_1(x)\,u_2(b)}$$ che appaiono

nella (* *) come prodotto. sono delle combinazioni lineari delle soluzioni del problema omogeneo e dunque sono a loro volta soluzioni del problema omogeneo. Esse soddisfano a loro volta le condizioni ad i limiti. ovvero ho che $v_1(a) = v_2(b) = 0$

Viste le considerazioni appena fatte ha senso ora cercare una soluzione **per il** problema <u>non-omogeneo</u> che sia del tipo seguente ~~ed~~ ovvero ⟹

$$\boxed{y(x) = \int_a^b f(s)\, G(x,s)\, ds}$$

da qui andremo a dire di nuovo ora ciò che segue dove diremo anche ciò che segue

$$\boxed{y(x) = \int_a^b f(s)\, G(x,s)\, ds}$$

dove avremo ora che:

$$G(x,s) = \begin{cases} V_1(s)\, V_2(x) = G_<(x,s) & \text{per } a \leq s < x \\ V_1(x)\, V_2(s) = G_>(x,s) & \text{per } x < s \leq b \end{cases}$$

Le funzioni $G(x,s)$ sono note come funzioni di Green per problemi ad i limiti.

Dalla definizione si evince in modo chiaro ora quindi che G è continua in $s = x$ ed anche ora che $y(a) = 0$ ed $y(b) = 0$ infatti, si avrà a tale proposito ciò che segue ed ovvero potremo dire che

$$G_>(a,s) = V_1(x)\, V_2(s)$$

ora ho che $V_1(x) = u_1(a)\, u_2(x) - u_1(x)\, u_2(a)$

$$V_1(a) = u_1(a)\, u_2(a) - u_1(a)\, u_2(a) = 0 .$$

ma ho ora quindi che $\Rightarrow$

$G_>(a,s) = 0$ e da qui andrò a dire ora che $\Rightarrow$.

$$y(a) = \int_a^b G_>(a,s)\, f(s)\, ds = 0 .$$

Calcolando ora la derivata parziale della precedente rispetto ad x, si troverà dunque la seguente e cioè potremo dire $\Rightarrow$

identità di Abel $W = C e^{-\int_0^x g(s)ds}$

$$G_x(x, s = x^-) - G_x(x, s = x^+) =$$

$$v_1(x)\, v_2'(x) - v_1'(x)\, v_2(x) = W = \frac{C}{p(x)}$$

Per questa ultima espressione dobbiamo ora vedere il legame con $y(x)$ ed andare a trovare il valore di C nella precedente.

Per fare questo, riscriviamo la $y(x)$ come qui di seguito ed ovvero dicendo anche ora quanto segue $\Rightarrow$

$$\boxed{y(x) = \int_a^x G_<(x,s)\, f(s)\, ds + \int_x^b G_>(x,s)\, f(s)\, ds}$$

Differenziando ora sotto il segno di integrale otteniamo di nuovo $\Rightarrow$

$$y'(x) = \int_a^x G_{<,x}(x,s)\, f(s)\, ds + \cancel{G_<(x,x)\, f(x)} +$$

$$\int_x^b G_{>,x}(x,s)\, f(s)\, ds - \cancel{G_>(x,x)\, f(x)}$$

Viste le proprietà di continuità delle funzioni di Green posso semplificare i termini sopra indicati e riscrivere il tutto come segue ed ovvero avrò quindi che ↓

$$y'(x) = \int_a^x G_{<x}(x,s)\, f(s)\, ds + \int_x^b G_{>x}(x,s)\, f(s)\, ds$$

$$= \int_a^x v_1(s)\, v_{2x}(x)\, f(s)\, ds + \int_x^b v_{1x}(x)\, v_2(s)\, f(s)\, ds$$

$$y'(x) = \int_a^x v_1(s)\, v_{2x}(x)\, f(s)\, ds + \int_x^b v_{1x}(x)\, v_2(s)\, f(s)\, ds$$

ed allora potrò scrivere anche ciò che segue ed ossia: → ↓

$$(py')' = \int_a^x v_1(s)\, (p v_{2x})_x\, f(s)\, ds + p(x)\, v_1(x)\, v_{2x}(x)\, f(x)$$

$$+ \int_x^b (p v_{1x})_x\, v_2(s)\, f(s)\, ds - p(x)\, v_{1x}(x)\, v_2(x)\, f(x)$$

$$\boxed{= \int_a^x v_1(s)\,(p\,v_{2x})_x\, f(s)\,ds + \int_x^b (p v_{1x})_x\, v_2(s)\, f(s)\, ds + C f(x) \quad (\#\#)}$$

usando la definizione data ora per la mia C.

Sostituendo la $(\#\#)$ nella equazione differenziale

$$(p y')' + q y = f \quad \text{otteniamo}$$

$$\int_a^x v_1(s)\,(p v_{2x})_x\, f(s)\, ds + \int_x^b (p v_{1x})_x\, v_2(s)\, f(s)\, ds + C f(x)$$

$$+ q(x) \left\{ \int_a^x v_1(s)\, v_2(x)\, f(s)\, ds + \int_x^b v_1(x)\, v_2(s)\, f(s)\, ds \right\} = f(x)$$

Poiché ora $v_1(x)$ ed $v_2(x)$ sono soluzioni del problema omogeneo i termini integrali si annullano e se scelgo $C = 1$ la nostra rappresentazione sarà una soluzione per l'equazione differenziale in esame.

<u>Esempio</u>:

Consideriamo il problema ad i limiti scritto come di seguito $\Rightarrow$

Esempio:

$$y''(x) - y(x) = f(x) \quad \text{con} \quad y(0) = y(1) = 0$$

Una soluzione del problema omogeneo è la seguente e cioè:

$$\boxed{\begin{array}{l} y''(x) - y(x) = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1. \end{array}}$$

e dopo ho ora che le soluzioni del problema saranno le seguenti e cioè: e^{-x}, e^{x}

Ora una appropriata combinazione di queste ultime soddisfa $v_1(0) = v_2(1) = 0$ con

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$v_1(x) = A \sinh x = A\,\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$v_2(x) = B \sinh(1-x) = B\,\frac{e^{(1-x)} - e^{-(1-x)}}{2} =$$

che ci portano a scrivere la funzione di Green che sarà la seguente e cioè dunque ora dieg come di seguito

$$G(x,s) = \begin{cases} AB \sinh(1-x)\sinh s & \text{per } 0 \le s < x \\ AB \sinh(1-s)\sinh x & \text{per } x < s \le 1 \end{cases}$$

che è continua in $s = x$. In aggiunta avremo ora che $\Rightarrow$

$$G_x(x, s=x^-) - G_x(x, s=x^+)$$

$$= -AB\cosh(1-x)\sinh x - AB\sinh(1-x)\cosh x =$$

$$-AB[\cosh 1 \cancel{\cosh x}\sinh x + \sinh^2 x \sinh 1 - \sinh 1 \cos^2 hx - \cancel{\sinh x \cosh 1 \cosh x}]$$

$$= -AB\sinh 1$$

Allora ho che $p(x) = 1$ $\quad AB = \frac{-1}{\sinh 1}$

La funzione di Green saranno queste e cioè ho che

$$G(x,s) = \begin{cases} -\dfrac{\sinh(1-x)\sinh s}{\sinh 1} & \text{per } 0 \le s < x \\[2ex] -\dfrac{\sinh(1-s)\sinh x}{\sinh 1} & \text{per } x < s \le 1 \end{cases}$$

La soluzione del problema ai limiti non omogeneo potrà essere scritta allora come di seguito

$\Rightarrow$

$$y(x) = -\int_0^x f(s)\frac{\sinh(1-x)\sinh s}{\sinh 1}\,ds - \int_x^1 f(s)\frac{\sinh(1-s)\sinh x}{\sinh 1}\,ds$$

IDENTITÀ DI ABEL

1) Data una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

diremo ora che:

$$W(x) = C_1 e^{-\int_0^x p(\xi)\,d\xi}.$$

dove $W(x)$ è il wronskiano di due soluzioni e.i. della eq. diff.

Dim.:

Siano ora y_1 ed y_2 due soluzioni e.i. dell' eq.ne differenziale

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Il wronskiano delle due funzioni è definito come

$$W(x) = y_1' y_2 - y_1 y_2'$$

Derivando avremo ora che ↓

$$W'(x) = y_1'' y_2 + y_1' y_2' - y_1' y_2' - y_2'' y_1 \Rightarrow$$

$$W'(x) = y_1'' y_2 - y_1 y_2''$$

Se risolvo rispetto ad y'' l'equazione differenziale originale ottengo ora che ↓

$$y'' = -p(x)\,y' - q(x)\,y$$

Sostituendo questo risultato in $W'(x)$ ottengo ora che ⇒

$$W'(x) = \left(-p(x)\,y_1' - q(x)\,y_1\right)y_2 - y_1\left(-p(x)\,y_2' - q(x)\,y_2\right)$$

$$\Rightarrow \quad -p(x)\,y_1'y_2 - \cancel{q(x)\,y_1 y_2} + p(x)\,y_1 y_2' + \cancel{y_1 y_2\, q(x)}$$

$$\Rightarrow \quad -p(x)\left(y_1'y_2 - y_1 y_2'\right)$$

$$W'(x) = -p(x)\,W(x).$$ ⇐ Eq.ne differenziale lineare del primo ordine.

↓ da cui ottengo che:

$$\frac{dW}{W} = -p(x)\,dx.$$

$$\ln\left(\frac{W(x)}{W(0)}\right) = -\int_0^x p(\xi)\,d\xi\,.$$

$$\Rightarrow W(x) = \underbrace{W(0)}_{=C_1}\exp\left(-\int_0^x p(\xi)\,d\xi\right)$$

c.v.d.

Riscriviamo:

$$(py')' + qy = f.$$

$$\Rightarrow \quad py'' + p'y' + qy = f.$$

Considero l'omogenea associata

$$py'' + p'y' + qy = 0. \qquad \text{da qui scrivo}$$

$$\Rightarrow \quad y'' + \frac{p'}{p}y' + \frac{q}{p}y = 0.$$

Ricordando l'identità di Abel avrò anche

$$\boxed{W(x) = W(0)\, e^{-\int_0^t \frac{p'}{p}\, d\xi}.}$$

e da qui scrivo che:

$$\int_0^x \frac{p'}{p}\, d\xi = \ln p(t)\Big|_0^t = \ln p(t) - \ln p(0)$$

e dunque ho che

$$W(x) = W(0)\, e^{-\ln p(x) + \ln p(0)} \qquad \text{da cui.}$$

$$W(x) = \frac{W(0)\, e^{\ln p(0)}}{e^{\ln p(t)}} = \frac{C}{p(t)}$$

$$\boxed{\text{c.v.d.}}$$