Richiami di teoria ed esercizi risolti

NOTA: le definizioni di trasformata di Fourier e di Laplace date in questo testo si discostano rispetto a quelle adottate durante il corso.
Lo studente che vuole utilizzarlo dovrà preoccuparsi di riadattare il procedimento risolutivo.

ESERCIZIO 1 — Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{z}{x^2+z^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+z^2}\right)$$

a) Determinarne il dominio di definizione Ω e dire se $F\in C^1(\Omega)$.

b) F è irrotazionale?

c) F è conservativo su Ω?

d) E' possibile determinare un potenziale definito su tutto Ω?

Risoluzione

a) Risulta $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\neq 0,\ x^2+z^2\neq 0\}$

che corrisponde a tutto $\mathbb{R}^3$ escluso l'asse delle z e quello delle y. Sono perciò due rette che si intersecano in un punto (l'origine, dove le due rette sono ortogonali).
Si tratta di un dominio NON SEMPLICEMENTE CONNESSO, oltre alla classe di omotopia banale (le curve che si possono ridurre ad un punto), ve ne sono altre SEI; per esempio i rappresentanti di tali classi di omotopia possono essere

$$\gamma_1:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\operatorname{sen}\vartheta\\ z=1\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi) \qquad \gamma_2:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\operatorname{sen}\vartheta\\ z=-1\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi)$$

$$\gamma_3:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=+1\\ z=\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi) \qquad \gamma_4:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=-1\\ z=\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi)$$

$$\gamma_5:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\\ z=\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi) \qquad \gamma_6:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\\ z=-\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi).$$

b) Si tratta di calcolare il rotore di F.

$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{z}{x^2+z^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+z^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(0, -\partial_x\left(\frac{x}{x^2+z^2}\right) - \partial_z\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{z}{x^2+z^2}\right), \partial_x \frac{x}{x^2+y^2} + \right.$$

$$\left. + \partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{z}{x^2+z^2}\right)\right) =$$

$$= \left(0, \frac{-(x^2+z^2)+2x^2}{(x^2+z^2)^2} - \frac{(x^2+z^2)-2z^2}{(x^2+z^2)^2}, \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \left(0, \frac{+x^2-z^2-x^2+z^2}{(x^2+z^2)^2}, \frac{-x^2+y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

Il campo è dunque irrotazionale.

c) Poichè F è irrotazionale, per verificare se è conservativo su Ω bisogna solo verificare che la circuitazione su ognuna delle curve chiuse γ_k, $k=1,\dots,6$ del punto a) deve risultare zero. In realtà non servirà calcolare il lavoro su γ_5 e γ_6 in quanto tale lavoro è pari alla somma del lavoro su due delle precedenti.

Su γ_1 risulta

$$\oint_{\gamma_1} \langle F, T\rangle \, ds = \int_0^{2\pi} \left[\left(-\operatorname{sen}\vartheta - \frac{1}{1+\cos^2\vartheta}\right)(-\operatorname{sen}\vartheta) + \cos\vartheta \cdot \cos\vartheta \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\vartheta}{1+\cos^2\vartheta}\cdot 0\right] d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2 \vartheta + \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{1+\cos^2 \vartheta} + \cos^2 \vartheta \right) d\vartheta = 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{1+\cos^2\vartheta} d\vartheta$$

$$= 2\pi - \operatorname{arctg}(\cos \vartheta) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} = 2\pi \neq 0$$

Di conseguenza F non è conservativo su Ω.

d) No, visto che F non è conservativo su Ω.

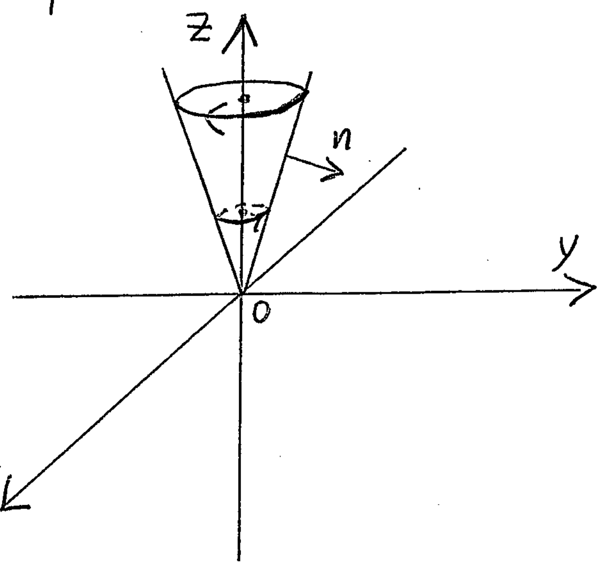
ESERCIZIO 2 – Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (-xy, -yz, -xz)$$

e la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ 1 \leq z \leq 4\}$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale sia negativa.



RISOLUZIONE

La superficie è quella (laterale) di un tronco di cono.
Parametrizziamola:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\vartheta & 1 \leq \rho \leq 4 \\ z = \rho & -\pi \leq \vartheta < \pi \end{cases}$$

Risulta poi

$$\mathrm{rot}\, F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -xy & -yz & -xz \end{pmatrix} = (+y, +z, x)$$

La formula da verificare è

$$\iint_S \langle \mathrm{rot}\, F, n \rangle \, d\sigma = \int_{+\partial S} \langle F, T \rangle \, ds$$

Calcoliamo il vettore normale ad S:

$$\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 1 \\ -\rho\operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} = (-\rho\cos\vartheta, -\rho\operatorname{sen}\vartheta, \rho)$$

La terza componente in tal modo sarebbe positiva: ci serve il vettore con verso opposto.

Per il primo membro si ha

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle \, d\sigma = \int_1^4\int_{-\pi}^{\pi} \langle (\rho\operatorname{sen}\vartheta, \rho, \rho\cos\vartheta), (\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta, -\rho) \rangle$$

$$= \int_1^4\int_{-\pi}^{\pi} (\rho^2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}\vartheta - \rho^2\cos\vartheta)\, d\rho\, d\vartheta = 0$$

visto che $\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta$, $\operatorname{sen}\vartheta$, $\cos\vartheta$ sono tutte periodiche a media nulla.

Per quanto riguarda il bordo lo si parametrizza come

$$\gamma_1: \begin{cases} x = 4\cos\vartheta \\ y = 4\operatorname{sen}\vartheta \quad -\pi \le \vartheta \le \pi \\ z = 4 \end{cases}$$

che gira però in senso opposto rispetto a quanto ci serve per il bordo $+\partial S$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \quad -\pi \le \vartheta \le \pi \\ z = 1 \end{cases}$$

che gira nel senso che ci serve per il bordo $+\partial S$.

Si ha

$$\int_{+\partial S} \langle F, T \rangle \, ds = \int_{-\gamma_1} \langle F, T \rangle \, ds + \int_{\gamma_2} \langle F, T \rangle \, ds =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \langle (-16 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta, -16 \operatorname{sen}\vartheta, -16\cos\vartheta), (-4\operatorname{sen}\vartheta, 4\cos\vartheta, 0) \rangle \, d\vartheta$$

$$+ \int_0^{2\pi} \langle (-\operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta, -\operatorname{sen}\vartheta, -\cos\vartheta), (-\operatorname{sen}\vartheta, \cos\vartheta, 0) \rangle \, d\vartheta$$

$$= -\int_0^{2\pi} +(64 \operatorname{sen}^2\vartheta \cos\vartheta + 64 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta) \, d\vartheta +$$

$$+ \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\vartheta \cos\vartheta + \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta) \, d\vartheta = 0$$

La verifica è conclusa.

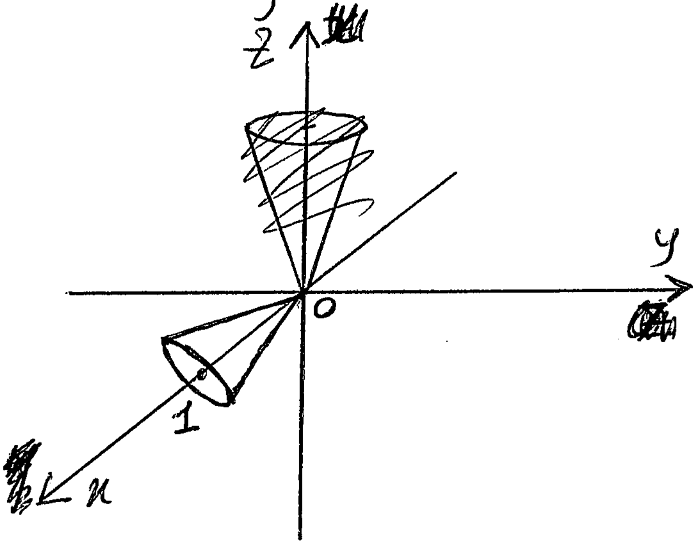
ESERCIZIO (16 dicembre 2005)

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left((x-1)^2, -2xy, 2z\right)$$

e l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 1\right\}$$



RISOLUZIONE

Si tratta di un cono con asse quello delle x. Ci interessa il tratto tra $[0,1]$.
Si tratta di verificare la formula

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle \, d\sigma$$

Si ha

$\operatorname{div} F = 2(x-1) - 2x + 2 = 0$, per cui il campo è a divergenza nulla. Il primo membro della formula da verificare è banalmente nullo.
Per quanto riguarda il secondo membro, la superficie è divisa in due parti, $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$, dove

$$\cancel{S_1 \begin{cases} x=1 \\ y=\rho\cos\vartheta \\ z=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq 1 \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi \qquad n_e=(1,0,0)}$$

~~S_1 (x=1)~~ S_1 è il cerchio di raggio 1 perpendicolare all'asse delle x nel punto $x=1$ e con centro in tale punto: si ha ~~$\langle F, n_e \rangle \equiv 0$~~

$F_{|S_1} = (0, -2y, 2z)$, $n_e = (1,0,0)$ e $\langle F, n_e \rangle \equiv 0$.

Infine la superficie S_2 è data da

$$\begin{cases} x = \rho \\ y = \rho\cos\vartheta \\ z = \rho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{array}$$

Per determinare il vettore normale calcolo

$$\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -\rho\operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta \\ 1 & \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta \end{pmatrix} = (-\rho,\ \rho\cos\vartheta,\ \rho\operatorname{sen}\vartheta)$$

La componente x è negativa, come è corretto che sia per il vettore uscente dalla superficie laterale del cono.

Risulta

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} < \left((\rho-1)^2, -2\rho^2\cos\vartheta, +2\rho\operatorname{sen}\vartheta\right), \left(-\rho, \rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta\right) > d\rho\, d\vartheta$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(-\rho(\rho-1)^2 - 2\rho^3\cos^2\vartheta + 2\rho^2\operatorname{sen}^2\vartheta\right) d\rho\, d\vartheta$$

$$= \int_0^1 2\pi\left(-\rho^3 + 2\rho^2 - \rho\right) - 2\pi\rho^3 + 2\pi\rho^2\, d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = 2\pi(1-1) = 0$$

e la verifica è compiuta

Formula integrale di Cauchy - Sia f analitica in $B(z,R)$ [1] e continua in $\overline{B(z,R)}$ allora

(1.3) $$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z,R)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

dove $\partial B(z,R)$ si intende percorso in senso antiorario.

Sviluppo di Laurent - Se f è analitica in $\Omega = B(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ e continua in $\overline{B(z_0,R)}\setminus\{z_0\}$ essa ammette lo sviluppo

(1.4) $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \forall z:\ 0 < |z-z_0| < R$$

i cui coefficienti sono dati dalla formula

(1.5) $$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(z_0,R)} \frac{f(w)\,dw}{(w-z_0)^{n+1}}$$

il verso di percorrenza è quello antiorario.

Classificazione delle singolarità isolate - z_0 è una singolarità isolata di f se $\exists R > 0$ t.c. $f: \{B(z_0,R)\setminus\{z_0\}\} \to \mathbb{C}$ è olomorfa e lo sviluppo di Laurent centrato in z_0 ha dei termini singolari (cioè $\exists a_n \neq 0$ con $n < 0$).

a) Una singolarità isolata z_0 è un polo di ordine k se $\exists\ k \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{-k} \neq 0$, $a_h = 0\ \forall h < -k$ (essendo a_n i coefficienti dello sviluppo centrato in z_0). I poli di ordine 1 si dicono semplici.

b) Una singolarità isolata z_0 si dice essenziale se esistono infiniti indici positivi k t.c. $a_{-k} \neq 0$.

Se z_0 è un polo si ha $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$.

Il comportamento nell'intorno di una singolarità essenziale è descritto dal seguente teorema.

Teorema 3 (Picard) - In ogni intorno di una singolarità essenziale la f assume tutti i valori complessi salvo al più uno.

Esempio - $f(z) = \exp(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ assume tutti i valori complessi ad eccezione dello zero in ogni intorno all'origine.

---

[1] $B(z,R) = \{w \in \mathbb{C}: |z-w| < R\}$.

CAPITOLO I
FUNZIONI ANALITICHE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

Sia Ω un insieme aperto ([1]) del piano complesso. Consideriamo una funzione $f\colon \Omega \to C$ $(z \to f(z))$. Useremo le seguenti notazioni:

$$z = x+iy = \rho\exp(i\theta)$$

dove

$$i = \sqrt{-1},\ x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z,\ \rho = |z| \quad e \quad \theta = \arg z .$$

Definizione 1 - f si dice derivabile in $z_0 \in \Omega$ se esiste

$$\underset{\substack{w \to 0 \\ w\in C\setminus\{0\}\ e\ z_0+w\in\Omega}}{\text{limite}} \quad \frac{f(z_0+w)-f(z_0)}{w}$$

■

Se esiste tale limite esso viene indicato con $f'(z_0)$ ed è chiamato derivata in senso complesso di f in z_0. Perciò l'esistenza di $f'(z_0)$ significa che

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \text{ t.c. } \quad \forall w \text{ t.c. } 0 < |w| < \delta$$

si ha

$$\left|\frac{1}{w}(f(z_0+w)-f(z_0))-f'(z_0)\right| < \varepsilon .$$

Equazioni di Cauchy-Riemann - Se $f = u+iv$, con u e v reali, è derivabile in $z_0 = x_0+iy_0$, allora u e v sono derivabili nel punto (x_0,y_0) e, in tale punto si ha

---

([1]) Cioè un insieme t.c. $\forall\ z\in\Omega\ \exists\ r > 0$ t.c. il disco $B(z,r)$ di centro z e raggio r è contenuto in Ω.

Teorema 5 (dei residui) - Siano: f analitica in Ω salvo alcune singolarità isolate z_i, e γ una curva chiusa a supporto contenuto in $\Omega \setminus \{z_i\}_i$ ed omotopa in Ω ad una costante. Si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma f(z)dz = \sum_i I(\gamma,z_i)\text{Res}(f,z_i)$$

■

ALCUNI LEMMI UTILI NEL CALCOLO DI INTEGRALI DEFINITI E DI TRASFORMATE DI FOURIER E LAPLACE

Lemma 1 - Per ogni curva continua γ si ha

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \max_t |f(\gamma(t))| \cdot \text{lunghezza di } \gamma$$

Indichiamo con $C_R = C_R(\theta_1,\theta_2)$ l'arco di circonferenza $\{z \in C : z = Re^{i\theta},\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$ percorso in senso antiorario.

Lemma 2 - Se esistono R_0, $C > 0$ e $\beta > 1$ t.c.

$$|f(z)| < \frac{C}{|z|^\beta} \qquad \forall\, z: |z| > R_0$$

allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R(\theta_1,\theta_2)} f(z)dz = 0 \qquad \forall\, \theta_1,\theta_2.$$

Lemma 2a - Se esistono ε_0, $C > 0$ e $\alpha < 1$ t.c.

$$|f(z)| \leqslant \frac{C}{|z|^\alpha} \qquad \forall\, z: 0 < |z| < \varepsilon_0$$

allora

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon(\theta_1,\theta_2)} f(z)dz = 0 \qquad \forall\, \theta_1,\theta_2.$$

Teorema (Cauchy) - Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ il cui bordo $\partial\Omega$ è costituito da un insieme finito di curve chiuse, differenziabili a tratti e a due a due disgiunte. Su tale bordo si consideri lo orientamento tale che l'insieme Ω venga a trovarsi a sinistra percorrendo il bordo stesso.

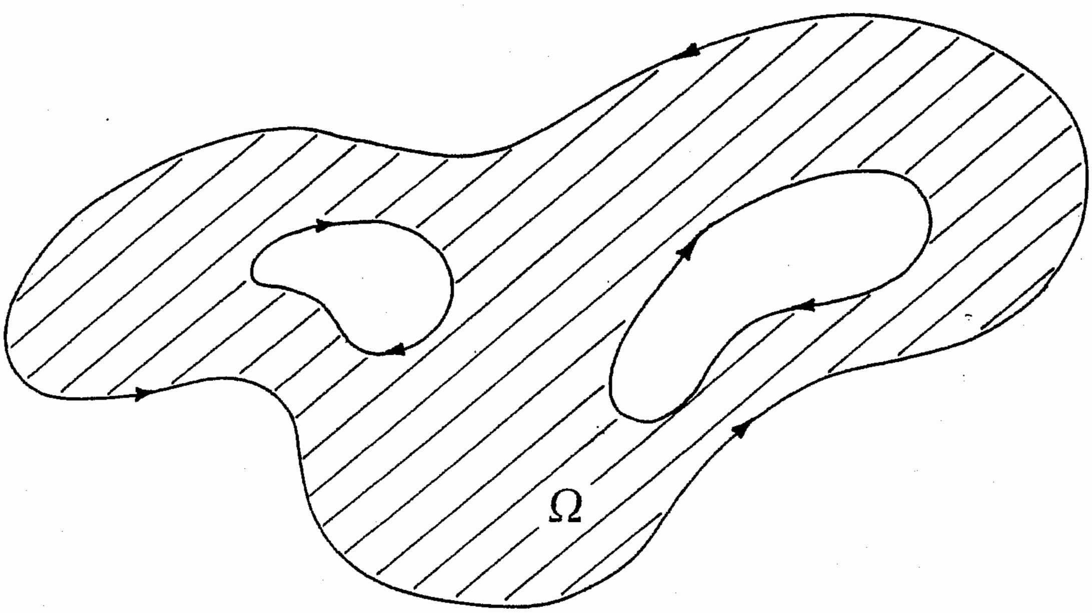


Fig.1

Se f è olomorfa in Ω e continua in $\bar{\Omega}$ allora

$$\int_{\partial\Omega} f(z)dz = 0 \tag{1.2}$$

In particolare se γ_1 e γ_2 sono due curve orientate, a supporto contenuto in Ω ed omotope in Ω [1], allora

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

■

[1] Cioè γ_1 e γ_2 possono essere deformate l'una nell'altra senza uscire da Ω, si pensi intuitivamente alle deformazioni senza tagli di un elastico posato su Ω.

(c). Se $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{3}{2}\pi$, allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{az} f(z)\,dz = 0$$

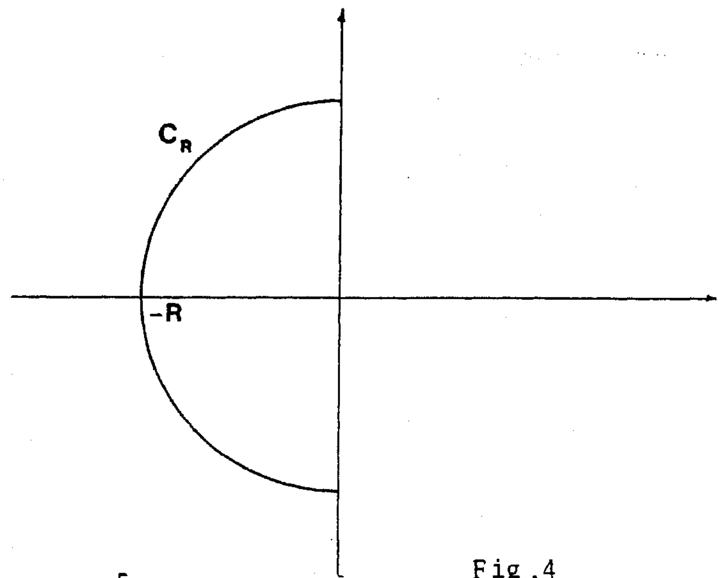


Fig.4

(d) Se $\theta_1 = \frac{3}{2}\pi$, $\theta_2 = \frac{5}{2}\pi$, allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{-az} f(z)\,dz = 0.$$

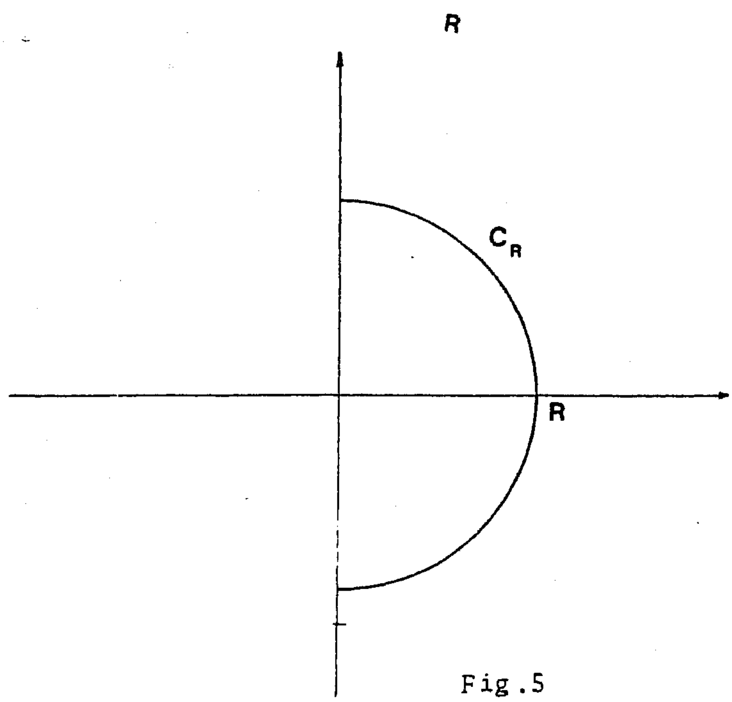


Fig.5

Osserviamo che oltre al fatto che f sia Lebesgue integrabile, non si è fatta alcuna ipotesi di regolarità.

Nei casi in cui si debba calcolare il valore principale dell'integrale esteso ad R di una funzione analitica avente *poli semplici sull'asse reale* si può applicare l'enunciato seguente.

Lemma 4 - Sia f analitica in

$$\mathbb{C}\setminus\{x_1,\dots,x_n,z_1,\dots,z_m\}$$

dove $x_k\in\mathbb{R}$ e $z_j\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Essendo x_k poli semplici e z_j le singolarità isolate di f non appartenenti a $\mathbb{R}$ e tali che $\operatorname{Im} z_j > 0$.
Se

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0$$

dove $C_R = \{z\in\mathbb{C}:\ z = Re^{i\theta}\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$, allora

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \quad (^1)$$

$$= 2\pi i\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f,z_j) + \pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,x_k). \qquad \blacksquare$$

Osserviamo infine che il Lemma di Jordan può essere formulato per cammini di integrazione di forma più generale delle semicirconferenze:

Lemma 5 - Sia R_k una successione divergente di numeri reali positivi, ρ una funzione reale di variabile reale e f una funzione di variabile complessa, tali che

$$0 < \rho_0 \leqslant \rho(\theta) \leqslant \rho_1 < +\infty \qquad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$$

$$|\rho'(\theta)| \leqslant \rho_2 < +\infty \qquad \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$$

$$\lim_{k\to\infty}\ \sup_{\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2} |f(R_k\rho(\theta)e^{i\theta})| = 0.$$

---

(1) v.p. indica il valore principale dell'integrale, cioè

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\{(-R,+R)\setminus\bigcup_i [x_i-\varepsilon,\,x_i+\varepsilon]\}} f(t)dt\ .$$

Se poniamo

$$C_k = \{z\in\mathbb{C} \ \text{ t.c. } z = R_k\rho(\theta)e^{i\theta},\ \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2\}$$

allora valgono le (a),(b),(c),(d) del lemma 3 con R e C_k sostituiti rispettivamente da R_k e C_k.

CAPITOLO II
ESERCIZI SULLE FUNZIONI ANALITICHE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

NUMERO 1

Sviluppare in serie di Laurent la funzione $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ negli insiemi $0 < |z| < 1$ e $1 < |z|$.

SOLUZIONE

Ricordando che $\forall\, s \in \mathbb{C}$ t.c. $|s| < 1$ la serie geometrica di ragione s ha somma $\sum_{n=0}^{\infty} s^n = \frac{1}{1-s}$, abbiamo

$$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1} z^n \quad \text{se} \quad 0 < |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\,\frac{1/z}{1+\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n-2} \quad \text{se} \quad |z| > 1$$

■

NUMERO 2

Calcolare $\oint_\gamma \frac{z}{1+z^2}\,dz$. Dove γ è il bordo del quadrato di lato 4 centrato nell'origine con lati paralleli agli assi x ed y percorso una sola volta in senso antiorario.

SOLUZIONE

L'integrando f ha due poli zemplici $z_{1,2} = \pm i$. La curva γ ha indice 1 rispetto ad entrambi.

$$\mathrm{Res}(f,i) = \lim_{z\to i} \frac{z}{z+i} = \frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Res}(f,-i) = \lim_{z\to -i} \frac{z}{z-i} = \frac{1}{2}$$

Dal teorema dei residui si ottiene

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)\right] = 2\pi i$$

Si poteva procedere anche nel modo seguente. Poiché f ha solo un numero finito di singolarità isolate risulta

$$\mathrm{Res}(f,\infty) + \sum_i \mathrm{Res}(f,z_i)$$

dove z_i sono tutte le singolarità al finito di f

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i(-\mathrm{Res}(f,\infty)) = -2\pi i\ \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\, f\left(\frac{1}{z}\right),0\right) =$$

$$= -2\pi i\ \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z(z^2+1)},0\right) = -2\pi i \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{z^2+1}\right) = 2\pi i.$$

■

NUMERO 3

Sia $f(z) = \dfrac{z^2 \exp \frac{1}{z}}{z^4+1}$

a) Calcolare il residuo di f nell'origine.

b) Calcolare $\int_C f(z)dz$, dove $C = \{|z| = 2\}$ orientato in senso orario.

SOLUZIONE

$$\exp \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \qquad |z| > 0$$

$$\frac{1}{1+z^4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{4m} \qquad |z| < 1$$

a) Poiché le due serie convergono assolutamente e uniformemente in ogni corona del tipo $0 < R_1 \leqslant |z| \leqslant R_2 < 1$, è possibile fare il prodotto secondo Cauchy. Si ottiene

$$f(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!} z^{4m-n+2}$$

Siano interessati al coefficiente di z^{-1}. Perciò dall'equazione $4m-n+2 = -1$ ricaviamo il legame tra n ed m

$$n = 4m+3$$

ed il residuo

$$\mathrm{Res}(f,0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(4m+3)!}$$

b) Il circuito C gira attorno a ben cinque singolarità: 4 poli semplici (le radici quarte di -1) ed una singolarità essenziale (l'origine). Conviene calcolare il residuo all'∞.

$$\mathrm{Res}(f,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\, f\left(\frac{1}{z}\right),0\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{-e^z}{z^4+1},0\right) = 0$$

Dunque

$$\oint_C \frac{z^2 \exp \frac{1}{z}}{z^4+1}\, dz = 0 .$$

NUMERO 4

Calcolare
$$\int_C \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1}\,dz$$

dove $C = \{z: |z| = R\}$ è percorso una solta volta in senso antiorario ed R è un numero reale tale che $n < R^3 < n+1$ con $n \in \mathbb{N}$.

SOLUZIONE

Le singolarità dell'integrando sono le radici complesse dell'equazione $\exp(2\pi i z^3) = 1$. Cioè $z^3 = k \in \mathbb{Z}$.
Sia a la radice cubica primitiva dell'unità:

$$a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi$$

con $\sqrt[3]{k}$ denotiamo la radice cubica aritmetica dell'intero positivo k.
Le singolarità dell'integrando interne al cammino di integrazione sono 0, $\pm\sqrt[3]{k}$, $\pm a\sqrt[3]{k}$, $\pm a^2\sqrt[3]{k}$, dove $k = 1,2,3,\dots,n$ sono tutti poli semplici.

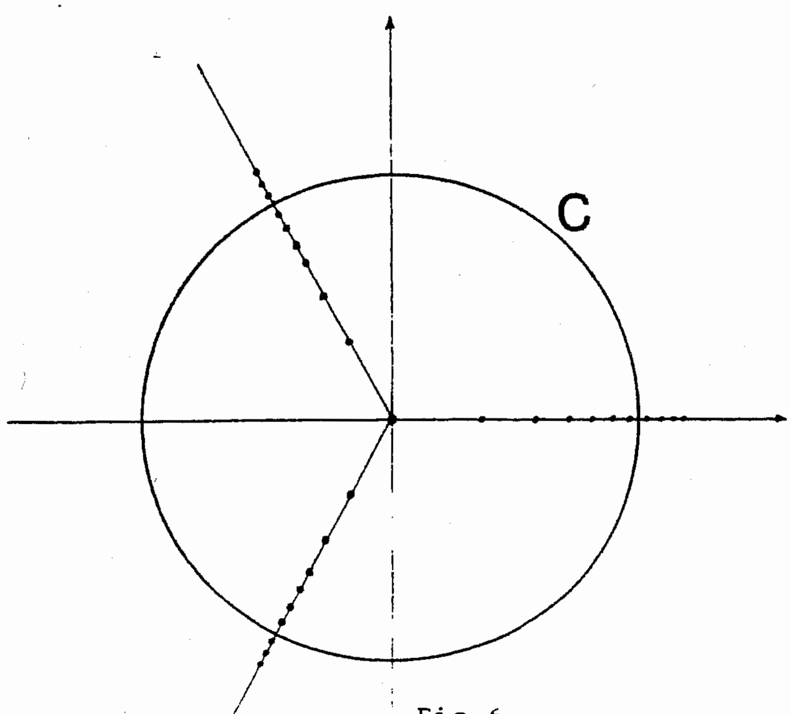


Fig.6

$$\lim_{z\to 0}\frac{z^3}{e^{2\pi i z^3}-1} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{2\pi i z^3}-1}{z^3}\right)^{-1} = \lim_{w\to 0}\left(\frac{e^{2\pi i w}-1}{w}\right)^{-1} =$$

$$= \left[\left(\frac{d}{dw}\,e^{2\pi i w}\right)_{w=0}\right]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}$$

Si noti che il calcolo precedente mostra implicitamente che 0 è un polo semplice perché se fosse un polo di ordine maggiore di 1 o una singolarità essenziale il limite non esisterebbe. Dunque

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^2}{\exp(2\pi i z^3)-1},0\right) = \frac{1}{2\pi i}$$

Analogamente sia $b\in C$ tale che $\exp(2\pi i b^3) = 1$.

$$\lim_{z\to b}\frac{\exp(2\pi i z^3)-1}{z-b} = \lim_{z\to b}\frac{\exp(2\pi i z^3)-\exp(2\pi i b^3)}{z-b} = \frac{d}{dz}\left(e^{2\pi i z^3}\right)\Big|_{z=b} =$$

$$= 6\pi i z^2\exp(2\pi i z^3)\Big|_{z=b} = 6\pi i b^2.$$

$$\lim_{z\to b}(z-b)\frac{z^2}{\exp(2\pi i z^3)-1} = \frac{b^2}{6\pi i b^2} = \frac{1}{6\pi i}\,.$$

C è il bordo del cerchio al cui interno cadono 6n punti di questo tipo, la somma dei loro residui è perciò $\frac{n}{\pi i}$

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{n}{\pi i}+\frac{1}{2\pi i}\right) = 2n+1\ .$$

■

NUMERO 5

Calcolare
$$\int_\Gamma \frac{\sin\frac{\alpha}{z}}{z^2+1}\,dz$$
con $\Gamma = \{z: |z| = R > 1\}$ percorso una sola volta in senso antiorario.

SOLUZIONE

La funzione integranda f ha una singolarità essenziale in 0 e due poli semplici: $\pm i$.

$$\mathrm{Res}(f,\pm i) = \lim_{z\to\pm i}(z\mp i)\frac{\sin\frac{\alpha}{z}}{(z+i)(z-i)} = \frac{\sin(\mp i\alpha)}{\pm 2i} = -\frac{\sin i\alpha}{2i}$$

$$\frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |z| < 1$$

$$\sin\frac{\alpha}{z} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\alpha^{2m+1}}{(2m+1)!\,z^{2m+1}} \qquad |z| > 0$$

consideriamo il prodotto secondo Cauchy delle due serie.

$$f(z) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+m}\alpha^{2m+1}}{(2m+1)!}z^{2n-2m-1}$$

calcoliamo il residuo ponendo $2n-2m-1 = -1$ cioè $n = m$:

$$\mathrm{Res}(f,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{sh}\,\alpha = -i\sin i\alpha$$

$$\int_\Gamma\frac{\sin\frac{\alpha}{z}}{z^2+1}\,dz = 2\pi i(\mathrm{Res}(f,i)+\mathrm{Res}(f,-i)+\mathrm{Res}(f,0)) =$$
$$= 2\pi i(i\sin i\alpha - i\sin i\alpha) = 0.$$

Si poteva anche procedere nel modo seguente. Il punto all'infinito è una singolarità isolata

$$z \to -\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{\sin\alpha z}{\frac{1}{z^2}+1} = \frac{\sin\alpha z}{z^2+1}$$

è una funzione regolare nell'origine, perciò $\mathrm{Res}(f,\infty) = 0$.

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -2\pi i\,\mathrm{Res}(f,\infty) = 0.$$

NUMERO 6

Calcolare $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{z^4-1}\,dz$

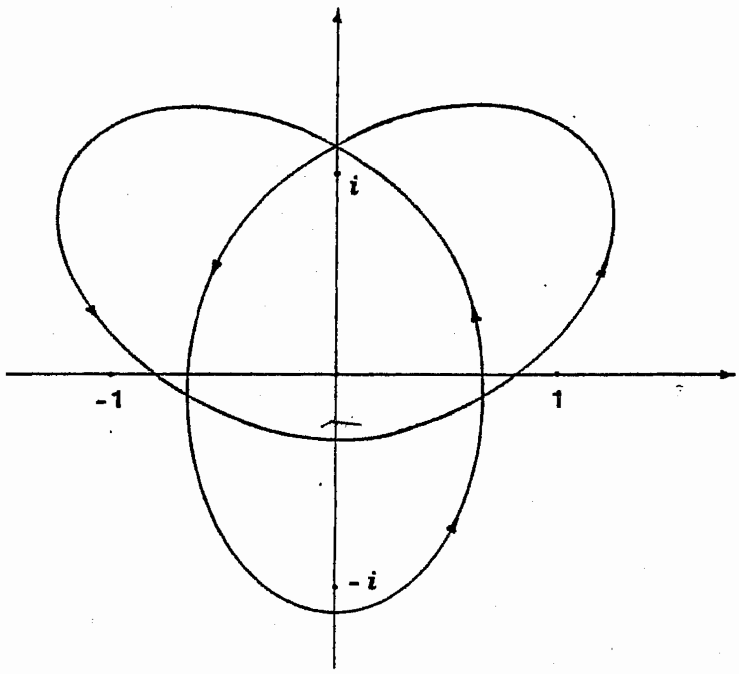


Fig.7

SOLUZIONE

La funzione integranda ha quattro poli semplici: $\pm i$, ± 1.
Γ ha indice 2 rispetto al punto $+i$, indice 1 rispetto al punto $-i$ e indice zero rispetto a ± 1. Applicando la Regola de l'Hôpital

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4-1},i\right) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)}{(z^4-1)} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=i} = \frac{i}{4}$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4-1},-i\right) = \lim_{z\to -i}\frac{z+i}{z^4-1} = \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=-i} = -\frac{i}{4}$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^4-1} = 2\pi i\left[2\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4-1},i\right)+\mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^4-1},-i\right)\right] = -\frac{\pi}{2}$$

NUMERO 7

Classificare le singolarità e calcolare i relativi residui della funzione

$$F(z) = \frac{z^2 e^{z - \frac{1}{4z}} + 5\sin z - 2}{z^3}$$

SOLUZIONE

L'unica singolarità al finito è $z = 0$ che risulta essere una singolarità essenziale.

Poniamo

$$R = \mathrm{Res}(F,0)$$

$\frac{1}{z^3}$ ha ovviamente residuo nullo in 0. Lo stesso vale per $\frac{\sin z}{z^3}$ perché è una funzione pari. Dunque

$$R = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z}\exp\left(z - \frac{1}{4z}\right), 0\right)$$

$$\frac{1}{z}\exp\left(z - \frac{1}{4z}\right) = \sum_{n=0} \frac{z^{n-1}}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,4^m z^m} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!\,m!\,4^m} z^{n-m-1}$$

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2 4^n} = J_0(1).$$

Il punto all'infinito è una singolarità essenziale per $F(z)$ e risulta

$$\mathrm{Res}(F,\infty) = -\mathrm{Res}(F,0) = -J_0(1).$$

■

NUMERO 8

Classificare la singolarità $z = 0$ della funzione

$$g(z) = \frac{1}{1-\mathrm{ch}(z\sqrt{z})}$$

SOLUZIONE

Poiché $\mathrm{ch}z = \mathrm{ch}(-z)$ $\quad z\ \mathbb{C}$, il valore di $\mathrm{ch}(z\sqrt{z})$ non dipende dalla determinazione della radice e quindi $\mathrm{ch}(z\sqrt{z})$ è una funzione monodroma, anzi analitica intera e non costante. Dunque $z = 0$ è per g al più un polo. Si ha

$$\mathrm{ch}(z\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\sqrt{z})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(2n)!}$$

$$1-\mathrm{ch}(z\sqrt{z}) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(2n)!}$$

$$\lim_{z\to 0} z^3 g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z^3}{-\sum_{1}^{\infty} \frac{z^{3n}}{(2n)!}} = -2$$

dunque si tratta di un polo triplo. ∎

NUMERO 9

Utilizzando metodi di variabile complessa calcolare l'integrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2+4}$$

SOLUZIONE

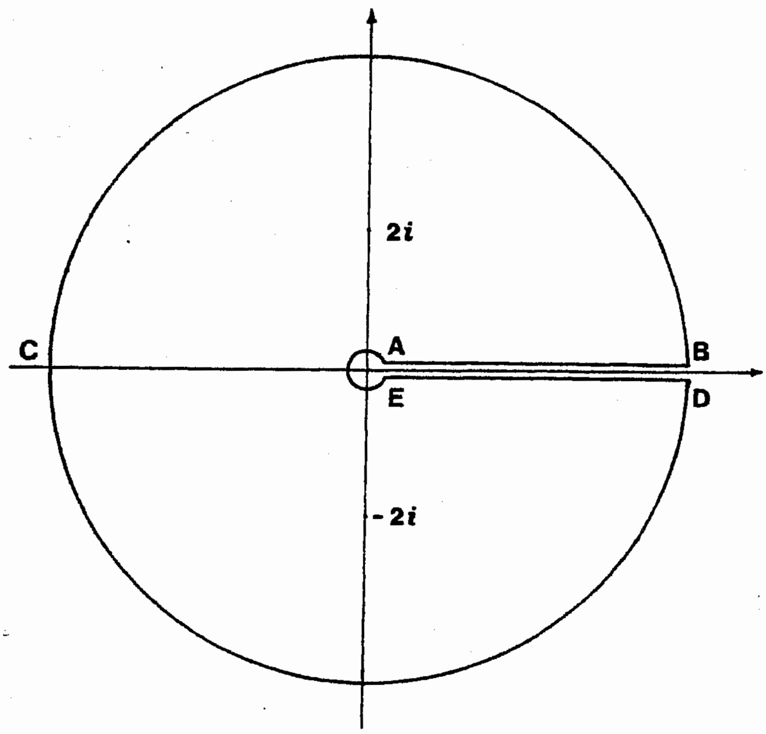


Fig.8

Consideriamo il circuito in figura, dove le due circonferenze hanno raggi ε ed R con

$$0 < \varepsilon < 2 < R$$

e AB ed ED vanno pensati come "copie del segmento $[\varepsilon,R]$, rispettivamente sui bordi superiore ed inferiore del taglio effettuato lungo il semiasse $\mathrm{Re}z > 0$, $\mathrm{Im}z = 0$. Definiamo nel piano tagliato la seguente branca della funzione polidroma $\sqrt{z}$:

$$\sqrt{z} = \rho\exp(i\theta/2)\ ,\ z = \rho\exp(i\theta),\ \rho > 0,\quad 0 < \theta < 2\pi$$

e la funzione

$$F(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+4} .$$

Posto $\lim\limits_{\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}$, $\lim\limits_{R} = \lim\limits_{R\to\varepsilon}$, $\lim\limits_{\varepsilon,R} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{R\to\varepsilon}$, si ha

$$\lim_{\varepsilon,R}\int_{AB} F(z)dz = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\rho}d\rho}{\rho^2+4} = I$$

$$\lim_{\varepsilon,R}\int_{DE} F(z)dz = \int_\infty^0 \frac{\sqrt{\rho}\exp(i\pi)d\rho}{\rho^2+4}$$

Inoltre, per $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ed $R > 3$ esiste una costante C tale che

$$\left|\int_{BCD} F(z)dz\right| \leqslant CR \cdot \frac{\sqrt{R}}{R^2}$$

$$\left|\int_{EGA} F(z)dz\right| \leqslant C\varepsilon\sqrt{\varepsilon}$$

Dunque

$$\lim_{R}\int_{BCD} F(z)dz = 0 \qquad \lim_{\varepsilon}\int_{EGA} F(z)dz = 0 .$$

Sommando e applicando il teorema dei residui si ha:

$$I = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon,R}\int_{ABCDEGA} F(z)dz = \pi i\left[\mathrm{Res}(F,2i)+\mathrm{Res}(F,-2i)\right] =$$

$$= \pi i\left[\lim_{z\to 2i}(z-2i)F(z) + \lim_{z\to -2i}(z+2i)F(z)\right] =$$

$$= \pi i\left[\frac{\sqrt{2}\exp(i\pi/4)}{4i} + \frac{\sqrt{2}\exp(i3\pi/4)}{-4i}\right] = \frac{\pi}{2} .$$

■

NUMERO 10

Detta C la circonferenza di centro 0 e raggio 1 percorsa una volta in senso antiorario, calcolare, per λ reale, e diverso da ± 1, il valore (che risulterà reale)

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left((z^2)\exp(\lambda/z) - \frac{\lambda z}{z^2+\lambda^2}\right)dz.$$

SOLUZIONE

Se $\lambda = 0$, $f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^2 dz = 0$ per il teorema di Cauchy.

Per $\lambda \neq 0$, $z^2\exp(\lambda/z)$ ha una singolarità essenziale nell'origine e altrove è analitica, mentre $z(z^2+\lambda^2)^{-1}$ è analitica ed ha 2 poli semplici: $z = \pm i\lambda$.

$$z^2\exp(\lambda/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!\,z^{n-2}} \qquad \forall\, z \neq 0$$

$$\mathrm{Res}(z^2\exp(\lambda/z),0) = \frac{\lambda^3}{3!} = \frac{\lambda^3}{6}$$

$$\mathrm{Res}(z(z^2+\lambda^2)^{-1},\pm i\lambda) = \lim_{z\to\pm i\lambda}(z\mp i\lambda)\frac{z}{z^2+\lambda^2} = \lim_{z\to\pm i\lambda}\frac{z}{z\pm i\lambda} = \frac{1}{2}$$

Dunque, se $0 < |\lambda| < 1$

$$f(\lambda) = \mathrm{Res}(z^2\exp(\lambda/z),0) - \lambda\mathrm{Res}\left(\frac{z}{z^2+\lambda^2}, i\lambda\right) - \lambda\mathrm{Res}\left(\frac{z}{z^2+\lambda^2}, -i\lambda\right) = \frac{1}{6}\lambda^3 - \lambda.$$

Se $|\lambda| > 1$

$$f(\lambda) = \mathrm{Res}(z^2\exp(z/\lambda),0) = \frac{1}{6}\lambda^3.$$

■

NUMERO 11

Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(x)} \exp\left(\frac{x}{z-x}\right) dz \qquad x > -1$$

ove $C(x)$ è la circonferenza di centro 0 e raggio $\frac{1}{x+1}$ percorsa una volta in senso antiorario.

SOLUZIONE

Sia $x_0 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ allora $x_0 \in C(x_0)$. Se $x > \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ allora $z = x$ è esterno a $C(x)$ = Se $x < \frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ allora $z = x$ è interno a $C(x)$. Si ha perciò rispettivamente nei tre casi:

a) $f(x_0)$ non è definito

b) $f(x) = 0$

c) $f(x) = \mathrm{Res}(\exp(\frac{x}{z-x}), x)$

poiché $\exp(\frac{x}{z-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(z-x)^n}$ il residuo vale x.

Il grafico è dunque

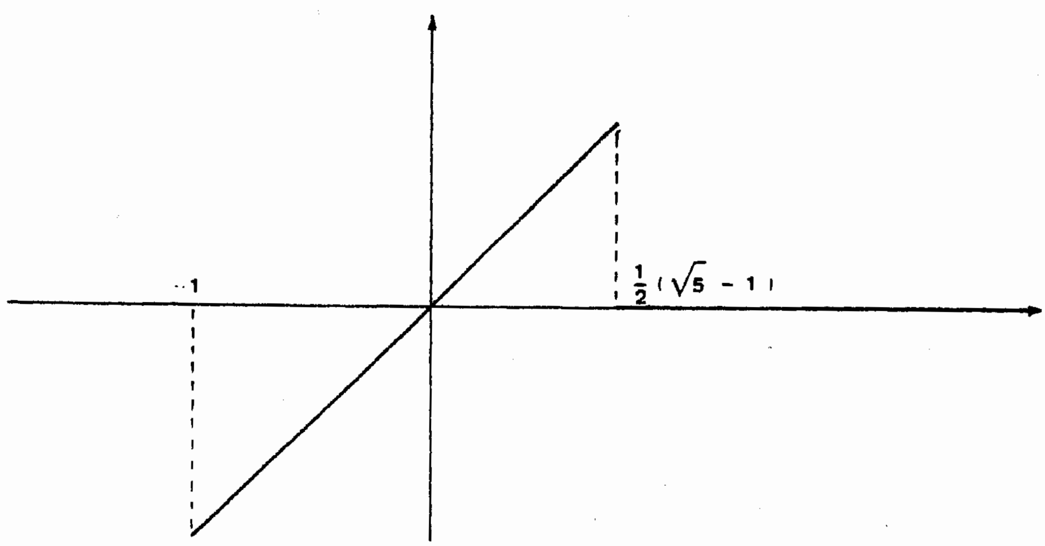


Fig.9

NUMERO 12

Calcolare

$$\int_\Gamma f(z)dz$$

dove $f(z) = \frac{1}{z}\exp\left(-z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$ e Γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, percorsa in verso antiorario. Esprimere il risultato mediante le funzioni di Bessel.

SOLUZIONE

La funizone f presenta una singolarità essenziale nell'origine.
Dunque

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \; \mathrm{Res}(f,0)$$

$$f(z) = \frac{1}{z}\exp(-z^2)\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{z^{2m}m!} =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!m!}\, z^{2n-2m-1}$$

Ricordando lo sviluppo

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\mathrm{Res}(f,0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2} = J_0(2)$$

Dal teorema dei residui si ottiene

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \; \mathrm{Res}(f,0) = 2\pi i \; J_0(2).$$

■

NUMERO 13

Si consideri la funzione di variabile complessa

$$f_\lambda(z) = \frac{\cos(\lambda/z)}{1+(1-\lambda)z} \qquad \text{con} \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

Calcolare

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f_\lambda(z)dz$$

dove Γ è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa una volta in senso antiorario, precisando per quali λ $I(\lambda)$ non è definito.

SOLUZIONE

Distinguiamo vari casi

i) Se $\lambda = 0$, $f_0(z) = \frac{1}{1+z}$ presenta un polo semplice in $z = -1$ con residuo uguale ad 1, perciò $I(0) = 1$.

ii) Se $\lambda = 1$, $f_1(z) = \cos(1/z)$ ha una singolarità essenziale nell'origine con residuo nullo perché f_1 è analitica e pari in $\mathbb{C}$ {0}. Quindi $I(1) = 0$.

iii) Se $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$, f_λ presenta una singolarità essenziale nella origine ed un polo semplice in $z_\lambda = 1/(\lambda-1)$.
Il valore di $I(\lambda)$ dipenderà allora dalla posizione di z_λ rispetto alla circonferenza Γ. Distinguamo tre sottocasi

a) $|z_\lambda| = 2 \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ oppure $\lambda = \frac{3}{2}$. La singolarità cade sul cammino di integrazione, e perciò $I(\lambda)$ non è definito.

b) $|z_\lambda| > 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$. In questo caso l'unica singolarità interna a Γ è l'origine. Sviluppiamo in serie di Laurent (per $0 < |z| < 1/|1-\lambda|$)

$$f_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{\lambda^{2n}}{z^{2n}} \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(1-\lambda)^m z^m =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}\lambda^{2n}(1-\lambda)^m}{(2n)!} z^{m-2n}$$

ponendo $m-2n = -1$, cioè $m = 2n-1$ e *osservando che deve essere $m \geqslant 0$*, otteniamo

$$I(\lambda) = \mathrm{Res}(f_\lambda, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n-1}\lambda^{2n}(1-\lambda)^{2n-1}}{(2n)!} =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\lambda^{2n}(1-\lambda)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{\lambda-1} \left(\cos[\lambda(1-\lambda)]-1\right).$$

c) $|z_\lambda| < 2 \Longleftrightarrow \lambda < \frac{1}{2}$ oppure $\lambda > \frac{3}{2}$.
Anche z_λ è interno a Γ

$$\mathrm{Res}(f_\lambda, z_\lambda) = \lim_{z \to 1/(\lambda-1)} \left(z - \frac{1}{\lambda-1}\right) \frac{\cos \frac{\lambda}{z}}{1+(1-\lambda)z} = \frac{1}{1-\lambda} \cos[\lambda(\lambda-1)]$$

$$I(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Si noti che nel caso c) si poteva ottenere il risultato mediante il calcolo del residuo nel punto all'infinito.

■

NUMERO 14

Calcolare $\displaystyle\int_C \frac{\exp(1/z)}{1-z}\,dz$

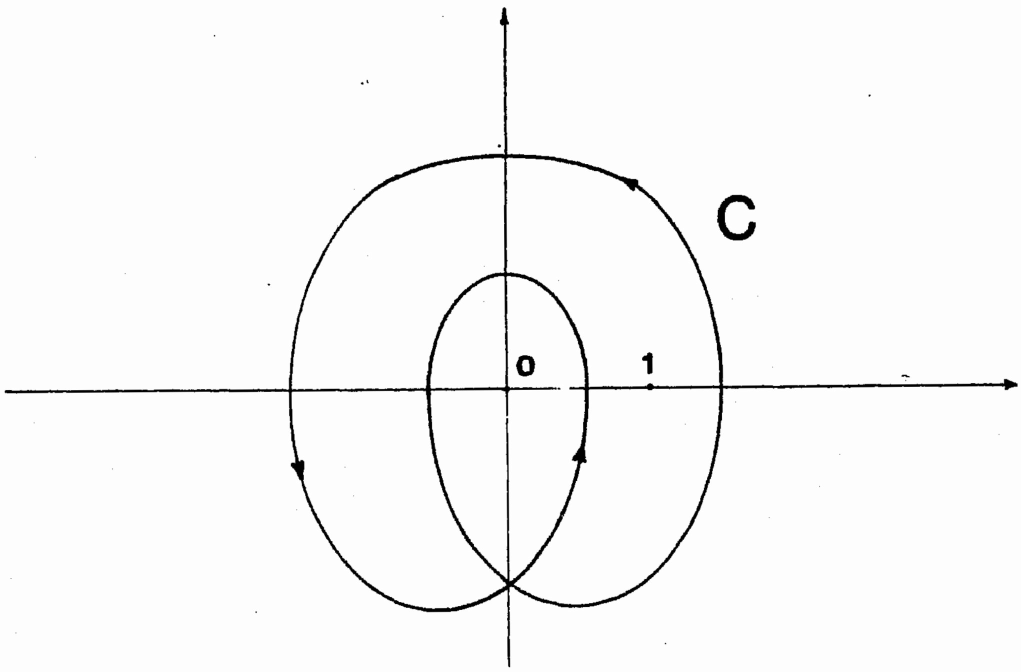


Fig.10

SOLUZIONE

La funzione integrale f ha un polo semplice in $z = 1$ ed una singolarità essenziale in $z = 0$. Il circuito C ha indice 1 rispetto al punto $z = 1$ ed indice 2 rispetto al punto $z = 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,z^n} \sum_{m=0}^{\infty} z^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{m-n} \qquad 0 < |z| < 1$$

$$\mathrm{Res}(f,0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} = e-1$$

$$\mathrm{Res}(f,1) = -e$$

Dal teorema dei residui otteniamo

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,1)+2\mathrm{Res}(f,0)\right] = 2\pi i(e-2).$$

NUMERO 15

Calcolare

$$I(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 \exp(itx)}{t^4-1}\, dt \qquad x \in R$$

SOLUZIONE

Osserviamo che l'integrale esiste solo in valore principale perché $\frac{1}{t^4-1}$ non è integrabile in alcun intorno di $t = \pm 1$.
La funzione $f(z) = \frac{z^2 \exp(ixz)}{z^4-1}$ è analitica in C ad esclusione dei quattro poli semplici $\pm 1, \pm i$.
Consideriamo il circuito $C_{R,\varepsilon}$ in figura

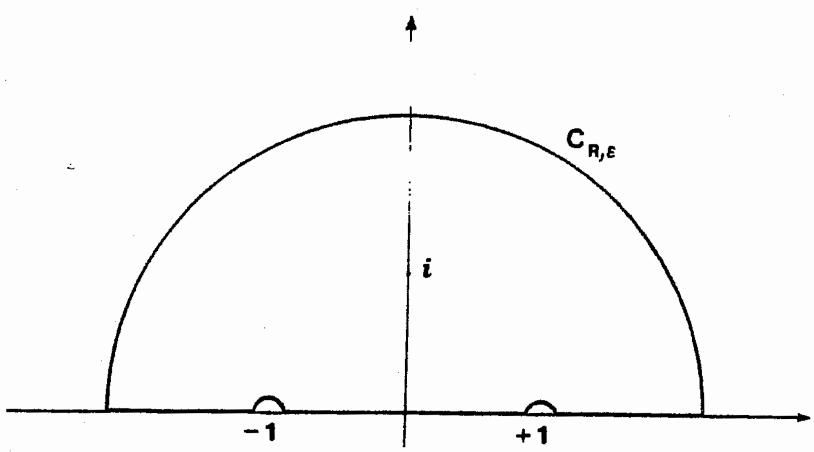


Fig.11

dove R ed ε sono, rispettivamente, il raggio della semicirconferenza centrata in O e di quelle centrate in ± 1.

Utilizzando il lemma di Jordan (v.lemmi 3 e 4 del cap.1) si ha, per $x > 0$

$$I(x) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2 \exp(itx)}{t^4-1} = \lim_{R,\varepsilon} \oint_{C_{R,\varepsilon}} \frac{z^2 \exp(ixz)}{z^4-1} +$$

$$+ \pi i \left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^2 \exp ixz}{z^4-1}, 1\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 \exp ixz}{z^4-1}, -1\right) \right] =$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{z^2 \exp ixz}{z^4-1}, +i\right) - \frac{\pi}{2} \sin x = \frac{\pi}{2}\,(e^{-x} - \sin x)$$

Essendo $\frac{t^2}{t^4-1}$ una funzione pari di t, risulterà che I(x) è una funzione pari di x.

Per $x = 0$ bisogna ricorrere al calcolo diretto, che fornisce

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^4-1}\, dt = \frac{\pi}{2}\,.$$

Concludendo

$$I(x) = \frac{\pi}{2}\,(e^{-|x|} - \sin|x|) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

■

NUMERO 16

a) Calcolare con metodi di variabile complessa

$$A = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$$

b) Utilizzando il risultato del punto a) calcolare

$$B = \int_0^\infty \frac{\log x\, dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}$$

SOLUZIONE

L'integrale improprio A (rispettivamente B) esiste finito perché l'integrando si comporta come $1/\sqrt{x}$ (risp. $(\log x)/\sqrt{x}$) in un intorno di 0 (che è l'unica singolarità reale al finito) e come $1/x^{5/2}$ (risp. $(\log x)/x^{5/2}$) all'infinito

a) $f(z) = 1/\sqrt{x}(z^2+1)$ è una funzione polidroma. Ne consideriamo la determinazione

$z = \rho \exp i\theta$, $\rho > 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\exp(i\theta/2)$.

Consideriamo il cammino $C_{R,\varepsilon}$ in figura 12.

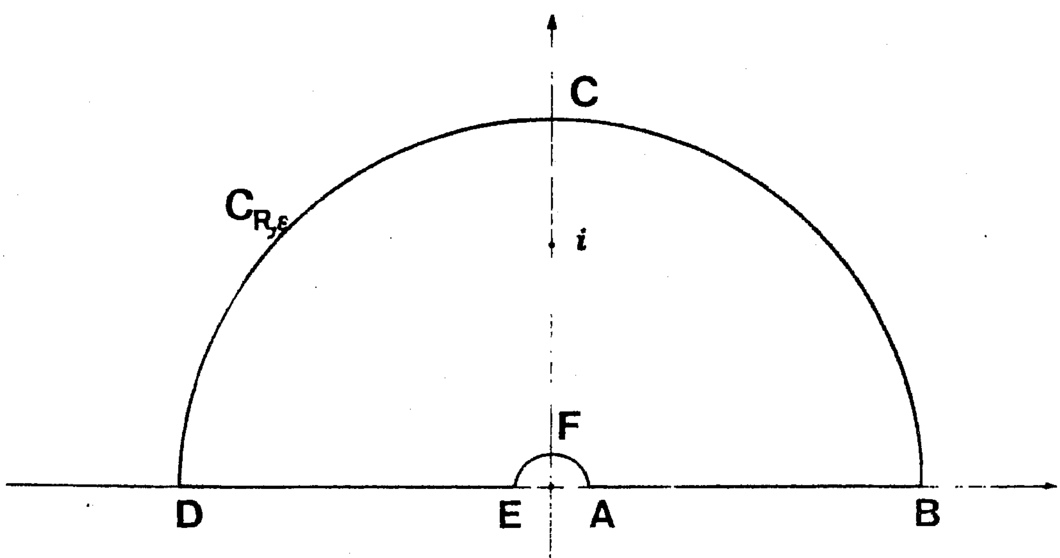


Fig.12

(1) $\displaystyle\int_{BCD} f(z)dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$ per il lemma 2 (cap.1) e la maggiorazione $|f(z)| \leqslant \dfrac{C}{R^{5/2}}$ su BCD $\forall R > 2$.

(2) $\displaystyle\int_{EFA} f(z)dz \xrightarrow{\varepsilon\to\infty} 0$ per la maggiorazione

$$\left|\int_{EFA} f(z)dz\right| \leqslant \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}\,\varepsilon \qquad \forall\varepsilon<\frac{1}{2}$$

(3) $$\int_{AB} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}(\rho^2+1)} \xrightarrow[R\to\infty]{\varepsilon\to 0} \int_{0}^{\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho}(\rho^2+1)}$$

Su DE $\quad z = -\rho = \rho\exp(i\pi)$, $\sqrt{z} = i\sqrt{\rho}$, $dz = -d\rho$.

(4) $$\int_{DE} f(z)dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{-d\rho}{i\sqrt{\rho}(\rho^2+1)} \to \int_{0}^{\infty} \frac{d\rho}{i\sqrt{\rho}(\rho^2+1)}$$

L'unica singolarità di f nel semipiano superiore è il polo semplice +i

$$\mathrm{Res}(f,i) = \frac{\sqrt{2}}{2i-2}$$

Dal teorema di Cauchy si ricava, tenendo conto di (1)(2)(3) e (4)

$$A = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

b) Consideriamo ancora il cammino $C_{R,\varepsilon}$ e la funzione polidroma $g(z) = f(z)\log z$. Scegliamo la determinazione del logaritmo tale che l'argomento sia compreso tra 0 e 2π ed f come al punto a).

Risulta

(5) $$\int_{BCD} f(z)dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

(6) $$\int_{EFA} g(z)dz \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

(7) $$\lim_{\varepsilon,R}\left(\int_{AB} g(z)dz + \int_{DE} g(z)dz\right) = \int_{0}^{\infty} \frac{\log\rho}{\sqrt{\rho}(\rho^2+1)}\,d\rho + \int_{0}^{\infty} \frac{\log\rho+i\pi}{i\sqrt{\rho}(\rho^2+1)}\,d\rho$$

$$= (1-i)\int_{0}^{\infty} g(x)dx + \pi A$$

(8) $\mathrm{Res}(g,i) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}(1+i)}$

Dal teorema di Cauchy, tenendo conto delle (5)(6)(7) e (8) si ricava

$$(1-i)B+\pi A = 2\pi i \frac{\pi}{2\sqrt{2}(1+i)}$$

$$B = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$$

■

NUMERO 17

Dire se la funzione $g(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$ è integrabile secondo Lebesgue nell'intervallo $(0,\infty)$ ed in caso affermativo calcolare $\int_0^\infty g(x)dx$ con metodi di variabile complessa.

SOLUZIONE

La funzione g è integrabile secondo Lebesgue perché il logaritmo è integrabile in un intorno destro di zero e $x = +1$ è una singolarità apparente in quanto è uno zero del primo ordine sia del numeratore che del denominatore, infine $g(x) \sim \frac{\ln x}{x^2}$ per $x >> 0$ e dunque è integrabile nell'intorno di $+\infty$. Dunque esiste l'integrale $I = \int_0^\infty g(x)dx$.

$g(z) = \frac{\ln z}{z^2-1}$ è una funzione polidroma della variabile complessa z.
Consideriamo la determinazione

$$g(z) = \frac{\log\rho+i\theta}{\rho^2\exp(2i\theta)-1}, \quad z = \rho\exp(i\theta), \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

avendo effettuato un taglio lungo il semiasse di reali positivi

$z = -1$ è un polo semplice per g

$z = +1$ è una singolarità apparente mentre $\exp(2\pi i)$ è un polo semplice.

$$\mathrm{Res}(g,-1) = \lim_{\substack{\rho\to 1\\ \theta\to\pi}} \frac{\ln\rho+i\theta}{\rho\exp(i\theta)-1} = -\frac{\pi i}{2}$$

Consideriamo il circuito $C_{R,\varepsilon}$ in figura

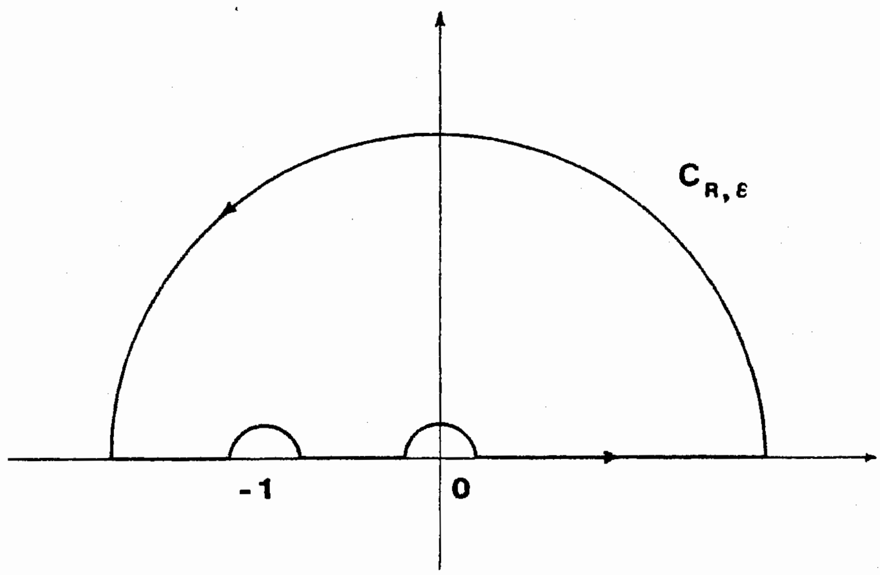


Fig.13

Risulta:

$$|g(z)| < C\,\frac{\ln R}{R^2} \qquad \text{per } |z| = R \geqslant 2$$

$$|g(z)| < C \log \varepsilon \qquad \text{per } |z| = \varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$$

Applicando il teorema di Cauchy ed i lemmi 2 e 4 del Capitolo 1

$$0 = \lim_{\varepsilon, R} \int_{C_{R,\varepsilon}} g(z)dz = 2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1} + \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{\pi i dx}{x^2-1} - \pi i \operatorname{Res}(g,-1)$$

Poiché

$$\text{v.p.} \int_0^\infty \frac{dx}{x^2-1} = 0$$

si ha

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

■

NUMERO 18

Calcolare, con metodi di variabile complessa

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^{2/3}(x+1)}$$

SOLUZIONE

Consideriamo la funzione polidroma di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z^{2/3}(z+1)}$$

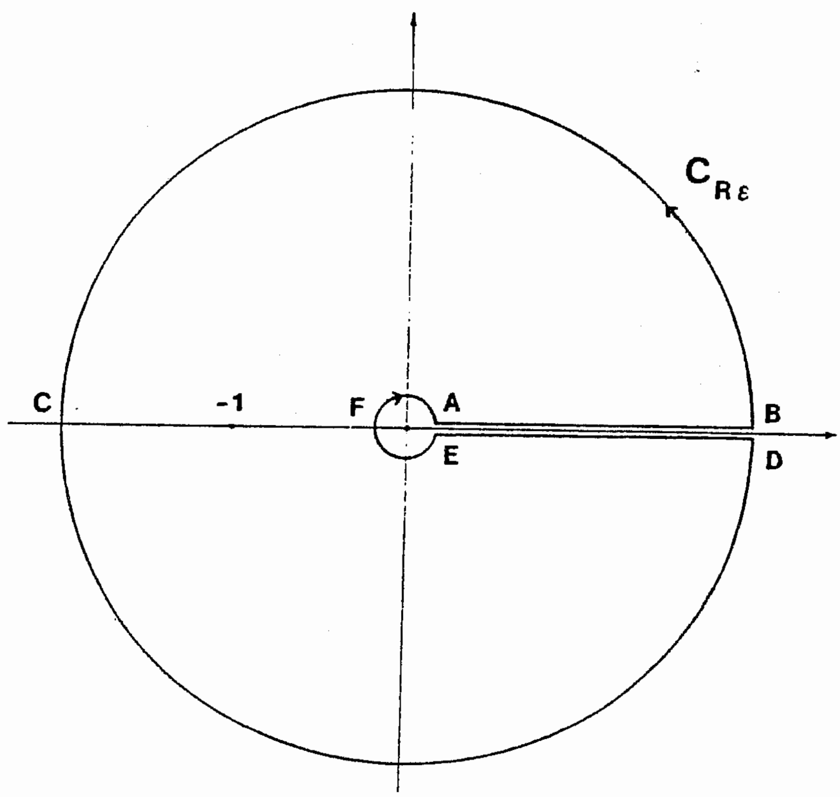
$z = 0$ è un punto di diramazione.

$z = -1$ è un polo semplice.

Effettuiamo un taglio lungo il semiasse dei reali positivi e considerando la determinazione

$$f(z) = \frac{1}{\rho^{2/3}\exp\left(\frac{2}{3}i\theta\right)(\rho\exp(i\theta)+1)}, \quad z = \rho\exp(i\theta), \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

ed il circuito orientato $C_{R,\varepsilon}$ in figura.



Per il teorema dei residui $\oint_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,-1)$.

$$\lim_{R,\varepsilon} \int_{C_{R,\varepsilon}} f(z)dz = \lim_{R} \int_{BCD} f(z)dz + \lim_{\varepsilon} \int_{EFA} f(z)dz + \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^{2/3}(\rho+1)}$$

$$-\text{v.p.} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^{\frac{2}{3}} e^{\frac{4}{3}\pi i}(\rho+1)} = 2\pi i \exp(-\tfrac{2}{3}\pi i)$$

Poiché $\lim_{R} \int_{BCD} f(z)dz = \lim_{\varepsilon} \int_{EFA} f(z)dz = 0$

$$I = \frac{2\pi i \exp\left(-\frac{2}{3}\pi i\right)}{1 - \exp\left(-\frac{4}{3}\pi i\right)} = \frac{\pi}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi .$$

■

NUMERO 19

Calcolare

$$\int_\Gamma \frac{\exp(2/z)dz}{z^2+1}$$

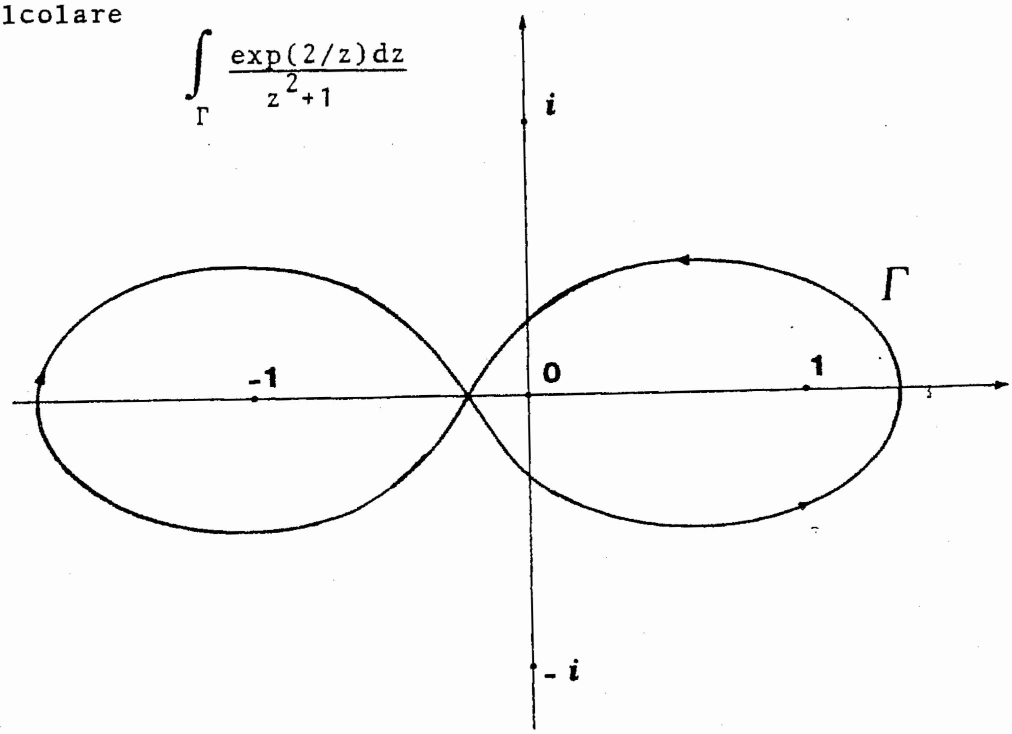


Fig.15

SOLUZIONE

$f(z) = \dfrac{\exp(2/z)}{z^2+1}$ ha due poli semplici in $z = \pm i$ ed una singolarità essenziale in $z = 0$. Per $0 < |z| < 1$ abbiamo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!z^n} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m z^{2m} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^n}{n!} z^{2m-n}$$

$$\mathrm{Res}(f,0) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sin 2$$

Poiché $I(\Gamma,0) = 1$, $I(\Gamma,\pm i) = 0$, dal teorema dei residui si conclude

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f,0) = 2\pi i \sin 2.$$

■

NUMERO 20

a) Calcolare con metodi di analisi complessa il seguente integrale:

$$I = \text{v.p.} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/6}dx}{(x+i)(x^2-1)}$$

b) Dire se la funzione

$$\varphi(x) = \frac{x^{1/6}}{(x+i)(x^2-1)}$$

è integrabile secondo Riemann o secondo Lebesgue sull'intervallo $(0,+\infty)$.

SOLUZIONE

a) Della funzione polidroma $\dfrac{z^{1/6}}{(z+i)(z^2-1)}$ consideriamo la determinazione $z = \rho e^{i\theta}$ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$$\varphi(z) = \frac{{}^{1/6}e^{i\frac{\theta}{6}}}{(\rho\exp(i\theta)+i)(\rho^2\exp 2i\theta-1)}$$

φ ha quattro poli semplici: $z = \pm 1$, $z = -i$, $z = \exp(2\pi i)$.
Consideriamo il circuito $\Gamma_{R,\varepsilon}$ in figura.

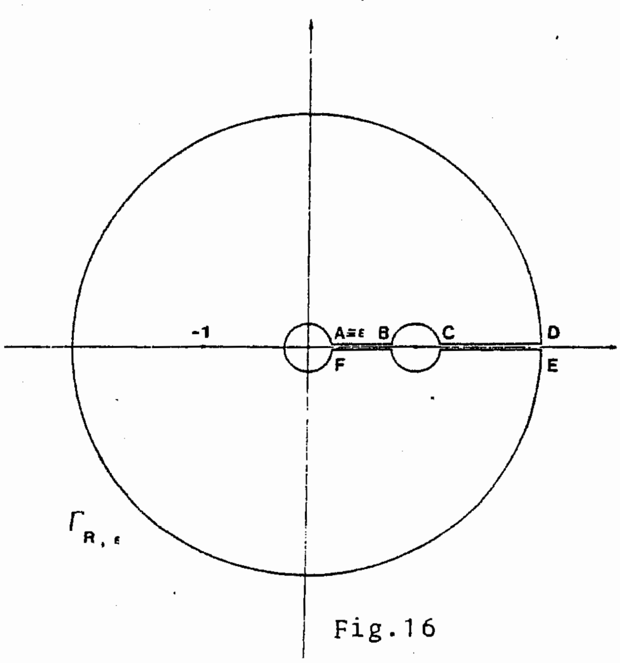


Fig.16

$$\text{su } \overset{\frown}{DE} \qquad |\varphi(z)| \leqslant CR^{-\frac{17}{6}}$$

$$\text{su } \overset{\frown}{FA} \qquad |\varphi(z)| \leqslant C\varepsilon^{1/6}$$

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ R \to \infty}} \int_{\overline{AB} \cup \overline{CD}} \varphi(z)\,dz$$

Applicando il teorema dei residui

$$(1-e^{i\frac{\pi}{3}})I - \pi i(\mathrm{Res}(\varphi, e^{2\pi i}) + \mathrm{Res}(\varphi,1)) = 2\pi i(\mathrm{Res}(\varphi,-1) + \mathrm{Res}(\varphi,-i))$$

$$\mathrm{Res}(\varphi,1) = \frac{1}{(1+i)2} = \frac{1-i}{4}$$

$$\mathrm{Res}(\varphi,e^{2\pi i}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{2(1+i)} = \frac{1}{8}(\sqrt{3}+1+i(\sqrt{3}-1))$$

$$\mathrm{Res}(\varphi,-i) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{-2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - i\,\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\mathrm{Res}(\varphi,-1) = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{-2(-1+i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{8} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{8}$$

$$I = \frac{2\pi i}{1-i\sqrt{3}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{4} + i\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{i}{4} + \frac{1}{8}(\ 3+1+i(\ 3-1))\right] =$$

$$= \frac{\pi i}{2}\,\frac{(1+i\sqrt{3})}{8}\left[(3\sqrt{3}+1-4\sqrt{2}) + i(3\sqrt{3}-1-4\sqrt{2})\right] =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[(-2-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{6}) + i(-2+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{6})\right].$$

b) non è integrabile né secondo Riemann né secondo Lebesgue a causa della singolarità in $x = 1$ del tipo $\frac{\psi(x)}{x-1}$ (con ψ funzione regolare) che come è noto non è integrabile.

■

NUMERO 21

Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{z^8 \exp(1/z)}{1+z^4}\,dz$$

dove γ è la circonferenza $|z| = 2$ percorsa una sola volta in senso antiorario.

SOLUZIONE

Poiché γ è il bordo di una regione che contiene tutte le singolarità al finito dell'integrando (4 poli semplici ed una singolarità essenziale) converrà calcolare il residuo all'infinito. Posto

$$g(z) = \frac{z^8 e^{1/z}}{1+z^4}$$

$$\mathrm{Res}(g,\infty) = \mathrm{Res}\left(-\frac{1}{z^2}\, g\left(\frac{1}{z}\right),0\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{-\exp z}{z^6(1+z^4)},0\right)$$

Per ottenere il residuo calcoliamo lo sviluppo di Laurent per $0 < |z| < 1$

$$\frac{-e^z}{z^6(1+z^4)} = -\frac{1}{z^6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m z^{4m} = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{n!}\,z^{n+4m-6}$$

Per ottenere il coefficiente di $1/z$ poniamo $-1 = n+4m-6$ cioè $n = 5-4m$. Ricordando che deve essere $n,m \geqslant 0$:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{-\exp z}{z^6(1+z^4)},0\right) = \sum_{\substack{m\geqslant 0\\ 5-4m\geqslant 0}}\frac{(-1)^{m+1}}{(5-4m)!} = \sum_{n=0,1}\frac{(-1)^{m+1}}{(5-4m)!} = \frac{119}{120}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} g(z)\,dz = -\mathrm{Res}(g,\infty) = -\frac{119}{120}$$

■

NUMERO 22

Come si definisce arctg z nel piano complesso? Che tipo di singolarità ha arctg z ?

SOLUZIONE

per ogni x reale $y = \operatorname{arctg} x$ è definita come funzione inversa a partire da $x = \operatorname{tg} y$. Applicando il principio del prolungamento analitico abbiamo per $z, w \in C$:

$$w = \operatorname{arctg} z$$

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \cdot \frac{\exp(iw)-\exp(-iw)}{\exp(iw)+\exp(-iw)}$$

$$z(\exp(iw)+\exp(-iw)) = i(\exp(-iw)-\exp(iw))$$

$$(z+i)\exp(2iw) = i-z$$

$$w = \frac{1}{2i} \ln \frac{i-z}{i+z}$$

L'ultima relazione definisce la funzione arctg z come una funzione polidroma avente due punti di diramazione di tipo logaritmico: $z = \pm i$.

In particolare arctg z ha infinite branche analitiche ed il punto all'∞ è regolare per ognuna di esse; non ha né poli né singolarità essenziali.

La determinazione principale è quella che assume su R valori reali, e può essere ottenuta effettuando un taglio che congiunga $+i$ e $-i$, passando lungo l'asse immaginario per il punto all'infinito.

Indichiamo con $\ln_o$ la determinazione principale del logaritmo complesso e poniamo $\theta = \arg(i+z)$.

Allora per ogni z reale abbiamo

$$\left|\frac{i-z}{i+z}\right| = 1 \qquad \ln_o \frac{i-z}{i+z} = (\pi-2\theta)i$$

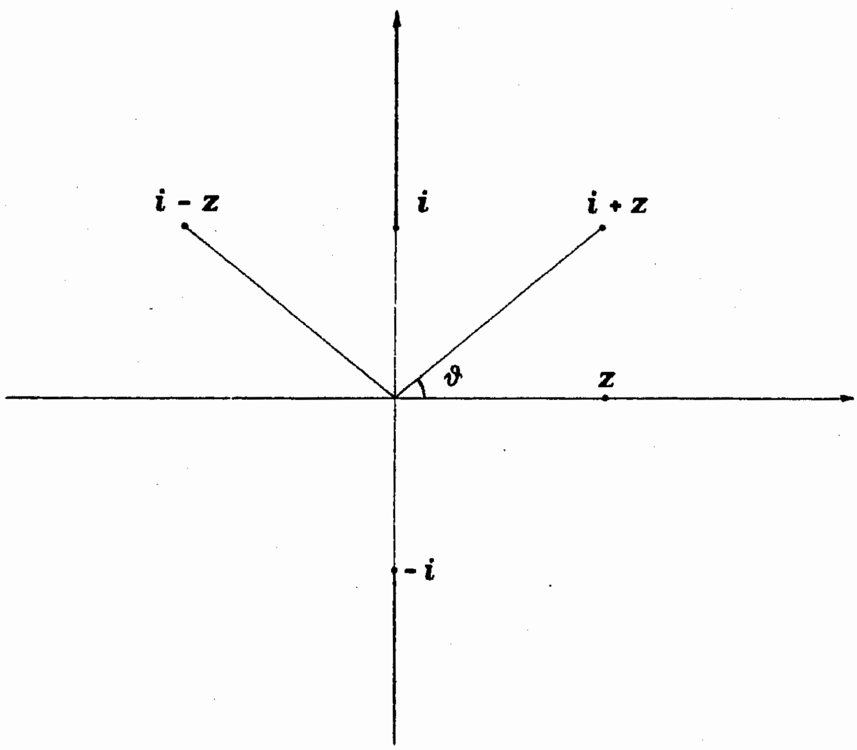


Fig.17

Poiché l'applicazione $z \to y = \frac{i-z}{i+z}$ è biunivoca da $\mathbb{C}\ \{-i\}$ su $\mathbb{C}\ \{-1\}$ (precisamente è biunivoca dalla sfera di Riemann in sé), si deduce che la superficie di Riemann di arctg z è isomorfa alla superficie di Riemann di ln z .

Infine la determinazione principale di arctg z , riferita al piano tagliato come in figura è data da

$$w = \frac{1}{2i} \ln_o \frac{i-z}{i+z}$$

■

CAPITOLO III
TRASFORMATA DI FOURIER

Definizione 1 - Con $L^1(\mathbb{R})$ indicheremo le funzioni **definite su** $\mathbb{R}$, a valori reali o complessi che sono integrabili secondo Lebesgue su $\mathbb{R}$.

Definizione 2 - Con $L^2(\mathbb{R})$ indicheremo le funzioni f definite in $\mathbb{R}$, a valori reali o complessi, che sono misurabili secondo Lebesgue e tali che $|f|^2$ appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$.

Definizione 3 - $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ indicherà le funzioni integrabili secondo Lebesgue su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$.

Definizione 4 - $AC(\mathbb{R})$ indicherà le funzioni assolutamente continue, cioè le primitive di funzioni appartenenti ad $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Se f appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier è definita da

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\exp(itx)dt \qquad x\in\mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Oltre che con $\hat{f}$ sarà anche indicata con $\mathscr{F}\{f\}$.
Se f $L^2(\mathbb{R})$, la sua trasformata di Fourier è definita da

$$\hat{f}(x) = \lim_{N\to\infty} g_N(x) \tag{3.2}$$

dove

$$g_N(x) = \int_{-N}^{+N} f(t)\exp(itx)dt$$

e il limite va inteso nel senso della convergenza in norma $L^2(\mathbb{R})$ cioè

$$\lim_{N\to\infty} \|\hat{f}(x)-g_N(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0.$$

■

REGOLE ALGEBRICHE DI TRASFORMAZIONE

Se $f(t) \to \hat{f}(x)$, abbiamo

(3.3) $\qquad f(at) \to \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{x}{a}) \qquad a \neq 0$

(3.4) $\qquad f(t-a) \to \exp(iax)\hat{f}(x)$

(3.5) $\qquad f(t).\exp(-iat) \to \hat{f}(x-a)$

(3.6) $\qquad \overline{f(t)} \to \overline{\hat{f}(-x)}$

Inoltre $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $\forall f,g$ trasformabili secondo Fourier abbiamo

(3.7) $\qquad (\alpha f+\beta g)\hat{} = \alpha\hat{f}+\beta\hat{g}$

Dalle proprietà precedenti si ottiene lo schema:

(3.8) $\qquad$ f pari [1] $\Longrightarrow$ $\hat{f}$ pari

(3.9) $\qquad$ f dispari [2] $\Longrightarrow$ $\hat{f}$ dispari

(3.10) $\qquad$ f reale pari $\Longrightarrow$ $\hat{f}$ reale pari

(3.11) $\qquad$ f reale dispari $\Longrightarrow$ $\hat{f}$ immaginaria pura e dispari.

■

PROPRIETA' FUNZIONALI DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

(3.12) $\qquad f\in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

a) $|\hat{f}(x)| \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \qquad \forall x\in\mathbb{R}$

b) $\hat{f}\in C(\mathbb{R})$

c) $\lim_{|x|\to\infty} \hat{f}(x) = 0$ (lemma di Riemann-Lebesgue)

---

(1) Con f pari intendiamo $f(t) = f(-t)$.

(2) Con f dispari intendiamo $f(t) = -f(-t)$.

(3.13) $f \in L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

a) $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$

b) $\|\hat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi}\,\|f\|_{L^2}$

c) $f = \frac{1}{2\pi}\,\bar{\hat{\hat{f}}}$

(3.14) $f,g \in L^2(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\bar{\hat{g}}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\bar{g}(t)dt$$

(identità di Parseval)

Negli enunciati successivi con l'espressione "f è Fourier-trasformabile" si intende dire che f appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ o ad $L^2(\mathbb{R})$.

(3.15) $f \in AC$, f e $\frac{d}{dt}f$ Fourier trasformabili $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left(\frac{d}{dt}f\right)^{\wedge} = -ix\hat{f}(x)$$

(3.16) f Fourier-trasformabile e $tf(t) \in L^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}), \frac{d}{dx}\hat{f} \text{ è infinitesima all'infinito e} \\ \frac{d}{dx}\hat{f}(x) = (itf(t))^{\wedge}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(3.17) f Fourier Trasformabile, $tf \in L^2(\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \hat{f} \in AC(\mathbb{R}) \\ \frac{d}{dx}\hat{f}(x) = (itf)^{\wedge}(x) \qquad \text{quasi ovunque in } \mathbb{R}. \end{cases}$$

■

INVERSIONE DELLA TRASFORMATA DI FOURIER

(3.18) Se $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ abbiamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\exp(-itx)dx$$

(3.19) Se $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ abbiamo

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N} \hat{f}(x)\exp(-itx)dx$$

dove il limite va inteso nel senso di $L^2(\mathbb{R})$.

■

CONVOLUZIONE

Definizione 5 - Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, la convoluzione di f e g è la funzione

$$(3.20) \qquad f*g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$$

Risulta $f*g \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre anche se $f \in L^1$ e $g \in L^2$ la (3.20) ha significato ed in tale caso la convoluzione $f*g$ appartiene ad $L^2(\mathbb{R})$.

Teorema - Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$ (o $g \in L^2(\mathbb{R})$). Allora $(f*g)\hat{} = \hat{f}.\hat{g}$. ■

Teorema - Se $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Allora $f.g \in L^1(\mathbb{R})$ e $(f.g)\hat{} = \frac{1}{2\pi}\hat{f}*\hat{g}$. ■

Osservazione - La convoluzione è commutativa: $f*g = g*f$. ■

CAPITOLO IV
ESERCIZI SULLA TRASFORMATA DI FOURIER

NUMERO 23

Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

SOLUZIONE

Consideriamo la funzione di variabile complessa $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.
Le sue singolarità sono i poli semplici $\pm i$. Sia Γ_R il circuito costituito dal segmento $|-R,R|$ contenuto nell'asse reale e dalla semicirconferenza di raggio R centrata nell'origine e contenuta nel semipiano superiore. Γ_R si intende orientato in senso antiorario. Poichè $|f(z)| \sim \frac{1}{|z|^2}$ per $z >> 0$ è possibile applicare il lemma di Jordan.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ix\xi)}{1+x^2}\, dx = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\exp ix\xi}{1+z^2}, z = i\right) = \pi e^{-\xi} \qquad \forall \xi > 0$$

Poiché f è una funzione pari, $\hat{f}$ sarà pari.
Inoltre f appartiene ad $L^1(R)$ implica $\hat{f}$ continua, perciò il valore $\hat{f}(0)$ si ottiene per continuità dai valori di $\hat{f}(\xi)$ con $\xi > 0$.
Concludendo

$$\hat{f}(\xi) = \pi \exp(-|\xi|) \qquad \forall \xi \in R.$$

■

NUMERO 24

Calcolare la trasformata di Fourier di $\exp(-at^2)$ con a reale strettamente positivo.

SOLUZIONE

Per effettuare il calcolo della trasformata di $\exp(-at^2)$ non è possibile utilizzare il lemma di Jordan perché la funzione analitica $\exp(-4z^2)$ ha una singolarità essenziale nel punto all'infinito. In particolare non è infinitesima quando $|z|$ tende all'infinito: ad esempio se $z = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ si ha $\exp(-az^2) = \exp a\lambda^2$.
Per effettuare il calcolo diretto sfruttiamo l'identità

$$(*) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(t-ib)^2]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi} \qquad \forall b \in \mathbb{R}.$$

Da (*) segue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ixt)\exp(-t^2)dt = \exp(-x^2/4) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-(t-ix/2)^2]dt =$$

$$= \sqrt{\pi}\, \exp(-x^2/4)$$

$$\mathcal{F}\{\exp(-at^2)\} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, \exp(-x^2/4a)$$

Per dimostrare (*) consideriamo la funzione analitica intera $\exp(-z^2)$ ed il circuito Γ_R della figura

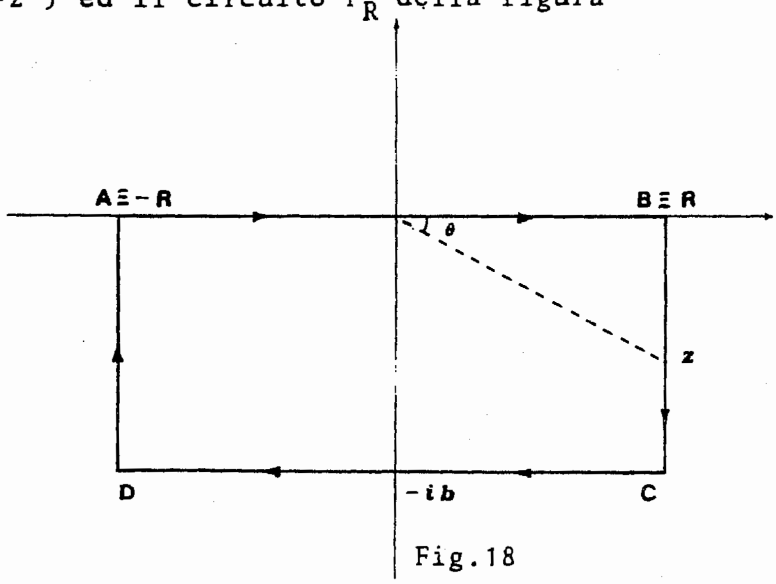


Fig.18

Dal teorema di Cauchy $\oint_{\Gamma_R} \exp(-z^2)dz = 0 \quad \forall R.$

Inoltre

$$\lim_{R\to\infty} \int_B^C \exp(-z^2)dz = 0$$

perché se R > 2b, facendo riferimento alla figura 15 abbiamo $\forall z \in BC$

$$|\exp(-z^2)| = \exp(-|z|^2\cos 2\theta) \leqslant \exp(-R^2\cos 2\theta) =$$

$$= \exp|-R^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)| = \exp\left[\frac{-R^2}{R^2+x^2}(R^2-b^2)\right] \leqslant \exp(-R^2/4)$$

Nello stesso modo si dimostra

$$\lim_R \int_D^A \exp(-z^2)dz = 0$$

Perciò

$$\int_A^B \exp(-z^2)dz = -\int_C^D \exp(-z^2)dz + o(R)$$

$$\int_{-R}^R \exp(-t^2)dt = \int_{-R}^R \exp[-(t-ib)^2]dt + o(R)$$

prendendo il limite in R si ottiene (*).

Diamo anche una soluzione alternativa a quella del calcolo diretto: consideriamo una equazione differenziali di cui $u(t)=\exp(-t^2)$ è soluzione, applichiamo la trasformata di Fourier ad ambo i membri dell'equazione e risolviamo l'equazione ottenuta in $\hat{u}$.

u risolve $\qquad u'(t) = -2tu(t)$

trasformando

$$-ix\hat{u}(x) = -2(-i)(itu(t))\hat{}(x)$$

$$\hat{u}'(x) = -\frac{1}{2}x\hat{u}(x)$$

la soluzione generale è della forma

$$c\exp(-x^2/4)$$

con $c = \hat{u}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \sqrt{\pi}.$

■

NUMERO 25

Posto $f(x) = 5x \cos 7x.(9x^2+4)^{-2}$ calcolare $\hat{f}(\xi)$.

SOLUZIONE

Posto

$$\varphi(x) = (9x^2+4)^{-1}$$

abbiamo

$$\varphi'(x) = -18x(9x^2+4)^{-2}$$

da cui

$$f(x) = -\frac{5}{18}\varphi'(x)\cos 7x = -\frac{5}{36}\varphi'(x)[\exp(7ix)+\exp(-7ix)].$$

Essendo $\widehat{\varphi'} = -i\xi\hat{\varphi}$ risulta

$$\hat{f}(\xi) = \frac{5}{36} i[(\xi+7)\hat{\varphi}(\xi+7)+(\xi-7)\hat{\varphi}(\xi-7)]. \tag{1}$$

Per calcolare $\hat{\varphi}$, osserviamo che essa è pari e continua, perché φ è pari ed appartiene ad L^1. Applichiamo le tecniche di variabile complessa (Lemma di Jordan e teorema dei residui) con $\xi > 0$ nel semipiano $\mathrm{Im}z > 0$. Dunque

$$\hat{\varphi}(\xi) = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\exp(i\xi z).(9z^2+4)^{-1}, \frac{2}{3}i\right) = 2\pi i \frac{\exp\left(-\frac{2}{3}\xi\right)}{12i} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\exp\left(-\frac{2}{3}\xi\right) \qquad \xi > 0$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{\pi}{6}\exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|\right), \qquad \xi\in R.$$

Da (1) segue allora

$$\hat{f}(\xi) = \frac{5\pi i}{216}\left[(\xi+7)\exp\left(-\frac{2}{3}|\xi+7|\right)+(\xi-7)\exp\left(-\frac{2}{3}|\xi-7|\right)\right]$$

■

NUMERO 26

Con le notazioni dell'esercizio 25, si ponga

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt$$

Mostrare che F è ben definita e trasformabile secondo Fourier, studiare a priori $\hat{F}$ e calcolarla.

SOLUZIONE

f non ha singolarità sull'asse reale e per $|x| \gg 0$ $|f(x)| \leqslant \frac{C}{|x|^3}$.
Perciò f appartiene ad $L^1(\mathbb{R})$ e F è ben definita (perché è una primitiva cambiata di segno).
Poiché f è dispari, F risulta essere pari. Basta studiare F per $x \geqslant 0$.

$$|F(x)| \leqslant \int_x^{\infty} |f(t)|dt \leqslant \int_x^{\infty} \frac{5t}{(9t^2+4)^2}\,dt = \frac{5}{18}\,\frac{1}{9x^2+4}$$

poiché

$$(9x^2+4)^{-1} \in L^1 \cap L^2 \quad \text{e} \quad x(9x^2+4)^{-1} \in L^2$$

risulta

$$F \in L^1(0,\infty) \cap L^2(0,\infty) \quad \text{e} \quad xF \in L^2(0,\infty)$$

Essendo F pari,

$$F \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \qquad xF \in L^2(\mathbb{R})$$

Dunque $\hat{F}$ è definita, continua, nulla all'infinito ed è di quadrato sommabile. Inoltre $\hat{F}$ è assolutamente continua e $\hat{F}' \in L^2(\mathbb{R})$.
Essendo F reale e pari, anche $\hat{F}$ sarà reale e pari.
Poiché $f \in C^\infty$ e $F' = -f$, sarà $F \in C^\infty(\mathbb{R})$.
Inoltre è facile vedere che $\forall n \geqslant 0$ $f^{(n)} \in L^1 \cap L^2$; segue che $\forall n$ $F^{(n)} \in L^1 \cap L^2$ e $\forall n$ $\xi^n \hat{F} \in L^2$ ed è nulla all'infinito. Cioè $\hat{F}$ all'infinito è infinitesima di ordine superiore ad ogni numero reale.
Per il calcolo esplicito partiamo da $F' = -f$ da cui $-i\xi\hat{F}(\xi) = -\hat{f}(\xi)$

$$\hat{F}(\xi) = \frac{5\pi}{216\xi}\left[(\xi+7)\exp\left(-\frac{2}{3}|\xi+7|\right)+(\xi-7)\exp\left(-\frac{2}{3}|\xi-7|\right)\right] \qquad \xi \neq 0$$

$$\hat{F}(0) = 0$$

■

NUMERO 27

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{\sin^2 3x}{x^2+2x+2}$$

SOLUZIONE

Posto

$$g(x) = (x^2+2x+2)^{-1}.$$

Risulta

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 6x\right)g(x) = \frac{1}{2}\,g(x) - \frac{1}{4}\,g(x)\exp(6ix) - \frac{1}{4}\,g(x)\exp(-6ix).$$

Per $\xi > 0$, applicando il teorema dei residui ed il lemma di Jordan alla funzione $g(z) = (z^2+2x+2)^{-1}$ nel semipiano $\mathrm{Im}z > 0$, si ha

$$\hat{g}(\xi) = 2\pi i\ \mathrm{Res}(g(z)\exp(i\xi z), -1+i) = \pi\exp[-\xi(1+i)]$$

Analogamente per $\xi < 0$ si considera il semipiano $\mathrm{Im}z \leqslant 0$

$$\hat{g}(\xi) = -2\pi i\ \mathrm{Res}(g(z)\exp(i\xi z), -1-i) = \pi\exp[\xi(1-i)].$$

Poiché $g \in L^1$, $\hat{g}$ risulta essere continua. Si conclude

$$g(\xi) = \pi\exp(-i\xi-|\xi|) \qquad \forall \xi \in R.$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2}\exp(-i\xi-|\xi|) - \frac{\pi}{4}\exp[-i(\xi+6)-|\xi+6|] - \frac{\pi}{4}\exp[-i(\xi-6)-|\xi-6|] \qquad \forall \xi \in R.$$

■

NUMERO 28

Calcolare

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x-|\xi|}\cdot\frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$$

SOLUZIONE

Risulta

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-|\xi|}\cdot\frac{\sin\xi}{\xi}\right\} = \mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-|\xi|}\right\} * \mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\sin\xi}{\xi}\right\}$$

E' noto che

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{e^{-|\xi|}\right\} = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{x^2+1}$$

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\sin\xi}{\xi}\right\} = \frac{1}{2}\,p(x)$$

dove $p(x) = 1$ se $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $p(x) = 0$ altrove. Quindi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{x^2+1} * p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{p(x-t)}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{x-1}^{x+1}\frac{1}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}(x+1)-\operatorname{arctg}(x-1)\right]\;.$$

■

NUMERO 29

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{x\exp(3-5ix)}{(3x-2i)^2}$$

SOLUZIONE

$$\hat{f}(\xi) = e^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(ix(\xi-5)\big) \cdot \frac{x}{(3x-2i)^2}\, dx .$$

Si può applicare il lemma di Jordan alla funzione $\varphi(z) = \frac{z}{(3z+2i)^2}$ poiché $|\varphi(z)| \leqslant \frac{C}{|z|}$ se $|z| \geqslant R_0$ con R_0,C opportuni. D'altra parte la funzione $\varphi(z).\exp\big(iz(\xi-5)\big)$ ha l'unica singolarità (polo doppio)in $z = \frac{2}{3}i$. Il residuo r è dato da

$$r = \lim_{z \to \frac{2}{3}i} \frac{d}{dz}\left[\exp[iz(\xi-5)]\ \frac{z(z-2i/3)^2}{(3z-2i)^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{9} \lim_{z \to \frac{2}{3}i} \frac{d}{dz}\ (z\exp[iz(\xi-5)]) = \frac{1}{9}\left[1 - \frac{2}{3}(\xi-5)\right]\exp\left[-\frac{2}{3}(\xi-5)\right]$$

Scegliendo allora il circuito nel semipiano $\mathrm{Im}z > 0$ o $\mathrm{Im}z \leqslant 0$ a seconda che sia $\xi > 5$ oppure $\xi < 5$ si ha:

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi i e^3 r = \frac{2\pi e^3}{9}\, i \left[1 - \frac{2}{3}(\xi-5)\right]\exp\left[-\frac{2}{3}(\xi-5)\right] \qquad \text{se} \quad \xi > 5$$

$$\hat{f}(\xi) = 0 \qquad \text{se} \quad \xi < 5$$

Se H è la funzione di Heaviside: $H(x) = 0$ per $x < 0$ $H(x) = 1$ per $x \geqslant 0$, possiamo scrivere:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{2\pi e^3}{9}\, i \left[1 - \frac{2}{3}(\xi-5)\right]H(\xi-5)\exp\left[-\frac{2}{3}(\xi-5)\right].$$

■

NUMERO 30

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = x(x^2+4)^{-2}$$

SOLUZIONE

Posto

$$g(x) = (x^2+4)^{-1},$$

risulta

$$f(x) = -\frac{1}{2}\, g'(x)$$

E' noto che $\mathscr{F}\{(x^2+1)^{-1}\} = \pi \exp(-|\xi|)$ (cfr.es.23).

Da $g(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^{-1}$, applicando le proprietà (3.3) e (3.15) del capitolo 3, si ha:

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\pi}{2}\exp(-2|\xi|)$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi i}{4}\xi\exp(-2|\xi|).$$

Si poteva anche calcolare la trasformata direttamente mediante tecniche di analisi complessa.

■

NUMERO 31

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$g(x) = \frac{7\sin(3x-2)}{x^2+25} - 2\exp(4-5|x-3|)$$

SOLUZIONE

Posto $h_1(x) = \frac{1}{x^2+25}$, $h_2(x) = \exp(-5|x|)$, si ha

$$g(x) = 7h_1(x)\sin(3x-2)-2e^4h_2(x-3) =$$

$$= \frac{7}{2i} h_1(x)\left[e^{i(3x-2)}-e^{-i(3x-2)}\right]-2e^4h_2(x-3)$$

$$\hat{g}(\xi) = \frac{7e^{-2i}}{2i} \hat{h}_1(\xi+3) - \frac{7e^{2i}}{2i} \hat{h}_1(\xi-3)-2e^4e^{3i\xi}\hat{h}_2(\xi).$$

Applicando il lemma di Jordan ed il teorema dei residui si ha per $\xi > 0$

$$\hat{h}_1(\xi) = 2\pi i \operatorname{Res}(h_1(z)\exp(i\xi z),5i) = \frac{\pi}{5} \exp(-5\xi)$$

essendo h_1 pari, tale sarà $\hat{h}_1$ ed il valore in zero si ottiene per continuità, dunque

$$\hat{h}_1(\xi) = \frac{\pi}{5} \exp(-5|\xi|) \qquad \forall \xi\in R.$$

Risulta inoltre

$$\hat{h}_2(\xi) = \int_{-\infty}^{0} \exp(5x+i\xi x)dx + \int_{0}^{\infty} \exp(-5x+i\xi x)dx = \frac{1}{i\xi+5} - \frac{1}{i\xi-5} =$$

$$= \frac{10}{\xi^2+25} \qquad \forall\xi\in R.$$

Concludendo

$$\hat{g}(\xi) = \frac{7e^{-2i}}{2i} \frac{\pi}{5} \exp(-5|\xi+3|) - \frac{7e^{2i}}{2i} \frac{\pi}{5} \exp(-5|\xi-3|) + 2e^{4+3i\xi} \frac{10}{\xi^2+25}.$$

■

NUMERO 32

Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \frac{1-\cos 6x}{x}.$$

SOLUZIONE

Risulta

$$\frac{1-\cos 6x}{x} = 2\,\frac{\sin^2 3x}{x} = 2\sin 3x \cdot \frac{\sin 3x}{x} = i(e^{3ix}-e^{-3ix})\,\frac{\sin 3x}{x}$$

Lo zero è una singolarità apparente e all'infinito $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$ perciò f appartiene ad $L^2(\mathbb{R})$ ed è quindi trasformabile.

Posto $p(\xi) = 1$ se $|\xi| < 1$ e $p(\xi) = 0$ se $|\xi| > 1$, e noto che

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} = \pi p(\xi) .$$

Si ha quindi

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 3x}{x}\right\} = 3\mathcal{F}\left\{\frac{\sin 3x}{3x}\right\} = 3\,\frac{1}{3}\,\pi p\left(\frac{\xi}{3}\right) = \pi p\left(\frac{\xi}{3}\right)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1-\cos 6x}{x}\right\} = \pi i\left[p\left(\frac{\xi+3}{3}\right) - p\left(\frac{\xi-3}{3}\right)\right]$$

cioè

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1-\cos 6x}{x}\right\} = \begin{cases} +\pi i & \text{se } -6 < \xi < 0 \\ -\pi i & \text{se } \ 0 < \xi < 6 \\ 0 & \text{se } |\xi| > 6. \end{cases}$$

■

NUMERO 33

Calcolare per ogni $\xi \in R$ l'integrale

$$f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix(\xi^3-2\xi+6)}}{x^2+1}\, dx$$

SOLUZIONE

Sia $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. E' noto che $\hat{\varphi}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$.

Segue

$$f(\xi) = \hat{\varphi}(\xi^3 - 2\xi+6) = \pi \exp(-|\xi^3-2\xi+6|).$$

■

NUMERO 34

Studiare a priori la trasformata di Fourier di

$$f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} \cdot \sin 3x$$

senza calcolarla effettivamente.

SOLUZIONE

Sia $h(x) = \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}$. Si ha $h \in L^1 \cap L^2$ e $xh \in L^2$. Ne segue $\hat{h}$ è continua, anzi assolutamente continua, nulla all'infinito e $\hat{h}, \hat{h}' \in L^2$ (cfr. Le proprietà funzionali della trasformata di Fourier ricordate nel cap.3).
Inoltre $h \in C^\infty$ con $h^{(n)} \in L^1 \cap L^2$ $\forall n \geqslant 0$.
Dunque $\xi^n \hat{h} \in L^2$ ed è nulla all'infinito per ogni n, cioè $\hat{h}$ è a decrescenza rapida.
Infine non è difficile vedere che $\forall n \, \exists \, m$: $x^n h^{(m)} \in L^1$.
Segue $\mathscr{F}\left\{x^n h^{(m)}\right\}$ continua, cioè $\frac{d^n}{d\xi^n}(\xi^m \hat{h})$ esiste ed è continua.
Cioè $\forall n \exists m$: $\xi^m \hat{h} \in C^n$, da cui $\forall$ n $\hat{h} \in C^n$ per $\xi \neq 0$.
Dunque $\hat{h}$ è C^∞ per $\xi \neq 0$.
Ma

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2i}\left(\hat{h}(\xi+3) - \hat{h}(\xi-3)\right).$$

Segue che $\hat{f}$ è assolutamente continua, $\hat{f}' \in L^2$, $\hat{f}$ è a decrescenza rapida, $\hat{f}$ è C^∞ per $\xi \neq \pm 3$.

■

NUMERO 35

Sia $\varepsilon > 0$. Poniamo $f_\varepsilon(x) = \ln|x|$ se $\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1$, $f_\varepsilon(x) = \ln\varepsilon$ se $|x| < \varepsilon$ e $f_\varepsilon(x) = 0$ se $|x| > 1$. Calcolare la trasformata di Fourier di f_ε e dedurre quella di $f(x) = \ln|x|.H(1-x^2)$ (H è la funzione di Heaviside).
Per il calcolo di $\hat{f}_\varepsilon$ si consiglia di studiare $\varphi_\varepsilon(x) = xf'_\varepsilon(x)$.

SOLUZIONE

f_ε è una funzione assolutamente continua a supporto compatto, dunque $f'_\varepsilon \in L^1(R)$ ed ha supporto compatto, e $\varphi_\varepsilon \in L^1(R)$.

$\varphi_\varepsilon(x) = 1$ se $\varepsilon < |x| < 1$, $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ altrove.

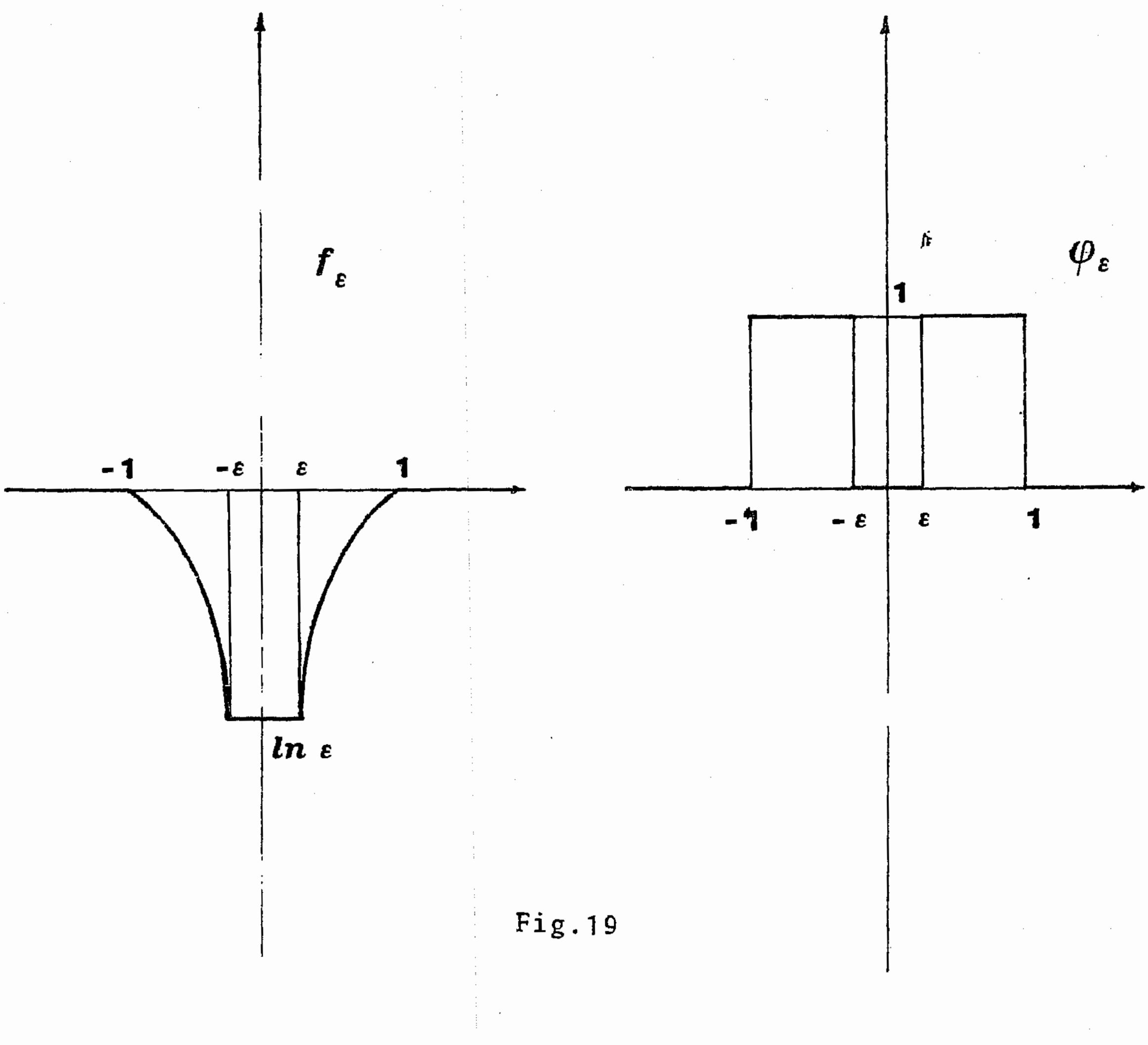


Fig.19

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = 2\int_\varepsilon^1 \cos\xi x dx = \frac{2}{\xi}(\sin\xi - \sin\varepsilon\xi) \qquad \forall\xi \neq 0.$$

Essendo $f_\varepsilon \in L^1$ e assolutamente continua con f'_ε, $xf'_\varepsilon \in L^1$, abbiamo

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi) = (xf'_\varepsilon)\hat{}(\xi) = -i\frac{d}{d\xi}(f'_\varepsilon)\hat{}(\xi) = -i\frac{d}{d\xi}(-i\xi\hat{f}_\varepsilon(\xi)) = -\frac{d}{d\xi}(\xi\hat{f}_\varepsilon(\xi))$$

$$\frac{d}{d\xi}[\xi\hat{f}_\varepsilon(\xi)] = \frac{2}{\xi}(\sin\varepsilon\xi - \sin\xi)$$

quindi, dalla continuità di $\hat{f}_\varepsilon$ per la formula fondamentale del calcolo

$$\xi\hat{f}_\varepsilon(\xi) = 2\int_0^\xi \frac{\sin\varepsilon t}{t}dt - 2\int_0^\xi \frac{\sin t}{t}dt = 2\int_0^{\varepsilon\xi} \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau - 2\int_0^\xi \frac{\sin t}{t}dt =$$

$$= 2\mathrm{Si}(\varepsilon\xi) - \mathrm{Si}\xi$$

dove si è indicato il seno integrale con $\mathrm{Si}y = \int_0^y \frac{\sin t}{t}dt$.

$$\hat{f}_\varepsilon(\xi) = 2\frac{\mathrm{Si}(\varepsilon\xi)}{\xi} - 2\frac{\mathrm{Si}\xi}{\xi}.$$

La funzione f è data da $f(x) = \ln|x|$ se $0 < |x| < 1$ e $f(x) = 0$ se $|x| > 1$. In particolare $f \in L^1$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f_\varepsilon(x)| = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\ln|x| - \ln\varepsilon|dx \to 0$$

Dunque $f_\varepsilon \to f$ in L^1 e $\hat{f}_\varepsilon \to \hat{f}$ uniformemente.
In particolare per ξ fissato in $\mathbb{R}$ si ha

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\hat{f}_\varepsilon(\xi) = -2\frac{\mathrm{Si}\xi}{\xi}.$$

■

Osservazione - Si noti che $f'(x) = \frac{1}{x}H(1-x^2)$ non appartiene ad L^1 a causa della singolarità nell'origine. E' per questo che si è resa necessaria l'approssimazione per poter applicare il risultato (3.15) del capitolo III. In particolare

$$f'_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

Comunque, per il calcolo di $\mathscr{F}\{\ln|x|\cdot H(1-x^2)\}$ si poteva procedere anche nel modo seguente:

$$xf \in AC \cap L^1 \text{ e}$$

$$(xf)' = f(x)+p(x) \in L^1(R)$$

$$-\xi\hat{f}' = \hat{f} + \frac{2\sin\xi}{\xi} .$$

Per $\xi > 0$, abbiamo

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\xi}\left[C - 2\int_0^{\xi} \frac{\sin t}{t}\, dt\right]$$

Se fosse $C \neq 0$, avremo $\hat{f}$ discontinua in $\xi = 0$; questo è in contraddizione con il fatto che $f \in L^1$.

Dunque $C = 0$ e

$$\hat{f}(\xi) = -\frac{2\mathrm{Si}\,\xi}{\xi} \qquad \xi > 0 .$$

Poiché $f \in L^1$ ed è reale e pari

$$\hat{f}(\xi) = -\frac{2\mathrm{Si}\,\xi}{\xi} \qquad \forall \xi \in R .$$

■

NUMERO 36

Studiare a priori la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \frac{\text{arctg } t}{t}$$

Calcolare effettivamente la trsformata. (Si consideri l'equazione differenziale del I° ordine soddisfatta da f).

SOLUZIONE

$f \in C^\infty(R)$. Per $t \neq 0$ è evidente, in $t = 0$ basta considerare lo sviluppo di Taylor di $\text{arctg } t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$ per $|t| < 1$, da cui

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} \qquad \text{per} \quad |t| < 1.$$

(a) f reale e pari $\Longrightarrow$ $\hat{f}$ reale e pari

(b) $f \in L^2 \Longrightarrow \hat{f} \in L^2$

(c) f è assolutamente continua con $f' \in L^1 \cap L^2$; inoltre $\forall n \geq 1$. $f^{(n)}$ è assolutamente continua e $f^{(n)} \in L^1 \cap L^2$, se ne deduce $x^n \hat{f}(x) \in L^2 \cap C^0$ ed è nulla all'infinito, cioè $\hat{f}$ è continua in $R \setminus \{0\}$ ed è a decrescenza rapida.

Calcolo di $\hat{f}$:

$$f'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{\text{arctg } t}{t^2} = \frac{1}{t(1+t^2)} - \frac{1}{t} f(t)$$

$$itf'(t) + if(t) = \frac{i}{1+t^2}$$

applicando la trasformata di Fourier ad ambo i membri

$$((f')^\wedge)' + i\hat{f} = i\pi e^{-|x|}$$

$$-x\hat{f}' = \pi e^{-|x|}$$

$$\hat{f}' = -\pi \frac{e^{-|x|}}{x}$$

$\hat{f}$ deve annullarsi all'infinito. Per $x < 0$ abbiamo

$$\hat{f}(x) = -\pi \int_{-\infty}^{x} \frac{e^y}{y}\, dy = \pi \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

per $x > 0$ il valore si ottiene per parità. In conclusione

$$\hat{f}(x) = \pi \int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy \qquad \forall x \neq 0.$$

Studiamo $\hat{f}(x)$ per x che tende a zero. Sia $0 < x < 1$.

$$\hat{f}(x) = \pi \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y}\, dy + \pi \int_{x}^{1} \frac{e^{-y}}{y}$$

il primo integrale è convergente. Integriamo per serie il secondo

$$\int_{x}^{1} \frac{e^{-y}}{y}\, dy = \int_{x}^{1} \frac{dy}{y} + \sum_{1}^{\infty} \int_{x}^{1} \frac{(-1)^n y^{n-1}}{n!}\, dy$$

Dunque $\hat{f}(x) = C - \ln x$.

Si conclude che $\hat{f}$ ha una singolarità di tipo logaritmico nella origine, in accordo con la proprietà $x\hat{f}(x)$ continua, dedotta a priori.

■

NUMERO 37

Sia $f(t) = e^{-t}$ se $0 < t < 1$, $f(t) = 0$ altrove.
Studiare a priori $\hat{f}$ e calcolarla.

SOLUZIONE

$f \in L^1 \cap L^2$ perciò $f \in L^2$, è continua e nulla all'infinito.
f non è assolutamente continua, perciò non abbiamo informazioni a priori sul comportamento di $x^n \hat{f}$.
$t^n f \in L^1 \cap L^2$ $\forall n > 0$ dunque $\hat{f}^{(n)} \in L^2$ $\forall n > 0$ e $\hat{f} \in C^\infty(R)$. Inoltre tutte le derivate di $\hat{f}$ sono infinitesime all'infinito.

$$\hat{f}(x) = \int_{-}^{+\infty} e^{ixt} f(t) = \int_0^1 e^{-t+ixt} dt = \frac{e^{ix-1}-1}{ix-1} .$$

■

NUMERO 38

Si consideri l'equazione

$$e^{-t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-y|}\varphi(y)\,dy \qquad t\in R$$

Si chiede di

a) trovare la trasformata di Fourier di φ,

b) senza calcolare φ, mostrare che $\varphi\in C^\infty$ ed è a decrescenza rapida,

c) calcolare effettivamente φ.

SOLUZIONE

a) $e^{-t^2} = e^{-|t|}*\varphi$

applicando la trasformata di Fourier

$$\sqrt{\pi}\exp(-x^2/4) = \frac{2}{1+x^2}\,\hat{\varphi}(x)$$

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,(1+x^2)\exp(-x^2/4)$$

b) $\hat{\varphi}\in L^1$ e $x^n\hat{\varphi}\in L^1$ $\forall n \geq 0$. Perciò $\frac{d^n}{dx^n}\varphi$ è continua $\forall n \geqslant 0$, cioè φ è C^∞.

Inoltre $\hat{\varphi}$ è C^∞ e tutte le sue derivate appartengono ad L^1 perché sono del tipo $P(x)\exp(-x^2/4)$ con P polinomio. Dunque $t^n\varphi(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$.

c) Ricordando che

$$\mathcal{F}\{\exp(-t^2)\} = \sqrt{\pi}\exp(-x^2/4)$$

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -x^2\hat{f}(x)$$

Si ha

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\,e^{-t^2} - \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dt^2}(e^{-t^2}) = \left(\frac{3}{2} - 2t^2\right)e^{-t^2}.$$

■

NUMERO 39

Si consideri la funzione $g(t) = t.\cos t.\ln|5t|$ se $|t| < \frac{1}{5}$, $g(t)=0$ altrove.

a) senza calcolare esplicitamente $\hat{g}(x)$ dimostrare che essa è C^{∞} e $\hat{g}^{(n)}$ è nulla all'infinito per ogni $n \geqslant 0$;

b) calcolare $\hat{g}(x)$ sapendo che, posto $f(t) = \ln|t|$ se $|t| < 1$ e $f(t) = 0$ se $|t| > 1$, si ha $\hat{f}(x) = -2\,\frac{\mathrm{Si}\,x}{x}$ (cfr.Es.35).

SOLUZIONE

a) $g(t)$ appartiene ad L^1 ed ha supporto limitato.
Dunque $t^n g(t) \in L^1$ $\forall n \geqslant 0$, e $\frac{d^n}{dx^n}\hat{g}$ è continua e nulla all'infinito per ogni n.

b) posto $h(t) = \ln|5t|$ se $|t| < 1/5$ e $h(t) = 0$ se $|t| > 1/5$ risulta $h(t) = f(5t)$ e $\hat{h}(x) = -\frac{2}{x}\,\mathrm{Si}\,\frac{x}{5}$.
Poiché h e th appartengono ad L^1, si ha

$$\mathscr{F}\{th(t)\} = -i\,\frac{d}{dx}\,\hat{h}(x) = \frac{2i}{x^2}\left(\sin\frac{x}{5} - \mathrm{Si}\,\frac{x}{5}\right)$$

Infine da $\cos t = \frac{1}{2}\,(e^{it}+e^{-it})$, abbiamo

$$\hat{g}(x) = \frac{i}{(x+1)^2}\left[\sin\frac{x+1}{5} - \mathrm{Si}\,\frac{x+1}{5}\right] + \frac{i}{(x-1)^2}\left[\sin\frac{x-1}{5} - \mathrm{Si}\,\frac{x-1}{5}\right].$$

■

NUMERO 40

Posto

$$v(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t)}{t^2+1}\,dt$$

Si studi la regolarità ed il comportamento all'infinito di v nel le ipotesi:

a) $u \in L^1(R)$;

b) $(1+|x|)u \in L^1(R)$.

SOLUZIONE

a) Sia $u \in L^1$. Poiché $(1+t^2)^{-1} \in L^1$, la convoluzione $u*(1+t^2)^{-1}$ è ben definita e risulta $v \in L^1$. Inoltre

$$\hat{v} = \hat{u}.\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^{\wedge}$$

Poniamo $f(t) = (1+t^2)^{-1}$. Risulta immediatamente che $f \in C^\infty$ e $\forall n \geqslant 0$ $f^{(n)} \in L^1 \cap L^2$. Ne segue che $\hat{f}$ è continua e $\forall n \geqslant 0$ $\xi^n \hat{f}(\xi)$ è nulla all'infinito ed appartiene ad L^2. Poiché $\hat{u}$ è limitata si ha

$$\xi^n \hat{v}(\xi) = \hat{u}.\xi^n \hat{f} \in L^2 \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Quindi v è infinitamente derivabile e tutte le sue derivate sono in L^2.

Poiché per ogni n, $v^{(n)}$ e $v^{(n+1)} \in L^2$, si ha che $v^{(n)}$ è continua è nulla all'infinito. In particolare v si annulla all'infinito.

b) Sia $(1+|x|)u \in L^1$. Allora $u \in L^1$, $xu \in L^1$.

Dunque $\hat{u} \in C^1$ e $\hat{u}, \hat{u}'$ sono limitate. $f, xf \in L^2$, ne segue f assolutamente continua e $\hat{f}, \hat{f}' \in L^2$.

Dunque il prodotto $\hat{v} = \hat{u}.\hat{f}$ è assolutamente continuo e

$$|\hat{v}| = |\hat{u}|.|\hat{f}| \leqslant c_1|\hat{f}|$$

$$|\hat{v}'| = |\hat{u}'.\hat{f}+\hat{u}.\hat{f}'| \leqslant |\hat{u}'|.|\hat{f}|+|\hat{u}|.|\hat{f}'| \leqslant c_2|\hat{f}|+c_1|\hat{f}'|$$

Ne segue che $\hat{v}, \hat{v}' \in L^2$ e quindi $xv \in L^2$ che è una ulteriore proprietà di annullamento all'infinito. Ovviamente continuano a valere tutte le proprietà dimostrate al punto a).

<u>Nota</u>. $\hat{f}$ può essere esplicitata: $\hat{f}(\xi) = e^{-|\xi|}$. Quindi $\hat{v}(\xi) = e^{-|\xi|}\hat{u}(\xi)$ da cui si possono leggere più direttamente le proprietà di v.

∎

NUMERO 41

Assegnata $f(t) = (t+i)^{-3}$.

a) Senza calcolare effettivamente $\hat{f}$, studiare a priori la trasformata di Fourier.

b) Calcolare $\hat{f}$.

SOLUZIONE

a) La funzione f non ha singolarità reali e all'infinito si comporta come $1/t^3$. Pertanto f e tf appartengono ad $L^1 \cap L^2$; $t^2 f$ appartiene ad L^2. Di conseguenza $\hat{f}$ e $\frac{d}{dx}\hat{f} \in C^0 \cap L^2$ e sono infinitesime all'infinito, e $\frac{d^2}{dx^2}\hat{f} \in L^2$.

Per ogni $n \geqslant 0$ $f^{(n)} \in L^1 \cap L^2$, perciò $x^n \hat{f}(x) \in L^2$ ed è infinitesima all'infinito.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m \text{ t.c. } t^k \frac{d^m}{dt^m} f(t) \in L^1.$$

Dunque

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists m \text{ t.c. } \frac{d^k}{dx^k}(x^m \hat{f}(x)) \in C^0(\mathbb{R}).$$

Se ne deduce che $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\})$.

b) $$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{dt}{(t+i)^3}$$

La funzione di variabile complessa $g(z) = \dfrac{e^{izx}}{(z+i)^3}$ è analitica in $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. $z = -i$ è un polo triplo.

Inoltre $(z+i)^{-3} \sim |z|^{-3}$ per $|z| >> 0$.

Applicando il teorema dei residui, e considerando un circuito contenuto nel semipiano superiore per $x > 0$ ed uno contenuto nel semipiano inferiore per $x < 0$, si ottiene

$$\mathrm{Res}\left(\frac{e^{izx}}{(z+i)^3}, -i\right) = -\frac{x^2}{2} e^x$$

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} \pi i x^2 e^x & x < 0 \\ 0 & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Si noti che il valore in zero è ottenuto per continuità di $\hat{f}$ essendo $f \in L^1$.

■

NUMERO 42

a) Sia $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{x^2}$. Mostrare che la trasformata di Fourier esiste e studiarne a priori le proprietà di sommabilità, regolarità e comportamento all'infinito.

b) Mostrare che $\hat{f}(\xi) = 2\pi e^{-|\xi|} \frac{\sin\xi}{\xi}$. (Si consiglia di calcolare la trasformata di $\frac{d}{dx} f(x)$).

c) Dimostrare che vale l'identità

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{x^2} = \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1)$$

e sfruttarla per dimostrare che

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{2\pi e^{-|\xi|} \frac{\sin\xi}{\xi}\right\} = f(x)$$

indipendentemente dal punto b).

SOLUZIONE

a) Osserviamo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. L'affermazione è di ovvia verifica per $x \neq 0$. Consideriamo f vicino a zero. Risulta

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

Dunque posto $f(0) = \frac{\pi}{2}$, f risulta continua anche in $x = 0$. Applicando la regola de L'Hôpital

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-4x}{x^4+4} = 0$$

Dunque $f'(0)$ esiste, inoltre

$$f'(x) = \frac{-4x}{x^4+4} \qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

E' allora ovvio che $f'\in C^\infty(\mathbb{R})$ e dunque $f\in C^\infty(\mathbb{R})$.
Usando ancora L'Hôpital:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{2}{x^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\operatorname{arctg} t}{t} = \lim_{t\to 0_+} \frac{1}{1+t^2} = 1.$$

Dunque $|f(x)| \leqslant \frac{C}{x^2}$ per $|x|$ grande. Ciò prova che $f\in L^1\cap L^2$.
Quindi

(1) $\hat{f}(\xi)$ esiste per ogni $\xi\in\mathbb{R}$.
(2) $\hat{f}$ è continua e nulla all'infinito.
(3) $\hat{f}\in L^2$.

Da quanto sopra risulta che $xf \in C^{\infty}(R)$ e all'infinito si comporta come $\frac{2}{x}$. Dunque $xf \in L^2$, $xf \notin L^1$.
Essendo in particolare $f, xf \in L^2$ risulta:

(4) $\hat{f}(\xi)$ è assolutamente continua e $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) \in L^2(R)$.

Poiché $f'(x) = \frac{-4x}{x^4+4}$, si ha $f^{(n)} \in L^1(R) \cap L^2(R)$, $\forall n$.

Dunque:

(5) $\xi^n \hat{f}(\xi)$ è nulla all'infinito per ogni n.

Le proprietà (4) e (5) assicurano che

(6) $\hat{f} \in L^1(R)$

Infine, essendo f reale e pari, risulta

(7) $\hat{f}$ reale e pari.

b) Poniamo $\varphi(x) = f'(x) = \frac{-4x}{x^4+4}$

Essendo φ reale e dispari, $\hat{\varphi}$ sarà immaginaria e dispari.
Calcoliamola per $\xi > 0$:

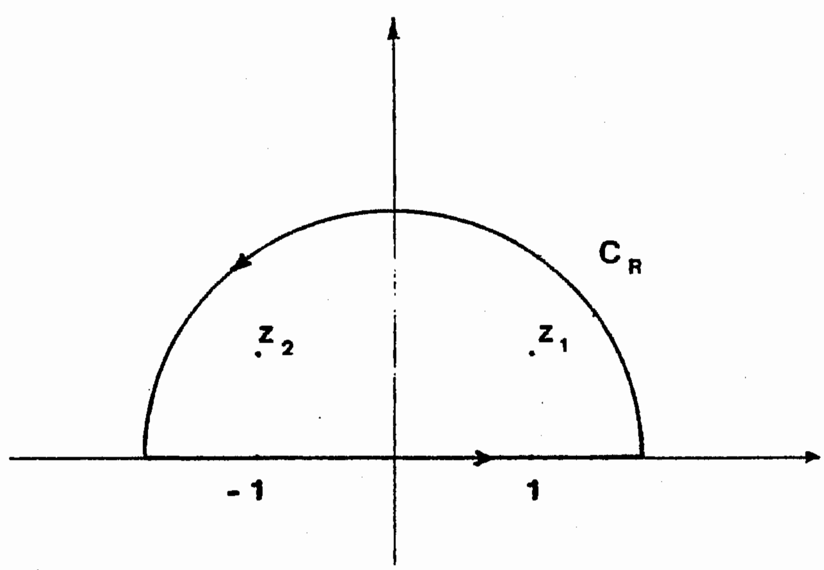


Fig.20

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-4xe^{i\xi x}}{x^4+4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{-4ze^{i\xi z}}{z^4+4}\,dz = 2\pi i(r_1+r_2)$$

dove r_j ($j = 1,2$) è il residuo in z_j dell'integrando e $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$ sono poli semplici

$$r_j = \lim_{z\to z_j} (z-z_j) \frac{-4ze^{i\xi z}}{z^4+4} = \frac{-4z_j e^{i\xi z_j}}{4z_j^3} = -\frac{e^{i\xi z_j}}{z_j^2}$$

$$r_1 = -\frac{e^{i\xi}e^{-\xi}}{2i}$$

$$r_2 = \frac{e^{-i\xi}e^{-\xi}}{2i}$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = -2\pi i e^{-\xi} \frac{e^{i\xi}-e^{-i\xi}}{2i} = -2\pi i e^{-\xi}\sin\xi \qquad \text{per} \quad \xi > 0$$

dovendo essere $\hat{\varphi}$ dispari e continua

$$\hat{\varphi}(\xi) = -2\pi i e^{-|\xi|}\sin\xi \qquad \forall\, \xi\in R.$$

Ora $\quad \hat{\varphi} = (f')^\wedge(\xi) = -i\xi\hat{f}(\xi).$

$$-i\xi\hat{f}(\xi) = -2\pi i e^{-|\xi|}\sin\xi$$

$$\hat{f}(\xi) = 2\pi e^{-|\xi|} \frac{\sin\xi}{\xi} \ .$$

c) Per $x = 1$ l'identità è vera. Inoltre si verifica che le derivate di ambo i membri sono uguali in R.

Si ha

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{2\pi e^{-|\xi|}\frac{\sin\xi}{\xi}\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\pi e^{-|\xi|}\right\} * \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\sin\xi}{\xi}\right\}$$

Posto $p(x) = 1$ se $|x| < 1$, $p(x) = 0$ se $|x| > 1$, è noto che

$$\hat{p}(\xi) = \frac{2\sin\xi}{\xi} \qquad \mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2+1}\right\} = \pi e^{-|\xi|}$$

Dunque

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{2\pi e^{-|\xi|}\frac{\sin\xi}{\xi}\right\} = \frac{1}{x^2+1} * p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x-s)}{s^2+1}\,ds = \int_{x-1}^{x+1} \frac{ds}{s^2+1} =$$

$$= \operatorname{arctg}(x+1) - \operatorname{arctg}(x-1) = \operatorname{arctg}\frac{2}{x^2} \ .$$

NUMERO 43

Mediante trasformazione di Fourier trovare almeno una soluzione dell'equazione

$$u''(x) + 2xu'(x) + 4u(x) = 0 \qquad x \in R.$$

SOLUZIONE

Posto $y(\xi) = \hat{u}(\xi)$, si ha

$$-\xi^2 y(\xi) - 2\frac{d}{d\xi}(\xi y(\xi)) + 4y(\xi) = 0$$

$$(*) \qquad 2\xi y' = (2-\xi^2)y.$$

Ragioniamo per $\xi > 0$:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{2}$$

$$\ln y = \ln C + \ln\xi - \frac{\xi^2}{4}$$

$$y(\xi) = C\xi e^{-\frac{\xi^2}{4}} \qquad \xi > 0.$$

Si verifica immediatamente che

$$y_1(\xi) = C\xi e^{-\xi^2/4} \qquad \xi \in R$$

è una soluzione di (*)

$$u(x) = \mathscr{F}^{-1}\{y(\xi)\} = C\mathscr{F}^{-1}\left\{\xi e^{-\xi^2/4}\right\} = C_o\mathscr{F}^{-1}\left\{-i\xi\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}\right\} =$$

$$= C_o \frac{d}{dx} e^{-x^2} = C_1 x e^{-x^2}.$$

Osservazione - Si noti che (*) è risolta anche da

$$y = C|\xi|e^{-\xi^2/4}$$

Ciò non deve sorprendere perché (*) è singolare nell'origine. Segue che

$$u_2(x) = \mathscr{F}^{-1}\left\{|\xi|e^{-\xi^2/4}\right\}$$

fornisce un integrale dell'equazione data indipendente linearmente da quello già trovato. L'integrale generale è perciò:

$$u(x) = C_1 x e^{-x} + C_2\mathscr{F}^{-1}\left\{|\xi|e^{-\xi^2/4}\right\}.$$

■

NUMERO 44

Assegnata la funzione g, trovare (formalmente) una rappresentante integrale della soluzione y di

$$y(x) + \int_0^{\infty} e^{-t} y(x-t)\,dt = g(x) \qquad -\infty < x < +\infty$$

Calcolare esplicitamente la soluzione nel caso particolare in cui $g(x) = e^{2x}H(-x)$, dove H è la funzione di Heaviside.

SOLUZIONE

L'equazione si scrive $y+y*(e^{-x}H(x)) = g$.
Applicando la trasformata di Fourier

$$\hat{y}+\hat{y}\cdot\frac{1}{1-i\xi} = \hat{g}$$

$$\hat{y} = \frac{1-i\xi}{2-i\xi}\,\hat{g} = \hat{g} - \frac{1}{2-i\xi}\,\hat{g}$$

Ma essendo

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2-i\xi}\right\} = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{2-i\xi}\,d\xi = e^{-2x}H(x)$$

(grazie all'applicabilità del lemma di Jordan e del teorema dei residui), risulta

$$y(x) = g(x)-(e^{-2x}H(x))*g(x) = g(x) - \int_0^{\infty} e^{-2t} g(x-t)\,dt.$$

Se infine $g(x) = e^{2x}H(-x)$

$$y(x) = e^{2x}H(-x) - \int_0^{\infty} e^{-2t}e^{2x-2t}H(t-x)\,dt =$$

$$= e^{2x}H(-x)-e^{2x}H(x)\int_x^{\infty} e^{-4t}dt - e^{2x}H(-x)\int_0^{\infty} e^{-4t}dt =$$

$$= \frac{3}{4}\,e^{2x}H(-x) - \frac{1}{4}\,e^{-2x}H(x)$$

■

NUMERO 45

Considerata l'equazione di incognita u

$$(1)\quad u(x)+\lambda i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-\xi|}\operatorname{sign}(x-\xi).u(\xi)d\xi = f(x) \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Risolverla (formalmente) nel caso

$$\lambda = 1, \quad f(x) = (1+ix)e^{-|x|}$$

SOLUZIONE

$$u(x)+\lambda iu(x)*(e^{-|x|}\operatorname{sign}x) = f(x)$$

Applicando la trasformata di Fourier, si ha

$$\mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\operatorname{sign}x\right\} = -\int_{-\infty}^{0} e^{i\xi x+x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{i\xi x-x}dx = \frac{2i\xi}{\xi^2+1}$$

Dunque $\hat{u}(\xi)+\lambda i\hat{u}(\xi)\ \dfrac{2i\xi}{\xi^2+1} = \hat{f}(\xi)$

$$(2)\qquad \hat{u}(\xi) = \frac{\xi^2+1}{\xi^2-2\lambda\xi+1}\ \hat{f}(\xi)$$

Nel caso particolare si ha

$$\hat{f}(\xi) = \mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\right\}+\mathscr{F}\left\{ixe^{-|x|}\right\} = \frac{2}{\xi^2+1} + \frac{d}{d\xi}\frac{2}{\xi^2+1} = 2\ \frac{\xi^2+1-2\xi}{(\xi^2+1)^2}$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{2}{\xi^2+1}$$

da cui $u(x) = e^{-|x|}$.

■

NUMERO 46

Discutere l'esistenza di soluzioni $u \in L^2(\mathbb{R})$ dell'equazione (1) dell'esercizio n.45, al variare di λ in $\mathbb{R}$ e di f in $L^2(\mathbb{R})$, sotto la condizione: $f(x) = 0$ per $|x| > 1$.
In caso di esistenza, studiare il comportamento all'infinito della soluzione nel caso $|\lambda| < 1$.

SOLUZIONE

Studiare il problema dell'esistenza della soluzione in $L^2(\mathbb{R})$, significa studiare quando, nelle ipotesi fatte su f, la (2) fornisce $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R})$.
Posto

$$A_\lambda(\xi) = \frac{\xi^2+1}{\xi^2-2\lambda\xi-1}$$

si ha

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} A_\lambda(\xi) = 1 \qquad \forall\lambda.$$

Dunque $|A_\lambda(\xi)| \leqslant 2$ per $|\xi| > \eta_\lambda$ per η_λ opportuno. Perciò

$$|A_\lambda(\xi)\hat{f}(\xi)| \leqslant 2|\hat{f}(\xi)| \quad \text{per} \quad |\xi| \geqslant \eta_\lambda .$$

Segue

$$A_\lambda \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}\setminus[-\eta_\lambda, +\eta_\lambda]) \tag{3}$$

Dunque basta vedere sotto quali condizioni risulta

$$A_\lambda \hat{f} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}).$$

Distinguiamo alcuni casi

(a) $|\lambda| < 1$. Allora $\xi^2-2\lambda\xi+1 \neq 0 \quad \forall\xi$. Segue A_λ limitato in $\mathbb{R}$ da cui $A_\lambda\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Quindi esiste una ed una sola soluzione $u \in L^2(\mathbb{R})$ data da $u = \mathscr{F}^{-1}\{A_\lambda\hat{f}\}$.

(b) $\lambda > 1$. Allora $\xi^2-2\lambda\xi+1$ si annulla nei due punti $\xi_{1,2} = \lambda\pm\sqrt{\lambda^2-1}$ nei quali A_λ è singolare. Ma $f(x) = 0$ per $|x| > 1$ implica $x^n f \in L^2(\mathbb{R})$ $\forall n$ e dunque $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Perciò nell'intorno di ξ_1 si ha $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi_1)+O(\xi-\xi_1)$.
Allora $A_A\hat{f}$ è L^2 nell'intorno di ξ_1 se e solo se $\hat{f}(\xi_1) = 0$, cioè se e solo se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 x} f(x)dx = 0.$$

Dunque se

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_1 x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi_2 x} f(x)dx = 0$$

risulta $A_\lambda \hat{f}$ localmente limitata da cui (tenendo conto di (3)) $A_\lambda \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e quindi (1) ha una e una sola soluzione $u \in L^2(\mathbb{R})$ data da $u = \mathscr{F}^{-1}(A_\lambda \hat{f})$. In caso contrario (1) non ha soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$.

(c) $\lambda = 1$. Segue

$$A_\lambda(\xi) = \frac{\xi^2+1}{(\xi-1)^2}$$

da cui

$$A_\lambda(\xi)\hat{f}(\xi) = \frac{\xi^2+1}{(\xi-1)^2}\left[\hat{f}(1)+\hat{f}'(1).(\xi-1)+O((\xi-1)^2)\right]$$

Allora $A_\lambda(\xi)\hat{f}(\xi)$ è L^2 nell'intorno di $\xi = 1$ se e solo se $\hat{f}(1) = \hat{f}'(1) = 0$. Dunque se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{ix} f(x)dx = 0$$

risulta $A_\lambda \hat{f}$ localmente limitata da cui $A_\lambda \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ e quindi (1) ha una e una sola soluzione $u \in L^2(\mathbb{R})$. In caso contrario (1) non ha soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$.

(d) $\lambda = -1$. Ragionando come nel caso precedente si ha se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-ix} f(x)dx = 0,$$

(1) ha una e una sola soluzione $u \in L^2(\mathbb{R})$.
In caso contrario (1) non ha soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$.
Si potrebbe dimostrare che in ciascuno dei casi esaminati in cui (1) non ha soluzioni in $L^2(\mathbb{R})$, (1) ha in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ (distribuzioni temperate) ∞^2 soluzioni: cioè soluzioni in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ esistono e dipendono da due costanti arbitrarie, provenienti dal fatto che il denominatore di A_λ ha, nei casi esaminati, o due zeri semplici o uno zero doppio. Ad esempio (2) nel caso (b) diventa

$$\hat{u}(\xi) = g(\xi)+c_1\delta(\xi-\xi_1)+c_2\delta(\xi-\xi_2)$$

ove g è una distribuzione (temperata) tale che

$$(\xi^2-2\lambda\xi+1)g(\xi) = (\xi^2+1)\hat{f}(\xi) .$$

Quindi le soluzioni $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ sono date da

$$u = \mathscr{F}^{-1}g+c'_1e^{-i\xi_1x}+c'_2e^{-i\xi_2x} \left(\text{ove } c'_j = \frac{i}{2\pi}\, c_j\right).$$

Per quanto riguarda il comportamento asintotico, è richiesto l'esame del caso (a). Come si è visto la soluzione esiste ed è unica e A_λ è limitato. Anzi si vede subito che $A_\lambda^{(n)}$ è limitato in $\mathbb{R}$ $\forall n$. D'altra parte da $x^nf\in L^2(\mathbb{R})$ $\forall n$, segue $\hat{f}^{(n)}\in L^2(\mathbb{R})$ $\forall n$. Segue

$$\hat{u}^{(n)} = (A_\lambda\hat{f})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_\lambda^{(k)}\hat{f}^{(n-k)}\in L^2(\mathbb{R}) \qquad \forall n.$$

Quindi

$$x^nu\in L^2(\mathbb{R}) \qquad \forall n. \tag{5}$$

Ciò significa che u ha "un forte annullamento medio" all'infinito.

Si noti che nei casi (b),(c),(d) la situazione è molto più complicata. Per dedurre $\hat{u}^{(n)}\in L^2(\mathbb{R})$ occorre imporre (ad esempio nel caso (b)) l'annullamento delle derivate successive di $\hat{f}$ per $\xi = \xi_{1,2}$ in quanto in tali punti le derivate di A_λ sono singolari.

Osservazione - Le ipotesi $f\in L^2(\mathbb{R})$ ed f ha supporto limitato implicano $f\in L^1(\mathbb{R})$. Dunque ha senso calcolare i valori puntuali di $\hat{f}$, ed in particolare esistono gli integrali (4).

■

NUMERO 47

Trovare una soluzione dell'equazione

$$y(x)-y''(x) = e^{-|x|}\operatorname{sign} x \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}$$

SOLUZIONE

Cerchiamo $y\in L^2(\mathbb{R})$ con y,y' assolutamente continue e $y',y''\in L^2(\mathbb{R})$.
Si ha

$$(1+\xi^2)\hat{y}(\xi) = \mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\operatorname{sign}x\right\} = -\mathscr{F}\left\{\frac{d}{dx}\, e^{-|x|}\right\} = i\xi\mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\right\} = i\xi \cdot \frac{2}{1+\xi^2}$$

$$\hat{y}(\xi) = \frac{2i\xi}{(1+\xi^2)^2} = -i\,\frac{d}{d\xi}\,\frac{1}{1+\xi^2} = -i\,\frac{d}{d\xi}\,\frac{1}{2}\mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\right\} = -\frac{i}{2}\mathscr{F}\left\{ixe^{-|x|}\right\} =$$
$$= \mathscr{F}\left\{\frac{1}{2}\, xe^{-|x|}\right\}$$

dunque $y = \frac{1}{2}\, xe^{-|x|}$ che ha la regolarità imposta all'inizio. ∎

NUMERO 48

Data l'equazione di incognita u:

$$u(t)-u'(t) = H(t-t^2)e^{-t} \qquad t\in\mathbb{R}$$

dove H è la funzione di Heaviside:

a) calcolare formalmente $\hat{u}(x)$;

b) dedurre dal punto a) che u è continua e $t^n u$ è infinitesima all'infinito per ogni $n \geqslant 0$;

c) calcolare u.

SOLUZIONE

a) $$\mathcal{F}\left\{H(t-t^2)e^{-t}\right\} = \int_0^1 e^{ixt}e^{-t}dt = \frac{e^{ix-1}-1}{ix-1}$$

Trasformando l'equazione, abbiamo

$$\hat{u}+ix\hat{u} = \frac{e^{ix-1}-1}{ix-1}$$

$$\hat{u} = \frac{1-e^{ix-1}}{x^2+1}$$

b) $\hat{u}\in L^1$ perché non ha singolarità reali e all'infinito si comporta come $1/x^2$. Dunque u è continua e si annulla all'infinito.

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \forall n \geqslant 0$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{e^{ix}}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d^k}{dx^k}\frac{1}{1+x^2}\,\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}e^{ix}$$

Perciò $\frac{d^n}{dx^n}\hat{u}\in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall n \geqslant 0$

e u(t) all'infinito è un infinitesimo di ordine superiore ad ogni potenza di t.

c) $u(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|} - \frac{1}{2e}e^{-|t-1|}$.

■

NUMERO 49

Calcolare la trasformata di Fourier di

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

SOLUZIONE

$f \in L^1(R)$ ed è perciò F-trasformabile (infatti ha supporto limitato ed ha due sole singolarità, ± 1, che sono integrabili perché del tipo $t^{-\frac{1}{2}}$).

Poniamo

$$g(t) = (1-t^2)f(t)$$

$g \in L^1$, inoltre

$$g'(t) = -2tf+(1-t^2)f' = -tf \qquad \forall t \neq \pm 1.$$

$$tf \in L^1(R) \quad e \quad g(t) = \int_{-\infty}^{t} [-\tau f(\tau)]d\tau$$

Se ne deduce $g \in AC$ e $g' = -tf \in L^1$.

Tenendo conto di $\hat{g} = \hat{f}+\hat{f}''$ trasformiamo l'equazione $g' = -tf$:

$$-i\xi\hat{g} = i(itf)^{\wedge}$$

$$-\xi(\hat{f}+\hat{f}'') = \hat{f}'$$

$$\xi\hat{f}''+\hat{f}'+\xi\hat{f} = 0$$

$$\xi^2\hat{f}''+\xi\hat{f}'+\xi^2\hat{f} = 0 \qquad \text{equazione di Bessel di ordine 0.}$$

La soluzione generale è del tipo

$$c_1 J_o(\xi)+c_2 K_o(\xi)$$

dove J_o è la soluzione regolare nell'origine e K_o è quella singolare. Poiché $f \in L^1$ implica $\hat{f} \in C^\circ$, dovrà essere $c_2 = 0$. Inoltre, poiché $J_o(0) = 1$,

$$c_1 = \hat{f}(0) = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \Big[\arcsin t\Big]_{-1}^{1} = \pi$$

$$\hat{f}(\xi) = \pi J_o(\xi).$$

<u>Osservazione 1</u> - Mediante il calcolo diretto si ottiene

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^{1} \frac{e^{it\xi}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{\cos t\xi}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

Si è dunque ottenuta una dimostrazione della rappresentazione integrale di J_o:

$$J_o(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\cos\xi t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

<u>Osservazione 2</u> - E' stato necessario introdurre la funzione g perché $f \notin AC$. In particolare la derivata nel senso delle distribuzioni di f non appartiene ad L^1 (non è integrabile vicino a ± 1).

NUMERO 50

Siano $\varphi \in L^1(R)$ e $f \in L^2(R)$ tali che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$$

Provare che

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\varphi(ny)\,dy = f(x)$$

dove il limite va inteso nel senso della convergenza in $L^2(R)$.

SOLUZIONE

Posto

$$f_n(x) = n\int f(x-y)\varphi(ny)dy$$

é

$$f_n(x) = f(x) * (n\varphi(nx)).$$

Applicando la trasformata di Fourier

$$\hat{f}_n = \hat{f}(\xi)\hat{\varphi}(\tfrac{\xi}{n}) \qquad n > 0$$

$\hat{\varphi}$ è continua, perché $\varphi \in L^1$. Dunque per ogni fissato ξ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\varphi}(\tfrac{\xi}{n}) = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\, dx = 1.$$

Segue

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 \cdot |\hat{\varphi}(\tfrac{\xi}{n})-1|^2 = 0 \qquad \text{q.o.}$$

Inoltre

$$|\hat{\varphi}(\tfrac{\xi}{n})| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi|dx = \|\varphi\|_{L^1}$$

da cui:

$$|\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\tfrac{\xi}{n})-1|^2 \leq |\hat{f}(\xi)|(\|\varphi\|_{L^1}+1)^2 \in L^1_\xi .$$

Per il teorema della convergenza dominata (Lebesgue) segue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(x)-f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}_n(\xi)-\hat{f}(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 |\hat{\varphi}(\tfrac{\xi}{n})-1|^2 d\xi = 0.$$

■

NUMERO 51

Sia f una assegnata funzione Fourier-trasformabile.
Risolvere formalmente il seguente problema (equazione del calore):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & t > 0\ ,\ -\infty < x < +\infty \\ u(x,0) = f(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Discutere la convergenza (per t che tende a 0_+) della soluzione formale a f(x) nei seguenti casi:
a) $f \in L^2$;
b) f assolutamente continua con $f, f' \in L^2$.

SOLUZIONE

Procediamo formalmente applicando all'equazione la trasformata di Fourier nella sola variabile spaziale x:

$$\hat{g}(\xi,t) = \int e^{i\xi x} g(x,t)\,dx \qquad \forall g \in L^1_x$$

otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}(\xi,t) = -\xi^2 \hat{u}(\xi,t) \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

l'equazione differenziale in $\hat{u}$ è ordinaria (ξ è un parametro in quanto non compaiono derivate rispetto a ξ).

$$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)e^{-\xi^2 t}$$

imponendo il dato iniziale

$$\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi^2 t}$$

Ricordando che

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\alpha x^2}\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp(-\xi^2/4\alpha)$$

si ha

$$u(x,t) = f(x) * \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{4t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\exp(-y^2/4t)\,dy$$

Si notino le forti proprietà regolarizzanti dell'equazione del calore, per i tempi positivi:

se $f\in L^1$ (o $f\in L^2$), per ogni fissato $t > 0$ risulta

$$\xi^n \hat{u} = \hat{f} e^{-\xi^2 t} \xi^n \in L^1_\xi \qquad \forall n > 0$$

dunque $\hat{u}$ è di classe C^∞ nella x e dall'equazione $u_t = u_{xx}$ è anche C^∞ nel complesso delle variabili x e t nel semipiano aperto $t > 0$.

a) Sia $f\in L^2$. Allora $\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$ in L^2.

Dimostrazione

$$\|u(x,t)-f(x)\|^2_{L^2_x} = \frac{1}{2\pi} \|\hat{u}(\xi,t)-\hat{f}(\xi)\|^2_{L^2_\xi} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 . |e^{-\xi^2 t}-1|^2 d\xi \to 0$$

quando t tende a zero, per il teorema di Lebesgue.

Infatti $|e^{-\xi^2 t}-1|$ tende a zero $\forall\xi$ e

$$|\hat{f}|^2 |e^{-\xi^2 t}|^2 \leqslant 4|\hat{f}|^2 \in L^1 \qquad \forall t \geqslant 0.$$

b) Se f è assolutamente continua con $f, f' \in L^2$, allora u è continua nel semipiano chiuso $\{(x,t): t \geqslant 0\}$.

Dimostrazione: basterà dimostrare la continuità in $t = 0$ perché per $t > 0$ $u\in C^\infty$.

Nelle nostre ipotesi $\hat{f}, \xi\hat{f} \in L^2$, e dunque $(1+|\xi|)\hat{f}\in L^2$.

E ovvio che $\frac{1}{1+|\xi|} \in L^2$. Applicando la disuguaglianza di Cauchy si ha

$$\hat{f} = \frac{1}{1+|\xi|} \cdot [(1+|\xi|)\hat{f}(\xi)] \in L^1$$

allora dalla formula di inversione

$$2\pi \sup_x |u(x,t)-f(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}(\xi,t)-\hat{f}(\xi)|d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)| . |1-e^{-\xi^2 t}| d\xi$$

quest'ultima quantità tende a zero quando t tende a zero per il teorema di Lebesgue, grazie all'appartenenza di $\hat{f}$ ad L^1. ■

NUMERO 52

Risolvere formalmente il problema seguente (equazione delle onde) di incognita $w = w(t,x)$

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & x\in\mathbb{R},\ t > 0 \\ w(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

SOLUZIONE

Consideriamo dapprima il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x\in\mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x\in\mathbb{R} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Applichiamo la trasformata di Fourier rispetto alla variabile x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(\xi,t)+\xi^2\hat{u}(\xi,t) = 0 & \xi\in\mathbb{R},\ t > 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{f}(\xi) & \xi\in\mathbb{R} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\,\hat{u}(\xi,0) = 0 & \xi\in\mathbb{R} \end{cases}$$

dall'equazione si ottiene

$$\hat{u}(\xi,t) = c_1(\xi)e^{i\xi t}+c_2(\xi)e^{-i\xi t}$$

imponendo le condizioni iniziali

$$c_1(\xi)+c_2(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\hat{u}(\xi,0) = i\xi(c_1(\xi)-c_2(\xi)) = 0$$

da cui

$$c_1(\xi) = c_2(\xi) = \frac{1}{2}\,\hat{f}(\xi)$$

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{1}{2}\,\hat{f}(\xi)e^{i\xi t} + \frac{1}{2}\,\hat{f}(\xi)e^{-i\xi t}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\,f(x+t) + \frac{1}{2}\,f(x-t)$$

Consideriamo ora il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 & x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ v(x,0) = 0 & x\in\mathbb{R} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x) & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

trasformando con Fourier

$$\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial t^2} + \xi^2 \hat{v} = 0$$

Scriviamo l'integrale generale nella forma

$$\hat{v}(\xi,t) = c_1(\xi)\cos\xi t + c_2(\xi)\sin\xi t$$

dalla condizione $\hat{v}(\xi,0) = 0$ si ricava $c_1(\xi) = 0$

dalla condizione $\frac{\partial \hat{v}}{\partial t}(\xi,0) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{v}(\xi,t) = c_2(\xi)\xi\cos\xi t|_{t=0} = \xi c_2(\xi) =$
$= \hat{g}(\xi)$ si ricava $c_2(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi)}{\xi}$.

Dunque

$$\hat{v}(\xi,t) = \hat{g}(\xi)\ \frac{\sin\xi t}{\xi}$$

Tenendo conto di $\mathscr{F}\left\{\frac{\sin\alpha x}{x}\right\} = \pi p(\frac{\xi}{\alpha})$ si ha

$$v(x,t) = g(x)*\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{\sin\xi t}{\xi}\right\} = g(x)*\frac{1}{2}\ p(\frac{x}{t}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)p(\frac{x-\tau}{t})d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(\tau)d\tau\ .$$

Per la linearità del problema (1) la soluzione u con entrambe le condizioni iniziali non omogenee si ottiene sovrapponendo le 2 soluzioni trovate

$$w(x,t) = u(x,t)+v(x,t) = \frac{1}{2}\ f(x+t) + \frac{1}{2}\ f(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)ds\ .$$

Osservazione - Si noti che a differenza dell'equazione del calore non si hanno effetti regolarizzanti. Infatti una eventuale singolarità del dato iniziale f in $x = x_0$ si propaga lungo le caratteristiche $x+t = x_0$ e $x-t = x_0$. ■

NUMERO 53

Sia $\Omega = \{(x,y)\in R^2 : 0 < y < 1\}$ e $f\in L^2(R)$.
Calcolare (formalmente) la trasformata di Fourier della soluzione $u = u(x,y)$ del problema

$$\begin{cases} u-\Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x,0) = 0 & x\in R \\ u(x,1) = f(x) & x\in R \end{cases}$$

Mostrare che per ogni valore di y fissato ($0 \leqslant y \leqslant 1$) si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|^2 dx \leqslant \|f\|^2_{L^2}$$

e che

$$\lim_{y\to 1-} \|u(x,y)-f(x)\|_{L^2_x} =$$

SOLUZIONE

Posto

$$\hat{u}(\xi,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} u(x,y)\,dx$$

l'equazione e le condizioni al contorno diventano

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u} = (1+\xi^2)\hat{u} \\ \hat{u}(\xi,0) = 0 \\ \hat{u}(\xi,1) = \hat{f}(\xi) \end{cases}$$

l'integrale generale è della forma

$$\hat{u}(\xi,y) = A(\xi)\,\mathrm{sh}\left(y\sqrt{\xi^2+1}\right)+B\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{\xi^2+1}\right).$$

Imponendo la prima condizione (in $y = 0$), si ha

$$0 = \hat{u}(\xi,0) = B\,\mathrm{ch}\left(0\cdot\sqrt{\xi^2+1}\right) \Longrightarrow B = 0$$

Dalla seconda

$$\hat{f} = A\,\mathrm{sh}\left(\sqrt{\xi^2+1}\right) \Longrightarrow A = \frac{\hat{f}(\xi)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\xi^2+1}\right)}$$

$$\hat{u}(\xi,y) = \hat{f}(\xi)\,\frac{\mathrm{sh}\left(y\sqrt{\xi^2+1}\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\xi^2+1}\right)}$$

Dalla disuguaglianza

$$(1)\qquad \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{\xi^2+1}\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\xi^2+1}\right)} \leqslant 1 \qquad \text{se} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

e dall'appartenenza di f ad L^2 si ottiene $\hat{u}\in L^2_\xi$ e $u\in L^2_x$, $\forall\, y\in[0,1]$.

Poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t)|^2 dx = \|u\|^2_{L^2_x}$$

Dobbiamo dimostrare

$$\|u(x,y)\|_{L^2_x} \leqslant \|f\|_{L^2_x} \qquad \forall y\in[0,1] .$$

Grazie all'identità di Parseval è equivalente provare che

$$\|\hat{u}(\xi,y)\|_{L^2_\xi} \leqslant \|\hat{f}\|_{L^2_\xi} \qquad \forall y\in[0,1]$$

Ma questo discende banalmente dalla disuguaglianza (1).

Sempre dall'identità di Parseval, si ha

$$\|u(x,y)-f(x)\|^2_{L^2_x} = (2\pi)^{-1}\|\hat{u}(\xi,y)-\hat{f}(\xi)\|^2_{L^2_\xi} =$$

$$= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 . \left| 1 - \frac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{\xi^2+1}\right)}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\xi^2+1}\right)}\right|^2 d\xi$$

Quest'ultimo integrale tende a zero quando y tende ad 1, per il teorema di Lebesgue. Infatti per $y \to 1$ la funzione integranda tende a zero q.o. in ξ ed è maggiorata da $|\hat{f}(\xi)|^2$ che appartiene ad L^1_ξ.

■

NUMERO 54

Determinare, mediante trasformata di Fourier, una soluzione $u = u(x,t)$ dell'equazione

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + e^{-|x|}\operatorname{sign} x & x\in R \qquad t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x\in R \end{cases}$$

SOLUZIONE

Posto

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} u(x,t)\,dx$$

l'equazione trasformata è

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -i\xi\hat{u} + \frac{2i\xi}{\xi^2+1}$$

L'integrale generale è somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea

$$c(\xi)e^{-i\xi t}$$

e di un integrale particolare (indipendente da t) dell'equazione completa

$$\frac{2}{1+\xi^2}$$

Imponendo la condizione iniziale, si ottiene

$$\hat{u}(\xi,0) = 0 = c(\xi) + \frac{2}{1+\xi^2}$$

$$c(\xi) = -\frac{2}{1+\xi^2}$$

$$\hat{u}(\xi,t) = \frac{2}{1+\xi^2}\left(1-e^{-i\xi t}\right)$$

antitrasformando

$$u(x,t) = e^{-|x|}-e^{-|x+t|}$$

Osserviamo che la soluzione u è assolutamente continua in x e $u(\cdot,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\in L^1$ $\forall t$, il che giustifica a posteriori i passaggi formali effettuati per calcolarla.

■

NUMERO 55

Calcolare formalmente una soluzione dell'equazione

$$2y''(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} y(t-s)ds = -e^{-|t|}\text{sign}t \qquad t \in \mathbb{R}$$

Giustificare a posteriori i passaggi formali.

SOLUZIONE

Cerchiamo una soluzione $y \in L^1(\mathbb{R})$ con y, y' assolutamente continue e $y'' \in L^1(\mathbb{R})$. Poiché $e^{-|t|} \in L^1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|s|} y(t-s)ds = e^{-|t|} * y \in L^1$$

E' noto che

$$\mathcal{F}\left\{e^{-|t|}\right\} = \frac{2}{1+x^2}$$

inoltre

$$-e^{-|t|}\text{sign}t = \frac{d}{dt} e^{-|t|}$$

Applichiamo la trasformata di Fourier ad ambo i membri della equazione

$$-2\left(x^2 + \frac{1}{1+x^2}\right)\hat{y}(x) = -\frac{2ix}{1+x^2}$$

$$\hat{y}(x) = \frac{ix}{x^4+x^2+1} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

$$y(t) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-itx}}{x^4+x^2+1} dx$$

La funzione analitica di variabile complessa

$$f(z) = \frac{ze^{-itx}}{z^4+z^2+1}$$

ha quattro poli semplici:

$$z_1 = e^{i\pi/3}, \quad z_2 = e^{i2\pi/3}, \quad z_3 = e^{i4\pi/3}, \quad z_4 = e^{i5\pi/3}$$

Sia $t < 0$. Consideriamo il circuito C_R in figura, con $R > 1$.

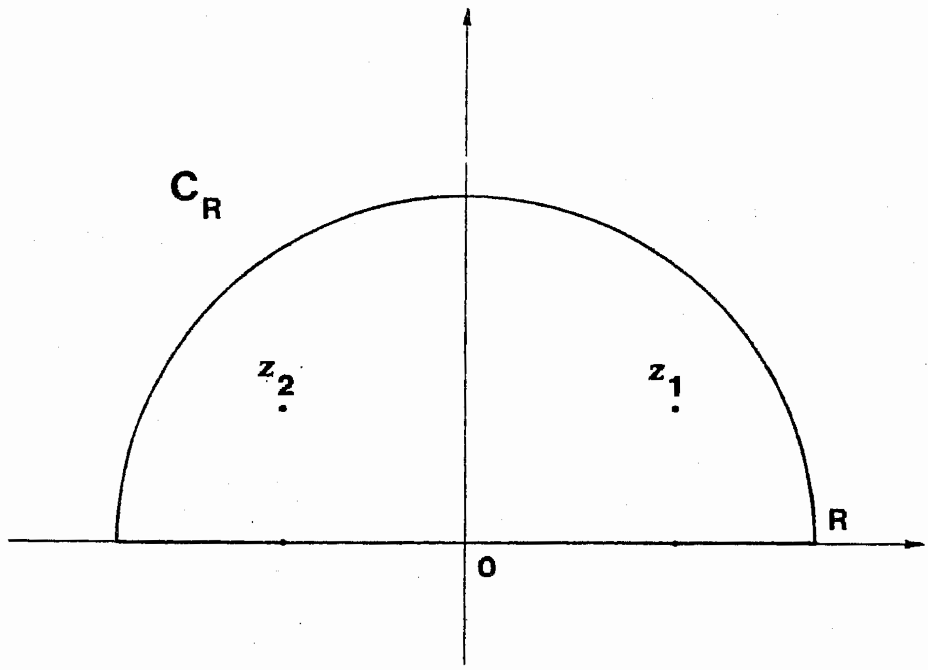


Fig.21

Applicando il teorema dei residui ed il lemma di Jordan si ha, per $t < 0$:

$$y(t) = \frac{i}{2\pi} 2\pi i\left[\mathrm{Res}(f,z_1)+\mathrm{Res}(f,z_2)\right]$$

Calcoliamo i residui

$$\mathrm{Res}(f,z_1) = \frac{z_1 e^{-itz_1}}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)} = \frac{1}{2i\sqrt{3}} e^{t(\sqrt{3}-i)/2} =$$

$$= -\frac{e^{t\sqrt{3}/2}}{2\sqrt{3}}\left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)+i\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$\mathrm{Res}(f,z_2) = \frac{z_2 e^{-itz_2}}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)(z_2-z_4)} = \frac{e^{t\sqrt{3}/2}}{2\sqrt{3}}\left(i\cos\left(\frac{t}{2}\right)-\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\frac{t}{2}\, e^{\sqrt{3}t/2} \qquad t < 0$$

poiché $\hat{y}$ è immaginaria pura, dispari e appartiene ad L^1, y risulta reale, dispari e continua. In conclusione

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\frac{t}{2}\, e^{-\sqrt{3}|t|/2} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Poiché $y, y' \in L^1$ e sono assolutamente continue ed è $y'' \in L^1$ i passaggi formali effettuati per calcolare la soluzione sono giustificati.

■

NUMERO 56

Mediante la trasformata di Fourier, risolvere l'equazione:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} e^{-t}u(x-t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u'(t)e^{-|x-t|}dt = \frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad -\infty < x < +\infty.$$

La funzione u così determinata è l'unica soluzione dell'equazione (a) appartenente ad $L^2(R)$?

SOLUZIONE

Sia H la funzione di Heaviside. (a) si scrive

$$(H(x)e^{-x})*u+u'*e^{-|x|} = \frac{1}{2}e^{-|x|}$$

$$(1) \qquad \mathscr{F}\left\{H(x)e^{-x}\right\} = \int_0^{\infty} e^{(i\xi-1)x}dx = \frac{1}{1-i\xi}$$

$$\mathscr{F}\left\{e^{-|x|}\right\} = \int_{-\infty}^{0} e^{i\xi x}e^{x}dx + \int_0^{+\infty} e^{i\xi x}e^{-x}dx = \frac{2}{1+\xi^2}$$

$$\mathscr{F}\{u'(x)\} = -i\xi\hat{u}(\xi)$$

Applicando la trasformata di Fourier all'equazione

$$\frac{1}{1-i\xi}\hat{u}(\xi)-i\xi\hat{u}(\xi)\frac{2}{1+\xi^2} = \frac{1}{1+\xi^2}$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{1-i\xi}$$

La funzione di variabile complessa $f(\xi) = \frac{e^{-ix\xi}}{1-i\xi}$ ha come unica singolarità isolata il polo semplice $\xi = -i$ con residuo ie^{-x}.
Dunque

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-ix\xi}}{1-i\xi}d\xi = H(x)e^{-x}.$$

Si noti che u si può ottenere (senza il calcolo diretto) dalla (2).
La soluzione trovata è l'unica appartenente ad $L^2(R)$
perché la trasformata di Fourier è un isomorfismo di $L^2(R)$ in sé. ■

NUMERO 57

Determinare la soluzione u in $L^2(\mathbb{R})$ di

$$2u''(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} u(x-y)u(y)dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-x^2/2} + 2\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2} \qquad -\infty < x < +\infty.$$

Esistono altre soluzioni nel senso delle distribuzioni?

SOLUZIONE

Trasformando l'equazione si ottiene

$$\hat{u}^2 - 2\xi^2\hat{u} - \pi e^{-\xi^2/2} + 2\sqrt{\pi}\xi^2 e^{-\xi^2/4} = 0$$

$$\hat{u}(\xi) = \xi^2 \pm \sqrt{\xi^4 - 2\sqrt{\pi}\xi^2 e^{-\xi^2/4} + \pi e^{-\xi^2/2}} = \xi^2 \pm (\xi^2 - \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}) =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \\ 2\xi^2 - \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4} \end{cases}$$

u appartiene ad L^2 $\Longleftrightarrow$ $\hat{u}$ appartiene ad L^2. Perciò è accettabile solo la prima radice. Antitrasformando si ottiene l'unica soluzione appartenente ad L^2:

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}\right\} = e^{-x^2}$$

La funzione $g(\xi) = 2\xi^2 - \sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}$ è una distribuzione temperata (cioè appartiene ad $\mathcal{S}'$).

Se δ è la distribuzione di Dirac abbiamo

$$\hat{\delta} = 1$$

$$\mathcal{F}\{-2\delta''\} = 2\xi^2\hat{\delta} = 2\xi^2.$$

Dunque l'equazione data ammette come soluzione anche la distribuzione temperata

$$u = -2\delta'' - e^{-x^2}$$

purché l'integrale al primo membro sia interpretato come convoluzione u*u, e le derivate siano intese nel senso delle distribuzioni.

■

CAPITOLO V

TRASFORMATA DI LAPLACE

Sia $F: [0,+\infty) \to C$ una funzione integrabile secondo Lebesgue in ogni intervallo limitato $[0,T]$ (brevemente diremo $F \in L^1_{loc}([0,+\infty))$). Sia $s \in \mathbb{C}$. Consideriamo

$$(5.1) \qquad \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}F(t)dt$$

Se questo limite esiste per qualche valore di s esso risulta una funzione della variabile complessa s. Tale funzione è detta trasformata di Laplace di F e sarà indicata nel seguito con $\mathscr{L}\{F\}$ o brevemente con f(s).

<u>Def</u>. Indicheremo col nome di ascissa di convergenza il numero reale

$$(5.2) \qquad \lambda_F = \inf\{x \in R : \exists\, s \in C \text{ per cui esiste il limite (5.1) e } x = \mathrm{Re}\, s\}$$

La trasformata di Laplace è un operatore lineare, cioè: se F e G sono trasformabili allora,

$$(5.3) \qquad \mathscr{L}\{\alpha F+\beta G\}(s) = \alpha\mathscr{L}\{F\}(s)+\beta\mathscr{L}\{G\}(s)$$

$$\forall\, \alpha,\beta \in C \quad \text{e} \quad \forall\, s \in \mathbb{C} \text{ t.c.} \quad \mathrm{Re}\, s > \max(\lambda_F,\lambda_G).$$

<u>Proprietà della trasformata di Laplace</u>

I) Se F è trasformabile (cioè se l'ascissa di convergenza λ_F è minore di $+\infty$), allora l'integrale di Laplace (5.1) esiste in tutto il semipiano $\mathrm{Re}\, s > \lambda_F$ che è detto semipiano ci convergenza, e non esiste in nessun punto del semipiano $\mathrm{Re}\, s < \lambda$. Se $\lambda_F = -\infty$, l'integrale esiste $\forall\, s \in C$.

II) La trasformata f(s) è una funzione analitica della variabile s nel semipiano di convergenza e risulta

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \mathscr{L}\{t^k F(t)\} \qquad \forall\, k \in N$$

<u>Osservazione</u>. In alcuni casi, effettuando il prolungamento analitico di f(s) partendo dai valori assunti nel semipiano di convergenza si ottiene una funzione polidroma. Ciò significa che l'integrale di Laplace definisce nel semipiano di convergenza una branca analitica ad un sol valore di una funzione polidroma.

III) Se F è assolutamente continua e F' è trasformabile allora anche F è trasformabile e risulta

$$\mathscr{L}\{F'\}(s) = s\mathscr{L}\{F\}(s)-F(0)$$

IV) Sia F trasformabile nel semipiano Re $s > \lambda$. Allora la primitiva è trasformabile nel semipiano Re $s > \max(\lambda,0)$ e

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t F(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathscr{L}\{F\}(s)$$

V) Se $f = \mathscr{L}\{F\}$ con $F \in L^1_{loc}([0,\infty))$ si ha, $\forall y \in R$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x+iy) = 0$$

■

<u>Definizione 5.1</u>. Una funzione F di variabile reale, si dice assolutamente trasformabile (secondo Laplace) se $\exists\, s \in C$ t.c.

$$e^{-st}|F(t)| \ L^1(0,+\infty).$$

■

Osserviamo che l'assoluta trasformabilità implica la trasformabilità, mentre il viceversa è, in generale, falso.

<u>Definizione 5.2</u>. Se $F,G \in L^1_{loc}([0,+\infty))$, indicheremo come convoluzione di F e G la funzione

$$F*G\ (t) = \int_0^t F(\tau)G(t-\tau)\,d\tau \qquad t \in [0,+\infty)$$

■

Si noti la differenza rispetto al prodotto di convoluzione introdotto per studiare la trasformata di Fourier.
Tuttavia, se si considerano solo funzioni di variabile reale <u>identicamente nulle per $t \in (-\infty,0)$</u>, allora la definizione 5 del capitolo 3 viene a coincidere con la definizione 5.2.

VI) Se F è trasformabile e G è assolutamente trasformabile (o viceversa) allora F*G è trasformabile e

$$\{F*G\} = \mathscr{L}\{F\}\cdot\mathscr{L}\{G\}$$

Concludiamo elencando alcune regole pratiche di trasformazione. Sia F trasformabile e $f = \mathscr{L}\{F\}$. Allora $e^{\alpha t}F(t)$, $H(t-a)F(t-a)$ e $F(at)$ sono trasformabili per ogni α complesso e per ogni a reale positivo. Inoltre:

(5.4) $$\mathscr{L}\{e^{\alpha t}F(t)\} = f(s-\alpha) \qquad \alpha\in\mathbb{C}$$

(5.5) $$\mathscr{L}\{H(t-a)F(t-a)\} = e^{-as}f(s) \qquad a\in\mathbb{R}_+$$

(5.6) $$\mathscr{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a}\, f\left(\frac{s}{a}\right) \qquad a\in\mathbb{R}_+$$

Se inoltre $\frac{F(t)}{t}$ è trasformabile vale

(5.7) $$\mathscr{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(\sigma)d\sigma$$

Inversione della trasformata di Laplace

Si è assegnata una funzione analitica definita in un semipiano $\{\text{Re } s > \lambda\}$ del piano complesso si pone il problema di stabilire se si tratta della trasformata di Laplace di una funzione F; e, in caso affermativo, di determinare F (tale F, se esiste in $L^1_{\log}([0,+\infty))$ è unica per l'iniettività della trasformata.
Le proprietà II e V sono ovviamente condizioni necessarie affinché f sia una trasformata.
Diamo ora due condizioni sufficienti affinché f sia una trasformata di Laplace:

C.S.1) Se f è analitica in $\text{Re } s > \lambda$ e $\exists M > 0$, $\alpha > 1$ t.c.

$$|f(s)| \leqslant \frac{M}{1+|s|^\alpha} \qquad \forall s: \text{Re } s > \lambda$$

Allora è $f = \mathscr{L}\{F\}$ con F assolutamente trasformabile e $\forall\gamma$ reale con $\gamma > \lambda$ si ha

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\ \text{v.p.} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}f(s)ds .$$

C.S.2) Se f è analitica nel semipiano $\text{Re } s > \lambda \geqslant 0$ e

$$f(s) = \frac{c}{s} + g(s)$$

con c costante e g tale che $\exists M > 0$ $\alpha > 1$ t.c.

$$|g(s)| \leqslant \frac{M}{1+|s|^{\alpha}} \qquad \forall s:\ \mathrm{Re}\ s > \lambda .$$

Allora $f = \mathscr{L}\{F\}$ con F assolutamente trasformabile, e $\forall\ \gamma$ reale con $\gamma > \lambda$

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\ \mathrm{f.p.} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} f(s)\,ds .$$

■

Osserviamo che se $f(s)$ è una funzione razionale di s avente grado del denominatore strettamente maggiore del grado del numeratore allora f è una trasformata di Laplace, e l'inversione può essere effettuata decomponendo f in una somma di fratti semplici. Nel caso particolare in cui il denominatore $Q(s)$ della funzione razionale $f = \frac{P}{Q}$ abbia solo <u>zeri semplici</u> z_k si ha la formula dello sviluppo di Heaviside

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{P(s)}{Q(s)}\right\} = \sum_k \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}\, e^{z_k t} .$$

CAPITOLO VI

ESERCIZI SULLA TRASFORMATA DI LAPLACE

NUMERO 58

Calcolare $\mathscr{L}\left\{ e^{3t} \int_0^t \frac{\sin 2x}{x}\, dx \right\}$.

SOLUZIONE

E' noto che $\mathscr{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1}$ tenendo conto di (5.4),(5.6),(5.7) e (IV) del capitolo V, abbiamo

$$\mathscr{L}\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$\mathscr{L}\left\{ \frac{\sin 2t}{t} \right\} = \int_s^\infty \frac{2}{\sigma^2+4}\, d\sigma = \left[\operatorname{arctg} \frac{\sigma}{2} \right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{2}$$

$$\mathscr{L}\left\{ \int_0^t \frac{\sin 2x}{x}\, dx \right\} = \frac{1}{s} \mathscr{L}\left\{ \frac{\sin 2t}{t} \right\} = \frac{1}{s} \left(\frac{\pi}{s} - \operatorname{arctg} \frac{s}{2} \right)$$

$$\mathscr{L}\left\{ e^{3t} \int_0^t \frac{\sin 2x}{x}\, dx \right\} = \frac{1}{s-3} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s-3}{2} \right) .$$

■

NUMERO 59

Calcolare $\mathscr{L}\left\{ e^{-t^2} \right\}$.

SOLUZIONE

Sia s reale.

$$\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{-t^2}dt = e^{\frac{s^2}{4}}\int_0^\infty e^{-(t+\frac{s}{2})^2}dt = e^{\frac{s^2}{4}}\int_{\frac{s}{2}}^\infty e^{-\tau^2}d\tau =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\frac{s^2}{4}}\operatorname{erfc}\frac{s}{2} .$$

Supponiamo ora di aver costruito un prolungamento analitico intero Erfc(z) di erf(x). Siccome $\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}\right\}(s)$ esiste per ogni s reale essa è una funzione analitica intera. Ma anche $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{s^2/4}\operatorname{Erfc}\frac{s}{2}$ è una funzione intera e coincide con $\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}\right\}$ per s reale. Il principio del prolungamento analitico assicura allora che

$$\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}\right\}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\frac{s^2}{4}}\operatorname{Erfc}\left(\frac{s}{2}\right) \qquad \forall\, s\in\mathbb{C}.$$

Costruiamo allora Erfc(z).

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad \text{è } \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\,dt =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}\,dt =$$

$$= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

I passaggi sono giustificati dal fatto che la serie esponenziale ha raggio di convergenza infinito.

Anche l'ultima serie ha raggio di convergenza infinito. Segue allora

$$\operatorname{Erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall\, z\in\mathbb{C} .$$

Si poteva procedere diversamente, ricordando che se f(z) è una funzione intera allora l'integrale $\int_0^z h(w)dw$ esteso ad una qualunque curva congiungente O a z non dipende dalla curva e definisce una funzione H(z) intera (verificante H'(z) = h(z)).
Considerata allora la funzione

$$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} dw$$

questa è una funzione intera che per ogni x reale coincide con erfc(x). Dunque

$$\mathrm{Erfc}(z) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} dw \ .$$

■

NUMERO 60

Calcolare $\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}\sin t\right\}$ e $\mathscr{L}\{\text{erf } t\}$.

SOLUZIONE

$$\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}\sin t\right\} = \frac{1}{2i}\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}e^{it}\right\} - \frac{1}{2i}\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}e^{-it}\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4i}\left[e^{(s-i)^2/4}\text{Erfc}\left(\frac{s-i}{2}\right) - e^{(s+i)^2/4}\text{Erfc}\left(\frac{s+i}{2}\right)\right]$$

$$\text{erf } t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-y^2}dy \qquad \text{erfc } t = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-y^2}dy$$

$$\mathscr{L}\{\text{erf } t\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{s}\mathscr{L}\left\{e^{-t^2}\right\}(s) = \frac{1}{s}e^{\frac{s^2}{4}}\text{erfc}\left(\frac{s}{2}\right) .$$

■

NUMERO 61

Sia F trasformabile con $F(0) = 1$ e $F'(0) = 0$.

Posto $G(t) = \int_0^t \frac{\sin[2(t-\tau)]}{t-\tau} e^{-\tau} F''(\tau)d\tau$,

calcolare $g = \mathscr{L}\{G\}$ in funzione di $f = \mathscr{L}\{F\}$.

SOLUZIONE

E' $G(t) = \frac{\sin 2t}{t} * [e^{-t}F''(t)]$. Perciò

$$g = \mathscr{L}\left\{\frac{\sin 2t}{t}\right\} \cdot \mathscr{L}\left\{e^{-t}F''(t)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin 2t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{2}{\sigma^2+4} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{2}$$

$$\mathscr{L}\{F''\} = s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) = s^2 f - s$$

$$\mathscr{L}\left\{e^{-t}F''\right\} = (s+1)^2 f(s+1) - (s+1)$$

$$g(s) = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{s}{2}\right)(s+1) \left[(s+1)f(s+1) - 1\right].$$

■

NUMERO 62

Sia

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t < 1 \\ 2-t & 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

$$G(t) = \begin{cases} t & 0 \leqslant t < 1 \\ 2-t & 1 \leqslant t < 2 \\ t-2 & 2 < t \end{cases}$$

Calcolare $\mathscr{L}\{F\}$ e $\mathscr{L}\{G\}$.

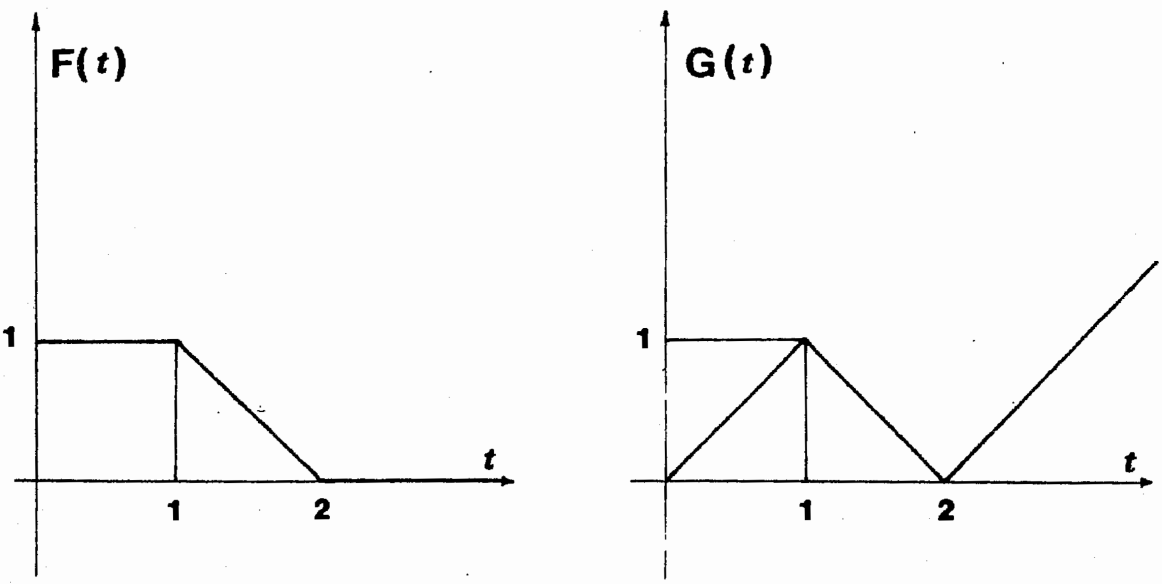


Fig.22

SOLUZIONE

In questi casi si utilizza il cosiddetto metodo di addizione grafica. Risulta, per $t > 0$:

$$F(t) = H(t)-H(t-1)+(2-t)\left[H(t-1)-H(t-2)\right] =$$

$$= H(t)-(t-1)H(t-1)+(t-2)H(t-2)$$

$$\mathscr{L}\{\dot{F}\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}$$

$$G(t) = t(H(t)-H(t-1))+(2-t)(H(t-1)-H(t-2))+(t-2)H(t-2) =$$

$$= t-2(t-1)H(t-1)+2(t-2)H(t-2)$$

$$\mathscr{L}\{G\} = \frac{1}{s^2} - 2\,\frac{e^{-s}}{s^2} + 2\,\frac{e^{-2s}}{s^2}\ . \qquad \blacksquare$$

NUMERO 63

Calcolare

$$\mathcal{L}\left\{(1+t^4)e^{-3t+1}\,\frac{\cos 2t}{\sqrt{t}}\right\}$$

SOLUZIONE

$$F(t) = e\cdot e^{-3t}\cos 2t\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+t^{\frac{7}{2}}\right) = \frac{e}{2}\left[e^{(-3+2i)t}+e^{(-3-2i)t}\right]\left(\frac{1}{\sqrt{t}}+t^{\frac{7}{2}}\right)$$

Sia Γ la funzione di Eulero. Risulta

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \qquad \mathrm{Re}\,\alpha > -1$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \qquad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(\tfrac{9}{2}) = \tfrac{7}{2}\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{7}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\,\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{7}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}+t^{\frac{7}{2}}\right\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{s}} + \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{s^{9/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} + \frac{105}{16}\,\frac{\sqrt{\pi}}{s^{9/2}}$$

$$\mathcal{L}\{F\} = \frac{\sqrt{\pi}e}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{s+3-2i}}+\frac{1}{\sqrt{s+3+2i}}\right] + \frac{105}{32}\,e\sqrt{\pi}\left[(s+3-2i)^{-\frac{9}{2}}+(s+3+2i)^{-\frac{9}{2}}\right].$$

■

NUMERO 64

Risolvere mediante trasformata di Laplace, il problema ai valori iniziali per l'equazione dei moti armonici ($\omega \in R$, $\omega \neq 0$):

$$\begin{cases} Y''(t)+\omega^2 Y(t) = F(t) & t > 0 \\ Y(0) = A \\ Y'(0) = B \end{cases}$$

SOLUZIONE

Posto $y = \mathscr{L}\{Y\}$ abbiamo

$$(s^2+\omega^2)y = \mathscr{L}\{F\}+sA+B$$

$$y(s) = \frac{\mathscr{L}\{F\}}{s^2+\omega^2} + \frac{sA+B}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t F(\tau)\sin(t-\tau)d\tau+A\cos(\omega t) + \frac{B}{\omega}\sin(\omega t).$$

■

NUMERO 65

Posto $F(t) = e^{-t}$ se $1 < t < 2$ e $F(t) = 0$ altrove. Risolvere

$$\begin{cases} Y''(t)+2Y'(t)+Y(t) = F(t) & t > 0 \\ Y(0) = Y'(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Posto $y = \mathcal{L}\{Y\}$ si ha

$$(s^2+2s+1)y = \mathcal{L}\{F\}$$

$$y(s) = \frac{\mathcal{L}\{F\}}{(s+1)^2}$$

$$Y = F * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = F*\{e^{-t}t\} = \int_0^t F(\tau)(t-\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau$$

Da cui

Se $t < 1$ $\quad Y(t) = 0$

Se $1 < t < 2$ $\quad Y(t) = \displaystyle\int_1^t e^{-\tau}(t-\tau)e^{-(t-\tau)}d\tau =$

$$= e^{-t}\int_1^t (t-\tau)d\tau = e^{-t}\left[t\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_1^t = \frac{1}{2}(t-1)^2 e^{-t}$$

Se $t > 2$ $\quad Y(t) = e^{-t}\displaystyle\int_1^2 (t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}(2t-3)e^{-t}.$

Si noti che non è stato necessario calcolare effettivamente la trasformata di F.

■

NUMERO 66

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} X(t) = 1 + \displaystyle\int_0^t (Y(\tau)-X(\tau))d\tau & t > 0 \\ Y(t) = 2H(t-1) + \displaystyle\int_0^t (Y(\tau)-X(\tau))d\tau & t > 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Posto $x = \mathscr{L}\{X\}$, $y = \mathscr{L}\{Y\}$, otteniamo

$$\begin{cases} x = \frac{1}{s} + \frac{1}{s}(y-x) \\ y = 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{1}{s}(y-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^2} \\ y = -\frac{1}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s^2} + \frac{2e^{-s}}{s} \end{cases}$$

$$X(t) = 1-t+2(t-1)H(t-1) = \begin{cases} 1-t & 0 < t < 1 \\ t-1 & 1 < t \end{cases}$$

$$Y(t) = -t+2(t-1)H(t-1)+2H(t-1) = \begin{cases} -t & 0 < t < 1 \\ t & 1 < t \end{cases}$$

■

NUMERO 67

a) Calcolare

$$\mathcal{L}\left\{\frac{J_1(t)}{t}\right\}$$

J_1 essendo la funzione di Bessel di prima specie, di ordine 1.

b) Trovare le soluzioni $\mathcal{L}$-trasformabili del problema seguente (tenere conto della parte (a)):

$$\begin{cases} 2Y''(t) + \frac{1}{2}\, Y(t) = \displaystyle\int_0^t Y(\tau)Y''(t-\tau)\,d\tau \\ Y(0) = 0 \qquad Y'(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

SOLUZIONE

a) E' noto che $\mathcal{L}\{J_1(t)\} = 1 - \dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{J_1(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(1 - \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right) d\sigma = \left[\sigma - \sqrt{\sigma^2+1}\right]_s^\infty = \sqrt{s^2+1} - s.$$

b) Posto $y(s) = \mathcal{L}\{Y\}(s)$

$$s^2y^2 - 2s^2y - 1 = 0$$

$$y(s) = \frac{s^2 \pm \sqrt{s^4+s^2}}{s^2} = \frac{s \pm \sqrt{s^2+1}}{s}$$

Poiché Y deve essere $\mathcal{L}$-trasformabile, y deve essere analitica ed infinitesima all'infinito. E' perciò accettabile solo

$$y(s) = \frac{s - \sqrt{s^2+1}}{s}$$

Tenendo conto del punto (a)

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-\sqrt{s^2+1}}{s}\right\} = -\int_0^t \frac{J_1(\tau)}{\tau}\, d\tau\ .$$

■

NUMERO 68

Sapendo che $\mathscr{L}\{\ln t\} = \dfrac{\Gamma'(1)-\ln s}{s}$, calcolare

$\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\ln s}{s^2}\right\}$ e $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\ln(s+2)}{(s+1)^2}\right\}$

SOLUZIONE

Poiché $\mathscr{L}\{\Gamma'(1)\} = \dfrac{\Gamma'(1)}{s}$, si ha $\mathscr{L}\{\Gamma'(1-\ln t\} = \dfrac{\ln s}{s}$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\ln s}{s^2}\right\} = \int_0^t (\Gamma'(1)-\ln\tau)d\tau = \Gamma'(1)t-(t\ln t-t) = (1+\Gamma'(1))t-t\ln t$$

Per il calcolo di $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{\ln(s+2)}{(s+1)^2}\right\}$ ci si riconduce alla prima parte:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\ln(s+2)}{(s+1)^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\ln(s+2)}{(s+2)}\,\frac{s+2}{(s+1)^2}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\ln(s+2)}{(s+2)}\right\} * \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2}\right\} =$$

$$= \left\{e^{-2t}[\Gamma'(1)-\ln t]\right\} * \left(\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}\right) =$$

$$= \left\{e^{-2t}[\Gamma'(1)-\ln t]\right\} * [e^{-t}(1+t)] =$$

$$= \int_0^t e^{-2\tau}(\Gamma'(1)-\ln\tau)e^{-(t-\tau)}(1+t-\tau)d\tau =$$

$$= \Gamma'(1)e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}(1+t-\tau)d\tau - e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}\ln\tau(1+t-\tau)d\tau =$$

$$= \Gamma'(1)te^{-t} - e^{-t}\int_0^t e^{-\tau}\ln\tau(1+t-\tau)d\tau .$$

Il secondo integrale non è esprimibile elementarmente. ■

NUMERO 69

Dimostrare che ciascuna delle seguenti funzioni non è una $\mathscr{L}$-trasformata:

$$e^{\frac{1}{s}} \quad ; \quad e^{-|s|} \quad ; \quad e^{-s^2} \quad ; \quad \frac{e^{-s}}{\sin s}$$

SOLUZIONE

$e^{\frac{1}{s}}$ non è una trasformata perché

$$\lim_{s\to+\infty} e^{\frac{1}{s}} = 1 \neq 0$$

in contraddizione con la proprietà V del cap.5.

$e^{-|s|}$ non è una trasformata perché è una funzione che assume solo valori reali, senza essere costante. Dunque non è analitica in nessun semipiano, in contraddizione con la proprietà II del cap.5.

e^{-s^2} non è una trasformata perché non è infinitesima al tendere di $|s|$ all'infinito in opportuni domini angolari: si consideri ad esempio $s = x(1+i)$, si ha

$$|e^{-s^2}| = |e^{-x^2(1+i)^2}| = |e^{-2ix^2}| = 1 \qquad \forall x \in R .$$

$\frac{e^{-s}}{\sin s}$ non è una trasformata perché per ogni $\lambda \in R$ essa ha infiniti poli reali maggiori di λ, quindi non può essere analitica in nessun semipiano destro.

■

NUMERO 70

Calcolare la trasformata di Laplace inversa di

$$f(s) = \frac{2e^{-3s}\text{ch } s}{s^2+s^3}$$

SOLUZIONE

Risulta

$$f(s) = \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right)\left(e^{-2s}+e^{-4s}\right)$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{f\} = e^{-(t-2)}H(t-2)-H(t-2)+(t-2)H(t-2)+e^{-(t-4)}H(t-4)-H(t-4)+$$

$$+(t-4)H(t-4) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 2 \\ e^{-(t-2)}+t-3 & 2 < t < 4 \\ e^{-t}(e^2+e^4)+2t-8 & 4 < t \end{cases}$$

■

NUMERO 71

Determinare i valori reali di α per i quali la funzione

$$F(t) = e^{\alpha(t^{\alpha}+\ln t)}$$

è $\mathscr{L}$-trasformabile.

SOLUZIONE

Risulta

$$F(t)e^{-st} = t^{\alpha}e^{\alpha t^{\alpha}-st}$$

L'integrale fra 0 e 1 è convergente se e solo se $\alpha > -1$. Quello tra 1 e ∞ converge (per qualche s) se e solo se $\alpha \leqslant 1$.
Gli α cercati sono dati da

$$-1 < \alpha \leqslant 1. \qquad \blacksquare$$

NUMERO 72

Trovare una soluzione -trasformabile Y di

$$\begin{cases} (tY(t))'-t\cos t = \displaystyle\int_0^t J_o(\tau)J_o(t-\tau)d\tau & t > 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

Dove J_o indica la funzione di Bessel di prima specie di ordine 0.

SOLUZIONE

Posto $y = \mathscr{L}\{Y\}$, segue

$$\mathscr{L}\{(tY)'\} = \mathscr{L}\{Y+t \quad \} = -sy'$$

$$\mathscr{L}\{t\cos t\} = -\frac{d}{ds}\frac{\cdot}{s^2 \cdot 1}$$

$$\mathscr{L}\{J_o * J_o\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Si ha dunque

$$-sy' - \frac{2s^2}{(s^2+1)^2} = 0$$

risolvendo nell'incognita y, per $s > 0$, si ottiene

$$y(s) = \frac{1}{s^2+1} + C$$

y deve essere infinitesima all'infinito (condizione necessaria affinché sia la trasformata di una Y appartenente ad $L^1_{loc}([0,+\infty))$, perciò $C = 0$ e

$$Y(t) = \sin t$$

Osservazione. La soluzione più generale nell'ambito della distribuzione è $Y(t) = \sin t + C\delta_o(t)$, essendo δ_o la distribuzione di Dirac centrata in zero. ■

NUMERO 73

Calcolare mediante la formula di Riemann-Fourier

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\Gamma'(1)-\ln s}{s}\right\}$$

dove Γ è la funzione di Eulero e $\ln s$ è la determinazione reale del logaritmo in R^{+}.

SOLUZIONE

Consideriamo il piano complesso tagliato lungo il semiasse dei reali negativi e la branca

$$s = \rho e^{i\theta} \quad , \quad -\pi < \theta < \pi \quad , \quad \ln s = \ln\rho + i\theta$$

Consideriamo il cammino in figura, in cui il raggio della semi-

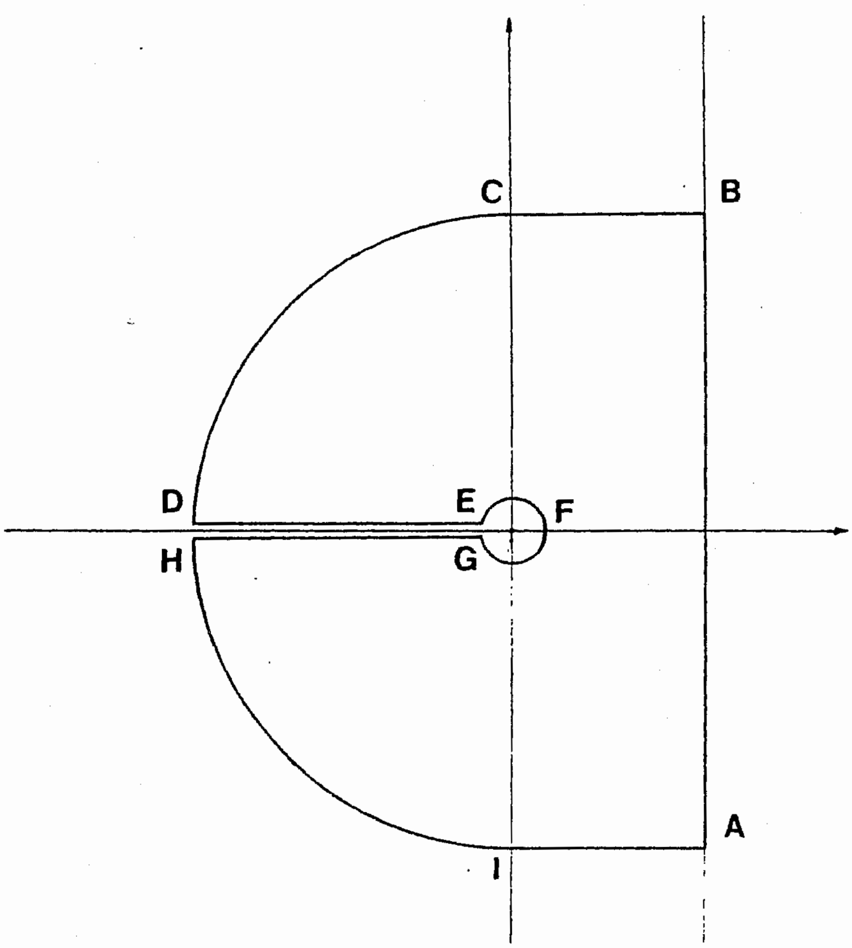


Fig.23

circonferenza CDHI è R ed ε è il raggio di EFG. Indichiamo brevemente con γ la costante di Eulero-Mascheroni $\Gamma'(1)$.

Poniamo $F = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{\gamma - \ln s}{s}\right\}$. Si ottiene, dal teorema di Cauchy,

$$(1) \quad F(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{AB} e^{st} \frac{\gamma-\ln s}{s}\, ds = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{BCDEFGHIA} e^{st} \frac{\gamma - \ln s}{s} ds$$

poiché risulta $\left|\frac{\gamma-\ln s}{s}\right| \leqslant C\, \frac{\ln\rho}{\rho}$ applicando il lemma 1 del capitolo I ai cammini BC e IA ed il lemma di Jordan (lemma 3(c) del cap.I) ai cammini CD e HI, otteniamo

$$(2) \quad \lim_{R\to\infty}\left(\int_{BCD} + \int_{HIA}\right) e^{st}\frac{\gamma-\ln s}{s}\, ds = 0$$

Lungo DE abbiamo: $s = -\rho$, $\theta = \pi$, $\ln s = \ln\rho + i\pi$, e $ds = -d\rho$, dunque

$$(3) \quad \int_{DE} e^{st}\frac{\gamma-\ln s}{s}\, ds = \int_R^{\varepsilon} e^{-\rho t}\frac{\gamma - \ln\rho - i\pi}{-\rho}(-d\rho)$$

Lungo GH abbiamo: $s = -\rho$, $\theta = -\pi$, $\ln s = \ln\rho - i\pi$ e $ds = -d\rho$, pertanto

$$(4) \quad \int_{GH} e^{st}\frac{\gamma-\ln s}{s}\, ds = \int_{\varepsilon}^{R} e^{-\rho t}\frac{\gamma - \ln\rho + i\pi}{-\rho}(-d\rho)\ .$$

Sommando (3) e (4)

$$(5) \quad \int_{DE\cup GH} e^{st}\frac{\gamma-\ln s}{s}\, ds = 2\pi i\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{-\rho t}}{\rho}\, d\rho =$$

$$= 2\pi i\left(e^{-tR}\ln R - e^{-t\varepsilon}\ln\varepsilon + t\int_{\varepsilon}^{R} e^{-t\rho}\ln\rho\, d\rho\right) =$$

ponendo $t\rho = y$ e $d\rho = \frac{dy}{t}$

$$= 2\pi i\left(e^{-tR}\ln R - e^{-t\varepsilon}\ln\varepsilon + \int_{\varepsilon t}^{Rt} e^{-y}\ln y\, dy - \ln t\int_{\varepsilon t}^{\varepsilon R} e^{-y} dy\right)$$

Consideriamo i termini entro parentesi:

$$(6) \quad e^{-tR}\ln R \to 0 \quad \text{quando} \quad R \to \infty$$

$$(7) \quad \int_{\varepsilon t}^{Rt} e^{-y}\ln y\, dy \to \gamma \quad \text{quando} \quad R\to\infty,\ \varepsilon\to 0$$

(8) $$\ln t \int_{\varepsilon t}^{\varepsilon R} e^{-y} dy \to \ln t \quad \text{quando} \quad R \to \infty$$

mentre il termine $e^{-t\varepsilon}\ln\varepsilon$ diverge per $\varepsilon \to 0$.
Su EFG si ha: $s = \varepsilon e^{i\theta}$ $\quad ds = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$

(9) $$\int_{EFG} e^{st} \frac{\gamma - \ln s}{s} ds = \int_{\pi}^{-\pi} e^{\varepsilon t e^{i\theta}} \frac{\gamma - \ln\varepsilon - i\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta =$$
$$= -i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\varepsilon t e^{i\theta}} (\gamma - \ln\varepsilon - i\theta) d\theta$$

Poiché $e^{\varepsilon t e^{i\theta}}$ converge ad 1 uniformemente in θ quando ε tende a zero

(10) $$-i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\varepsilon t e^{i\theta}} (\gamma - i\theta) d\theta \xrightarrow{\varepsilon \to 0} -2\pi i \gamma$$

Applicando la regola di L'Hôpital, otteniamo

(11) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln\varepsilon \left(i \int_{-\pi}^{\pi} e^{\varepsilon t e^{i\theta}} d\theta - 2\pi i e^{-t\varepsilon} \right) \right] = 0$$

Tenendo conto di (1),(2),(5)-(11) concludiamo

$$F(t) = \ln t .$$

■

NUMERO 74

Calcolare, mediante la formula di Riemann-Fourier

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{sh(x\sqrt{s})}{s\ sh(\pi\sqrt{s})}\right\}$$

dove $0 < x < \pi$.

SOLUZIONE

Nonostante la polidromia di $\sqrt{s}$, la funzione $f(s) = \dfrac{sh(x\sqrt{s})}{s\cdot sh(\pi\sqrt{s})}$ non è polidroma perché il seno iperbolico è una funzione dispari, dunque il valore di $f(x)$ non dipende dalla scelta effettuata per la determinazione di $\sqrt{s}$ purché sia la stessa al numeratore e al denominatore.

Dall'identità $sh(iz) = i\sin z$ si ricava

$$sh(\pi\sqrt{s}) = 0 \iff \sin(-i\pi\sqrt{s}) = 0 \iff s = -k^2 \quad \text{con} \quad k\in Z$$

Dunque $f(s)$ è una funzione analitica avente infinite singolarità isolate: $0,-1,-4,-9$, etc. Tali singolarità sono tutte poli semplici.

$$Res(e^{st}f(s),0) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s}\cdot\frac{sh(x\sqrt{s})}{sh(\pi\sqrt{s})}e^{st} = \frac{x}{\pi}$$

$$Res(e^{st}f(s),-k^2) = \lim_{s\to -k^2} \frac{e^{st}sh(x\sqrt{s})}{s}\cdot\frac{(s+k^2)}{sh(\pi\sqrt{s})} = (*)$$

$$= \frac{e^{-k^2t}sh(ikx)}{-k^2}\lim_{s\to -k^2}\frac{1}{\frac{\pi}{2\sqrt{s}}ch(\pi\sqrt{s})} = \frac{ie^{-k^2t}\sin(kx)}{-k^2}\frac{2ik}{\pi ch(ik\pi)} =$$

$$= \frac{2}{k\pi\cos(k\pi)}e^{-k^2t}\sin(kx) = (-1)^k\frac{2}{k\pi}e^{-k^2t}\sin(kx)$$

(*) Abbiamo scelto la determinazione $\sqrt{-k^2} = ik$, perché scomponendo $f(s)e^{st}$ nei due fattori abbiamo reintrodotto la polidromia ed è quindi necessario fissare una determinazione della radice. Il limite del secondo fattore è calcolato con la regola de l'Hôpital.

Utilizziamo una variante del lemma di Jordan: consideriamo una successione di cammini

$$C_k = \left\{ R_k \cdot \rho(\theta) \cdot e^{i\theta}, \ \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi, \ k \in N \right\}$$

Se riusciamo a determinare una successione $R_k \to \infty$ e una funzione reale $\rho(\theta)$ verificante le ipotesi del lemma 5(c) del capitolo I, cioè tale che

(1) (i) $\lim_{k\to\infty} \sup_{s\in C_k} |f(s)| = 0$

(ii) $0 < \rho_0 \leqslant \rho(\theta) \leqslant \rho_1 < +\infty \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$

(iii) $|\rho'(\theta)| \leqslant \rho_2 < +\infty \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi,$

allora dal teorema di Cauchy, otteniamo

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{sh(x\sqrt{s})}{s\ sh(\pi\sqrt{s})}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} Res(e^{st}f(s), -k^2) = \frac{x}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k\pi} e^{-k^2 t} \sin kx.$$

Verifichiamo le ipotesi del lemma di Jordan.

Poniamo $\sqrt{s} = z = \xi + i\eta$, $\forall\, \xi, \eta \in R$, risulta allora

$$\left|\frac{sh(x\sqrt{s})}{sh(\pi\sqrt{s})}\right|^2 = \frac{sh^2(x\xi)+\sin^2(x\eta)}{sh^2(\pi\xi)+\sin^2(\pi\eta)}$$

sia $\eta = \frac{2k+1}{2}$ $k\in Z$. Si ha, $\forall\, \xi \in R$

$$\left|\frac{sh(x\sqrt{s})}{sh(\pi\sqrt{s})}\right|^2 = \frac{sh^2(x\xi)+\sin^2(\frac{2k+1}{2}x)}{sh^2(\pi\xi)+\sin^2(\pi\frac{2k+1}{2})} = \frac{Sh^2(x\xi)+\sin^2(\frac{2k+1}{2}x)}{sh^2(\pi\xi)+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{sh^2(x\xi)+1}{sh^2(\pi\xi)+1} \leqslant 1 \quad \text{perché} \quad 0 < x < \pi$$

dunque si ha

$$\left|\frac{sh(x\sqrt{s})}{s\ sh(\pi\sqrt{s})}\right| \leqslant \frac{1}{|s|} \tag{2}$$

$\forall\, s$ t.c. $\sqrt{s} = \xi + \frac{2k+1}{2} i$ con $\xi\in R$, $k\in Z$.

Fissiamo la seguente parametrizzazione dei cammini

$$C_k = \left\{ \frac{(2k+1)^2}{4} \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}} e^{i\theta}, \ \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi, \ k\in N \right\}$$

orientata come risulta dalla figura 24.

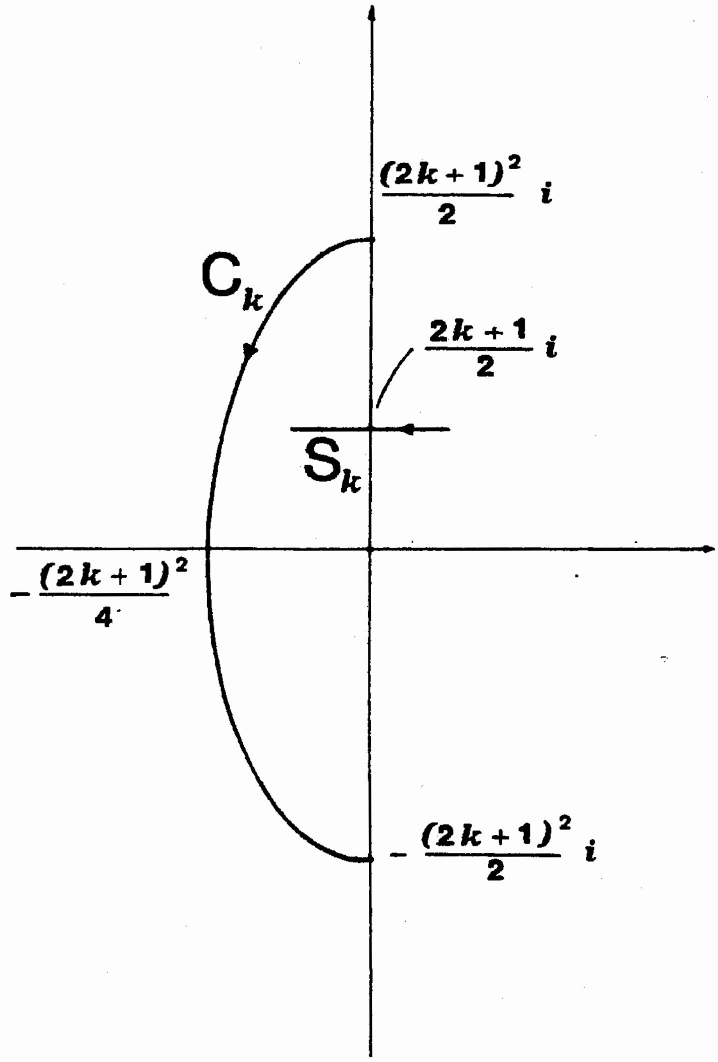


Fig.24

Posto $\rho(\theta) = (\sin^2 \frac{\theta}{2})^{-1}$, si ha

$$1 \leqslant \rho(\theta) \leqslant 2 \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$$

$$|\rho'(\theta)| \leqslant 2 \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3}{2}\pi$$

Quando s percorre C_k, $\sqrt{s}$ percorre il segmento

$$S_k = \left\{ \xi + \frac{2k+1}{2} i : -\frac{2k+1}{2} \leqslant \xi \leqslant +\frac{2k+1}{2} \right\}$$

perciò dalla (2)

$$\sup_{s \in C_k} |f(s)| \leqslant \frac{1}{|s|}$$

se ne deduce che le condizioni (1) sono verificate e dunque il Lemma di Jordan (5 cap.I) è applicabile per ogni $t > 0$.
Con ovvie considerazioni si completa il discorso considerando cir cuiti Γ_k del tipo in figura 25.

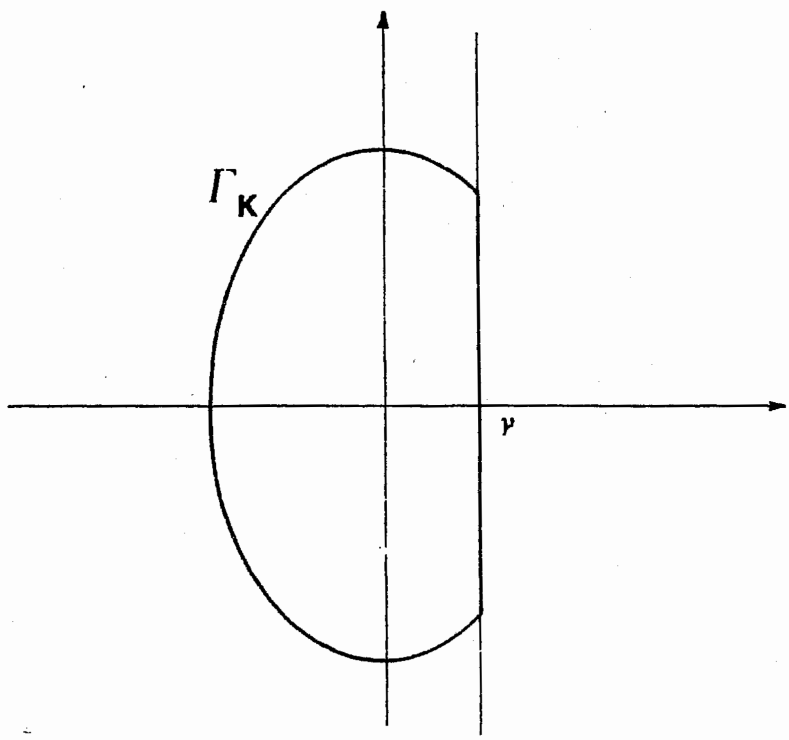


Fig.25.

■

NUMERO 75

Calcolare mediante la formula di Riemann-Fourier

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s}\right\}$$

SOLUZIONE

Fissato $\gamma > 0$, è:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-1/s}}{s}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{1}{s}\, e^{st-\frac{1}{s}}\, ds \ .$$

La funzione analitica (della variabile complessa s) che compare nell'integrando ha una singolarità essenziale nell'origine.

$$\frac{1}{s}\, e^{st-\frac{1}{s}} = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s^n t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{s^m m!} = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m t^n}{n!m!}\, s^{n-m-1}$$

ponendo n = m si ottiene il residuo nell'origine

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{s}\, e^{st-\frac{1}{s}}, 0\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2} = J_0(2\sqrt{t}) \ .$$

Posto $s = x+iy$, $\forall s$: $|s| > 1$ si ha

$$|x| \leqslant |s| < |s|^2$$

$$\left|\frac{1}{s}\, e^{-\frac{1}{s}}\right| = \frac{1}{|s|}\left|e^{\frac{-x+iy}{x^2+y^2}}\right| = \frac{1}{|s|}\, e^{-\frac{x}{|s|^2}} \leqslant \frac{e}{|s|}$$

Dunque $t > 0$ possiamo applicare i Lemmi 1 e 3(c) (Jordan) del cap.I al cammino ABCDE:

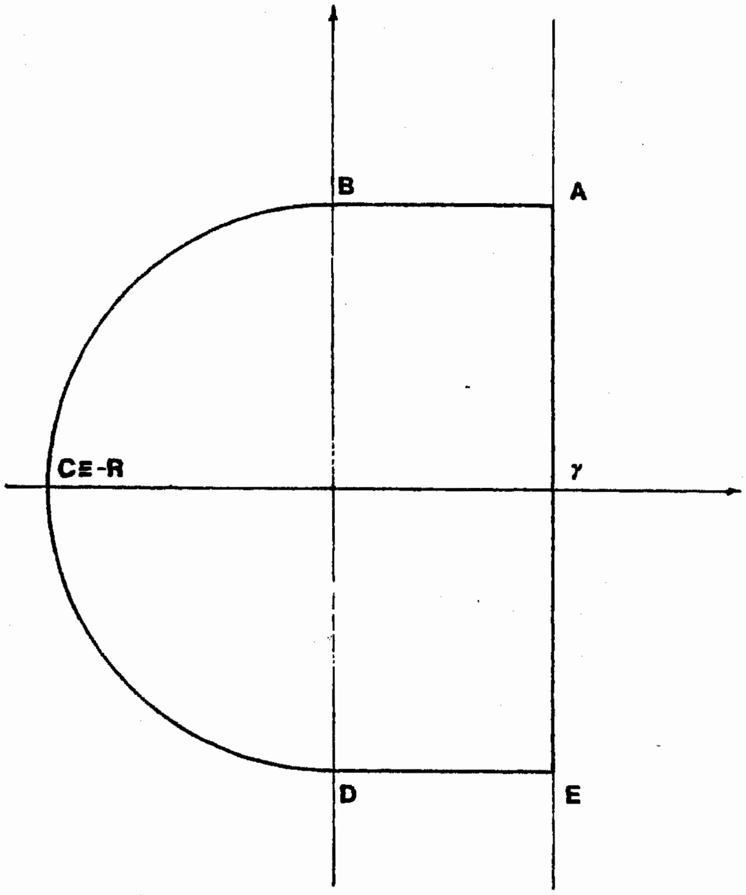


Fig.26

Si ottiene

$$\lim_{R\to\infty} \int_{ABCDE} \frac{1}{s}\, e^{st - \frac{1}{s}} ds = 0 \quad .$$

Grazie al teorema di Cauchy si conclude

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{e^{-\frac{1}{s}}}{s} \right\} = \mathrm{Res}\left(\frac{e^{st - \frac{1}{s}}}{s}, 0 \right) = J_0(2\sqrt{t}) \quad .$$

NUMERO 76

Mediante la formula di inversione di Riemann-Fourier calcolare

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+\omega^2}\,e^{-\alpha\sqrt{s}}\right\}$$

dove $\alpha,\omega\in R$, $\alpha > 0$ e $\sqrt{s}$ è la radice aritmetica se s è reale positivo.

L'antitrasformata si esprime tramite un integrale non calcolabile elementarmente. Verificare che la soluzione a regime ha un comportamento oscillatorio, dimostrando che tale integrale è infinitesimo per t tendente all'infinito.

SOLUZIONE

Effettuiamo un taglio lungo il semiasse dei reali negativi e scegliamo la determinazione di $\sqrt{s}$:

$$s = \rho e^{i\theta}\ ,\ |\theta| < \pi\ ,\ \sqrt{s} = \rho^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\alpha\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{se^{st-\alpha\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}\,ds\ .$$

La funzione $\phi(s) = \dfrac{se^{st-\alpha\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}$ è analitica nel piano complesso privato del semiasse reale negativo e dei due poli semplici $\pm i\omega$.

Facendo riferimento al circuito $C_{R,\varepsilon}$ della figura 27,

se $R > 2$, $\forall\, s \in BC \cup IA$, si ha

$$|\phi(s)| \leqslant \frac{C}{|s|}\,e^{\gamma t}$$

Per il Lemma 1 (cap.1) si conclude

$$(1) \qquad \lim_{R\to\infty}\int_{BC\,\cup\, IA}\phi(s)ds = 0$$

$\forall s\in CD$ si ha $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ $\quad Re\sqrt{s} > 0$, dunque posto

$$f(s) = \frac{se^{-\alpha\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}$$

$$|f(s)| \leqslant \frac{C}{|s|} \qquad \forall s\in CD\ .$$

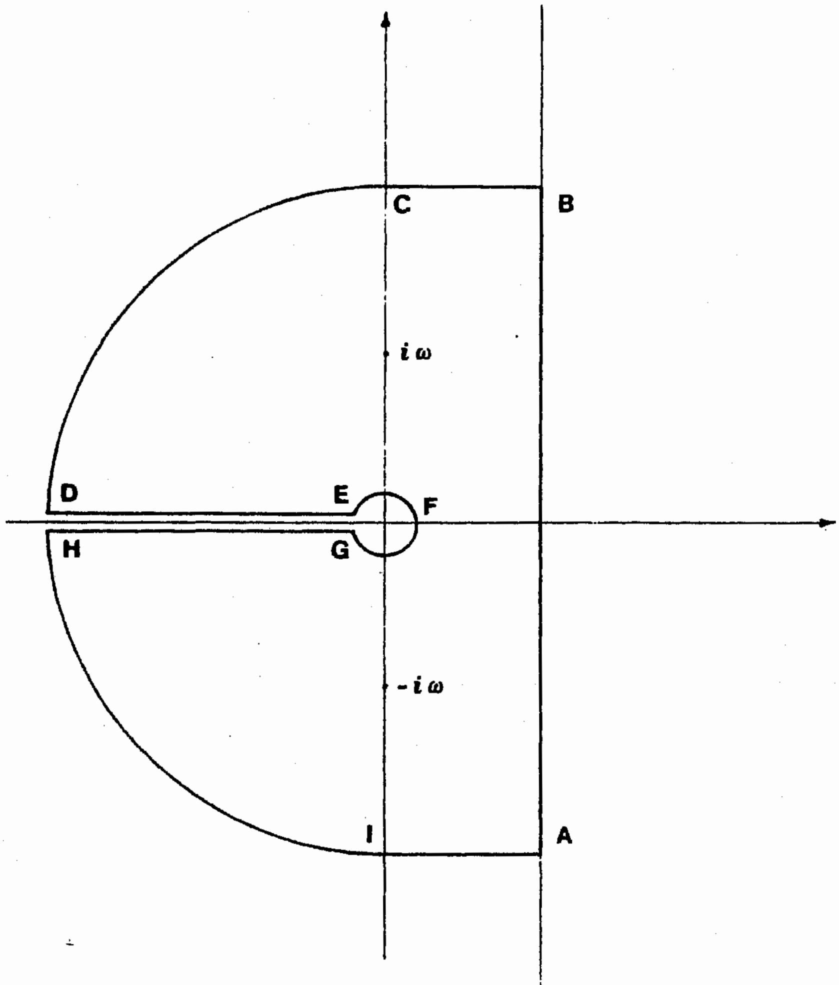


Fig.27

Analogamente

$$|f(s)| \leq \frac{C}{|s|} \qquad \forall s \in HI \, .$$

Dal lemma di Jordan segue, per t > 0,

(2) $$\lim_{R \to \infty} \int_{CD \cup HI} \phi(s)ds = 0$$

Infine

(3) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{EFG} \phi(s)ds = 0$$

(4) $$\int_{DE} \phi(s)ds = \int_R^{\varepsilon} \frac{\rho e^{-\rho t - i\alpha\sqrt{\rho}}}{\rho^2+\omega^2}\, d\rho$$

(5) $$\int_{GH} \phi(s)ds = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\rho e^{-\rho t + i\alpha\sqrt{\rho}}}{\rho^2+\omega^2}\, d\rho$$

(6) $$\mathrm{Res}(\phi(s), i\omega) = \frac{i\omega e^{i\omega t - \alpha\sqrt{\omega}e^{i\frac{\pi}{4}}}}{2\omega i} = \frac{1}{2}\, e^{-\alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}} + i\left(\omega t - \alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)}$$

(7) $$\mathrm{Res}(\phi(s), -i\omega) = \frac{-i\omega e^{-i\omega t - \alpha\sqrt{\omega}e^{-i\frac{\pi}{4}}}}{-2\omega i} = \frac{1}{2}\, e^{-\alpha\sqrt{\frac{\pi}{2}} - i\left(\omega t - \alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right)}$$

Concludendo, da (1)-(7)

$$\lim_{R} \int_{AB} \phi(s)ds = 2\pi i\left[\mathrm{Res}(\phi, i\omega) + \mathrm{Res}(\phi, -i\omega)\right] - \lim_{R,\varepsilon}\left(\int_{DE}\phi(s)ds + \int_{GH}\phi(s)ds\right) =$$

$$= 2\pi i\, e^{-\alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\cos\left(\omega t - \alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - 2i\int_0^{\infty} \frac{\rho e^{-\rho t}}{\rho^2+\omega^2}\sin(\alpha\sqrt{\rho})\,d\rho$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{se^{-\alpha\sqrt{s}}}{s^2+\omega^2}\right\} = e^{-\alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\cos\left(\omega t - \alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right) - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho e^{-\rho t}}{\rho^2+\omega^2}\sin(\alpha\sqrt{\rho})\,d\rho\ .$$

Studiamo ora il comportamento a regime della soluzione.

(8) $$\left|\frac{\rho e^{-\rho t}}{\rho^2+\omega^2}\sin\alpha\sqrt{\rho}\right| \leqslant \frac{\rho e^{-\rho}}{\rho^2+\omega^2} \in L^1(0,\infty) \qquad \forall t \geqslant 1$$

(9) $$\lim_{t\to\infty} \frac{\rho e^{-\rho t}}{\rho^2+\omega^2}\sin\alpha\sqrt{\rho} = 0 \qquad \forall \rho > 0.$$

Per il teorema della convergenza dominata, da (8) e (9) segue

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\rho e^{-\rho t}}{\rho^2+\omega^2}\sin(\alpha\sqrt{\rho})\,d\rho = 0$$

Dunque per t "grande" il comportamento della soluzione è dato da

$$e^{-\alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}}\cos\left(\omega t - \alpha\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right).$$

■

NUMERO 77

Determinare, mediante $\mathscr{L}$-trasformata, la soluzione $Y = Y(x,t)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial t} + \dfrac{\partial Y}{\partial x} = 0 & x > 0 \quad t > 0 \\ Y(x,0) = 0 & x > 0 \\ Y(0,t) = e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Poniamo

$$y(x,s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st} Y(x,t)\,dt = \mathscr{L}_t\{Y(x,t)\} \ .$$

Si ottiene:

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial Y}{\partial t}\right\} = sy - Y(x,0) = sy(x,s)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial Y}{\partial x}\right\} = \frac{\partial y}{\partial x}(x,s)$$

trasformando l'equazione e la condizione su $Y(0,t)$

$$\begin{cases} sy + y_x = 0 \\ y(0,s) = \dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

$$y(s,x) = \frac{e^{-sx}}{s+1}$$

per $x > 0$ si tratta di una $\mathscr{L}$-trasformata (verifica la condizione sufficiente C.S.1 del cap.V).

Antitrasformando

$$Y(x,t) = H(t-x)e^{x-t} \ .$$

■

NUMERO 78

Risolvere, mediante trasformata di Laplace:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}\cdot\dfrac{\partial Y}{\partial t}+\dfrac{\partial Y}{\partial x}=0 & x>0\ ,\ t>0 \\ Y(x,0)=1 & x>0 \\ Y(0,t)=0 & t>0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Posto

$$y(x,s) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T e^{-st}Y(x,t)dt = \mathscr{L}_t\{Y\},$$

trasformando l'equazione, abbiamo

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{s}{x+1}\,y + \frac{1}{x+1}$$

$$y(x,s) = e^{-s\log(x+1)}\left(c(s) + \int_0^x \frac{1}{y+1}\,e^{s\log(y+1)}dy\right) =$$

$$= (x+1)^{-s}\left(c(s) + \int_0^x (y+1)^{s-1}dy\right) = \frac{c(s)}{(x+1)^s} + \frac{1}{s} - \frac{1}{s(x+1)^s}$$

trasformando la condizione su $Y(0,t)$ si ottiene

$$y(0,s) = 0$$

e dunque $c(s) = 0$

$$y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s(x+1)^s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}\,e^{-s\ln(x+1)}$$

Per $x>0$ è $\ln(x+1)>0$. Dunque, antitrasformando

$$Y(x,t) = 1-H(t-\ln(x+1)).$$

■

NUMERO 79

Calcolare, mediante trasformata di Laplace, la soluzione $Y = Y(x,t)$ del problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 3e^{-t}\sin 2x & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \ 0 < t \\ Y(x,0) = \sin 2x - \sin x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ Y(0,t) = 0 & t > 0 \\ Y(\frac{\pi}{2},t) = -e^{-t} & t > 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE

Posto $y(x,s) = \mathscr{L}_t\{Y(x,t)\}$

$$\begin{cases} sy(x,s) - y_{xx}(x,s) = \dfrac{3\sin 2x}{s+1} + \sin 2x - \sin x & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ y(0,s) = 0 \qquad y(\frac{\pi}{2},s) = -\dfrac{1}{s+1} \end{cases}$$

La soluzione dell'equazione omogenea è

$$y_1(x,s) = c_1(s)\,\mathrm{sh}(\sqrt{s}x) + c_2(s)\,\mathrm{ch}(\sqrt{s}x)$$

Un integrale particolare è dato da

$$y_2(x,s) = -\frac{\sin x}{s+1} + \frac{\sin 2x}{s+1}$$

L'integrale generale è

$$y(x,s) = y_1(x,s) + y_2(x,s)$$

Imponendo le condizioni in $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, otteniamo

$$c_1 = c_2 = 0$$

quindi

$$y(x,s) = \frac{1}{s+1}(\sin 2x - \sin x)$$

$$Y(x,t) = (\sin 2x - \sin x)e^{-t}.$$

■

Pag.	Riga	Errata	Corrige
12	3	$\Omega\ \{z_i\}$	$\Omega\setminus\{z_i\}$
18	quartultima	(formula incompleta)	(aggiungere) = 0
23	ultima	$_\Gamma \dfrac{dz}{z^4-1}$	$\displaystyle\int_\Gamma \frac{dz}{z^4-1}$
27	3	$R \to \varepsilon$	$R \to \infty$
28	5	$\dfrac{1}{2\ i}$	$\dfrac{1}{2\pi i}$
37	18	$\displaystyle\int_{BCD} f(z)dz$	$\displaystyle\int_{BCD} g(z)dz$
41	11 denominatore	$(\ \exp(i\theta)+1)$	$(\rho\exp(i\theta)+1)$
42	2 e 3	(dove compare) v.p.	(eliminarlo)
42	5 numeratore	$2\ i$	$2\pi i$
44	12 numeratore	$^{1/6}e^{i\frac{\theta}{6}}$	$\rho^{1/6}e^{i\frac{\theta}{6}}$
48	1	$C\ \{-i\}$	$C\setminus\{-i\}$
48	2	$C\ \{-1\}$	$C\setminus\{-1\}$
49	17	Se $f\ L^2(R)$	Se $f\in L^2(R)$
54	7	$\exp(-4z^2)$	$\exp(-az^2)$
55	7	$\exp\left[\dfrac{-R^2}{R^2+x^2}(R^2-b^2)\right]$	$\exp\left[-R^2\dfrac{R^2-y^2}{R^2+y^2}\right]$
56	10	Essendo $\varphi' =$	Essendo $(\varphi')\hat{} =$
58	2	$\hat{F}(0) = 0$	$\hat{F}(0) = -\dfrac{55}{324}\pi e^{-\frac{14}{3}}$
59	10	$(z^2+2x+2)^{-1}$	$(z^2+2z+z)^{-1}$
59	penultima	$g(\xi)$	$\hat{g}(\xi)$
61	6	$(3z+2i)^2$	$(3z-2i)^2$
64	6	$i(\dots)$	$-i(\dots)$
64	13 e ultima	$\pm\ \pi i$	$\mp\ \pi i$
72	5	perciò f	perciò $\hat{f}$
72	ultima	$\displaystyle\int_{-}^{+\infty}$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}$

Pag.	Riga	Errata	Corrige
81	ultima	e^{-x}	e^{-x^2}
84	12 denominatore	$\xi^2-2\lambda\xi-1$	$\xi^2-2\lambda\xi+1$
84	25	(b) $\lambda > 1$	(b) $\|\lambda\| > 1$
84	penultima	A_A	A_λ
91	21	$\|\hat{f}(\xi)\|$	$\|\hat{f}(\xi)\|^2$
93	5	dunque $\hat{u}$	dunque u
93	14	$\|e^{-\xi^2 t}\|^2$	$\|e^{-\xi^2 t}-1\|^2$
95	16	la soluzione u	la soluzione w
96	9	$u(x,t)$	$u(x,y)$
96	20	B	$B(\xi)$
99	quartultima	e^{-itx}	e^{-itz}
102	terzultima	(2)	(1)
106	16	$e^{-st}\|F(t)\|\ L^1(0,+\infty)$	$e^{-st}F(t)\ L^1(0,+\infty)$
106	ultima	$\{F*G\}$	$\mathscr{L}\{F*G\}$
107	11	Si è	Se è
107	15	$L^1_{log}(\|0,+\infty))$	$L^1_{loc}([0,+\infty))$
109	penultima	$\frac{\pi}{s}$	$\frac{\pi}{2}$
110	8	erf	erfc
117	ultima	$\sin(t-\tau)$	$\sin(\omega(t-\tau))$
124	8	L'integrale fra 0 e 1 se e solo se $\alpha > -1$.	L'integrale fra 0 e 1 è convergente per ogni α.
124	ultima	$-1 < \alpha \leqslant 1$	$\alpha \leqslant 1$
125	2	-	$\mathscr{L}$-
127	quartultima	$\int_{\varepsilon t}^{\varepsilon R}$	$\int_{\varepsilon t}^{Rt}$
128	1	$\int_{\varepsilon t}^{\varepsilon R}$	$\int_{\varepsilon t}^{Rt}$
142	penultima	$S_i(z)$	$Si(z)$

TAVOLE

Sviluppi in serie di Taylor

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \qquad z \in C$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad z \in C$$

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad z \in C$$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \qquad |z| < 1$$

$$\arcsin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \qquad |z| < 1$$

$$\ln(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k} \qquad |z| < 1$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad z \in C$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad z \in C$$

$$(1+z)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k \qquad |z| < 1, \alpha \in R$$

$$\text{dove } \binom{\alpha}{k} = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \qquad z \in C$$

$$S_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!(2k+1)} z^{2k+1} \qquad z \in C$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} z^{2k+1} \qquad z \in C$$

Trasformate di Fourier

$f(t)$	$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t)\,dt$ (*)	
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi e^{-\lvert x\rvert}$	
$e^{-\lvert t\rvert}$	$\frac{2}{1+x^2}$	
$p(t) = H(1-t^2)$	$\frac{2\sin x}{x}$	
$\frac{\sin t}{t}$	$\pi p(x)$	
$H(t)e^{-t}$	$\frac{1+ix}{1+x^2}$	
$e^{-\alpha t^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$	$\alpha \in R^+$
$p(t)\cdot \ln\lvert t\rvert$	$-2\,\frac{\mathrm{Si}\,x}{x}$	

(*) L'integrale va inteso nel senso del valor principale se f appartiene ad $L^2(R)$ ma non ad $L^1(R)$.

Trasformate di Fourier in $\mathscr{S}'$

$$\langle \hat{U}, \psi \rangle = \langle U, \hat{\psi} \rangle \qquad \forall U \in \mathscr{S}', \forall \psi \in \mathscr{S}$$

U	$\hat{U}$	
1	$2\pi\delta(x)$	
t^n	$2\pi(-i)^n\delta^{(n)}(x)$	
$\delta(t)$	1	
$\delta^{(n)}(t)$	$(-ix)^n$	
$\delta(t-t_o)$	$e^{it_o x}$	$t_o \in R$
$e^{i\omega t}$	$2\pi\delta(x+\omega)$	$\omega \in R$
$\sin\omega t$	$\pi i(\delta(x-\omega)-\delta(x+\omega))$	$\omega \in R$
$\cos\omega t$	$\pi(\delta(x-\omega)+\delta(x+\omega))$	$\omega \in R$
$H(t)$	$\pi\delta(x) + i \text{ v.p. } \frac{1}{x}$	
$\text{sign } t$	$2i \text{ v.p. } \frac{1}{x}$	
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{+ik\frac{2\pi}{T}t}$ T reale $\quad T > 0.$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x-k\frac{2\pi}{T}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikTx}$	

Trasformate di Laplace

$F(t)$	$f(s)=\mathscr{L}\{F\}$	λ
1	$\frac{1}{s}$	0
$e^{\alpha t}$, $\alpha\in C$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\mathrm{Re}\,\alpha$
$\sin\omega t$, $\omega\in R$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos\omega t$, $\omega\in R$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\mathrm{sh}\,\omega t$, $\omega\in R$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$\|\omega\|$
$\mathrm{ch}\,\omega t$, $\omega\in R$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$\|\omega\|$
t^n , $n\in N$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
t^α , $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$	0
$H(t-b)$, $b\in R^+$	$\frac{e^{-bs}}{s}$	0
$H(t-\ln a)$, $a \geqslant 1$	$\frac{1}{s a^s}$	0
$H(t+\ln a)$, $0 < a \leqslant 1$	$\frac{a^s}{s}$	0
e^{-t^2}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{\frac{s^2}{4}} \operatorname{erfc} \frac{s}{2}$	$-\infty$
$\operatorname{erf} t$	$\frac{1}{s}\, e^{\frac{s^2}{4}} \operatorname{erfc} \frac{s}{2}$	0
$\operatorname{erf}\sqrt{t}$	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$	0
$\operatorname{erfc} \frac{a}{2\sqrt{t}}$ $a\in R$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	0
$\mathrm{Si}\ t$	$\frac{1}{s}\ \mathrm{arc}\cot s$	0
$\ln t$	$\frac{\Gamma'(1)-\ln s}{s}$	0
$\frac{1-e^{-t}}{t}$	$\ln(1+\frac{1}{s})$	0

$F(t)$	$f(s) = \mathscr{L}\{F\}$	λ
$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	0
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	0
$J_o(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$	0
$J_n(t)$	$\frac{\left(\sqrt{s^2+1}-s\right)^n}{\sqrt{s^2+1}}$	0
$F(t+T) = F(t)\ \forall t > 0$ $F \in L^1_{loc}([0,+\infty)), T > 0$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} F(t)\,dt$	0