Esercizio 1

Date le funzioni

$$f(x,y,z) = \tan x + \sin(y+z-x) + \cos(xyz) - 1$$
$$g(x,y,z) = \log(1+4xyz) + \arcsin(x+y),$$

si consideri l'insieme

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0, g(x,y,z) = 0\}.$$

Dimostrare che in un intorno dell'origine si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza, in particolare $x = x(y)$, $z = z(y)$. Trovare tale parametrizzazione con un errore $o(y)$ e $o(y^2)$.

Esercizio 2

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} (x+y)\sin(x+y) + e^{z+y} + \log(1+zx) = 1 \\ (z+y)e^{z+y} + \sin(x+y) + \log(1+xy) = 0. \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $x = x(y)$, $z = z(y)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $y = 0$.

Esercizio 3

Data la funzione

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy,$$

provare che essa definisce implicitamente in un intorno di $(2^{1/3}, 2^{2/3})$ una funzione $y = y(x)$; sviluppando la funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 2^{1/3}$ verificare che essa ha in tale punto un estremo relativo e determinarne la natura.

Esercizio 4

Sia Γ il luogo di punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} -x^2 + \arctan z + ye^x = 0 \\ (z+y)\sin(z+y) + \log(1+x+y) + e^{xy} = 1. \end{cases}$$

Verificare che si può scrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma $x = x(y)$, $z = z(y)$ ed esprimere tale parametrizzazione al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $y = 0$. Si scriva l'equazione del piano normale alla curva $x = x(t)$, $y = t$, $z = z(t)$.

Esercizio 5

Sia Γ il luogo di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} x + \tan(xy) + \log(1 + xz) = 0 \\ \tan y + yz + \arctan(xy) = 0. \end{cases}$$

Verificare che, in un intorno dell'origine, si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza. Esprimere tale parametrizzazione al primo e al secondo ordine.

Esercizio 6

Sia Γ il luogo di punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} x + \tan(x + y) + \log(1 + x + z) = 0 \\ \tan y + yz + \arctan(x + y) = 0. \end{cases}$$

Verificare che, in un intorno dell'origine, si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza. Esprimere tale parametrizzazione al primo e al secondo ordine.

Esercizio 7

Sia Γ il luogo dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} \sin z + y^2 - \ln(1 + y) + (x - 1)^2 = 0 \\ e^{x-1} - \cos z + x \tan y = 0. \end{cases}$$

Verificare che Γ può essere scritta in un intorno del punto $P = (1, 0, 0)$ nella forma

$$\begin{cases} x = x(y) \\ z = z(y) \end{cases}$$

ed esprimere tale parametrizzazione al primo e al secondo ordine in un intorno di $y = 0$.

Esercizio 8

Sia Γ il luogo dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} e^z + \cos(x + y) + \ln(1 + x + y + z) - 2 = 0 \\ x \tan(yz) + \sin(x + y) + \arctan(xy) = 0. \end{cases}$$

Verificare che Γ può essere scritta in un intorno dell'origine nella forma

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

ed esprimere tale parametrizzazione al primo e al secondo ordine in un intorno di $x = 0$.

Esercizio 9

Sia Γ il luogo dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} \sin(x+y) + e^{x+y} - 1 = 0 \\ \ln(\cos(x+y)) + \sin(x^2+y^2) + z + y = 0. \end{cases}$$

Verificare che, in un intorno dell'origine, si possono esplicitare due coordinate in funione della terza. Esprimere tale parametrizzazione al primo e al secondo ordine.