Analisi Matematica 2 Ingegneria Gestionale

Docenti: B. Rubino e R. Sampalmieri

L'Aquila, 21 marzo 2005

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ________________________

Prova orale il: ________________ Docente: ____________________

Esercizio 1

Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+y^2-1$$

sull'insieme

$$\mathcal{C}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\right\}.$$

Esercizio 2

Data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

stabilire dove è continua e differenziabile.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases}y'=y\,(1-y^2)\cos x\\ y(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Esercizio 4

Trovare l'integrale generale $y=y(x)$ della seguente equazione differenziale

$$y'''+5y''+6y'=xe^{-2x}$$

Analisi Matematica 2 Ingegneria Gestionale

Docenti: B. Rubino e R. Sampalmieri

L'Aquila, 4 aprile 2005

Cognome e nome: ____________________________

Matricola: ________________________

Prova orale il: ________________ Docente: ____________________

Esercizio 1

Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = \left(x^2 - 2y^2\right) e^{x-y}$$

sull'insieme

$$\mathcal{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \le 1, \quad |y| \le 2\right\}.$$

Esercizio 2

Data la funzione $f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} x \log\left(\frac{x^2+3y^2}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

stabilire se è

a) continua in $(0,0)$,

b) derivabile in $(0,0)$,

c) differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (1+y^2)\, x e^{x^2} \\ y(0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Esercizio 4

Trovare l'integrale generale $y = y(x)$ della seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = \frac{\log x}{e^x}$$

Analisi Matematica II (3 CFU) - Scritto del 22 luglio 2005
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:_____________________

Esercizio 1

Si consideri la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2y)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Dire se f è continua in $(0,0)$
- Calcolare le derivate parziali di f in $(0,0)$
- Dire se f è differenziabile in $(0,0)$

Esercizio 2

Calcolare massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = x^2 + e^{y^2}$$

sul dominio

$$D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale generale $y = y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y''' - 2y'' + y' = x + e^x$$

Analisi Matematica II (3 CFU) - Scritto del 22 luglio 2005
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola:______________________

Esercizio 1

Si consideri la funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 + \log(1+x^2).$$

- Calcolare tutti i punti stazionari di f e determinarne la natura (massimo, minimo o sella).
- Calcolare massimo e minimo di f nel dominio

$$Q = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \right\}.$$

Esercizio 2

Sia data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y^2}{x+1}.$$

- Determinare esplicitamente l'unica soluzione con dato iniziale $y(0) = 1$.
- Determinare l'insieme di esistenza della soluzione.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = \sin x \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Analisi Matematica II (3 CFU) - Scritto del 19/09/2005
Ingegneria Gestionale — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________________

Matricola:____________________

Esercizio 1

Calcolare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^3 y}-1}{x^2+y^2}.$$

Esercizio 2

Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \frac{\cos x}{\cos^2 x + 1}.$$

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + y = \cos^4 x - \sin^4 x \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Analisi Matematica 2 Ingegneria Gestionale

Docente: B. Rubino

L'Aquila, 2 dicembre 2005

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: __________________________

Prova orale il: _________________

Esercizio 1

Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = (y - \log x)\left(y - \log x^2\right)$$

sull'insieme

$$\mathcal{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x \le e, \ 0 \le y \le 1\right\}.$$

Esercizio 2

Data la funzione $f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2y^2}} & \text{se } \ xy \ne 0 \\ 0 & \text{se } \ xy = 0, \end{cases}$$

a) verificare che le derivate parziali f_x, f_y esistono in ogni punto di $\mathbb{R}^2$;

b) dire, giustificando la risposta, se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 3

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2y - y^2 \\ y(0) = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) Per quali valori di α il problema di Cauchy ammette una sola soluzione?

b) Per quali valori di α il problema di Cauchy ammette soluzioni definite su tutta la retta reale?

Esercizio 4

Scrivere l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti il cui integrale generale in $\mathbb{R}$ è dato da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}$$

Analisi Matematica 2 Ingegneria Gestionale

Docente: B. Rubino

L'Aquila, 16 dicembre 2005

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: __________________________

Prova orale il: _________________

Esercizio 1

Determinare gli eventuali punti di massimo ed minimo relativo della funzione

$$f(x, y) = y^2(y^2 + x^2 - 2x).$$

Esercizio 2

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \left|x - y^3\right| (x^3 - y),$$

dire, giustificando le risposte,

a) in quali punti (x, y) esistono le derivate parziali f_x e f_y;

b) se f è differenziabile nel punto $(2, -2)$;

c) se f è differenziabile nel punto $(0, 0)$.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{x}{1-x^2} y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Scrivere l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti il cui integrale generale in $\mathbb{R}$ è dato da

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^{-x}$$

Analisi Matematica 2 Ingegneria Gestionale

Docente: B. Rubino

L'Aquila, 9 gennaio 2006

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: __________________________

Prova orale il 13 gennaio ore 9:30

Esercizio 1

Determinare gli eventuali punti di estremo relativo e quelli di estremo assoluto per la funzione di due variabili

$$f(x,y) = \exp\left(-\left|\frac{y}{x}\right|\right)$$

Esercizio 2

Data la funzione $f:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{per } x^2+y^2 \neq 0 \\ \\ 0 & \text{per } x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

è continua e se ammette derivate parziali prime.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = e^x + (2e)^x \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - k^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = k, \qquad k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

determinare gli eventuali valori di k in modo che la corrispondente soluzione $y(x)$ del problema renda minimo l'integrale

$$\int_0^1 [y'(x)]^2\, dx.$$

Prova scritta di Analisi Matematica II
Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architetura

L'Aquila, 17 febbraio 2006 – Docente: R. Sampalmieri

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Esercizio 1

Calcolare la massa totale del solido definito da

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, \ 0 \leq z \leq 1\right\}$$

di densità $\rho(x, y, z) = zx$.

Esercizio 2

Dato il sistema autonomo

$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 - 1 \\ \dot{y} = (3x-2)(y-3), \end{cases}$$

classificarne i punti critici.

Esercizio 3

Determinare il valore del parametro k per il quale il campo

$$F(x, y) = \left(x^2 - y^2, kxy\right)$$

risulti conservativo in $\mathbb{R}^2$.
Data la curva

$$\gamma(t) : \begin{cases} x(t) = e^{\sin t} \\ \\ y(t) = \cos t, \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

determinare il lavoro compiuto da F per spostare un punto materiale da $A = (1, 1)$ a $B = (1, -1)$ lungo γ.

Esercizio 4

Studiare le seguenti serie:

a) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^\alpha + 1}$$

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{e^{\frac{1}{n^2}} - 1}{2n}\right)$$

Esercizio 5

Risolvere

$$\begin{cases} y'' - y = e^x \left(x^2 - 1\right) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Prova intermedia di Analisi Matematica II

L'Aquila, 20 febbraio 2006 – Docente: B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Esercizio 1

Sia dato

$$\mathcal{A} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; e^{x^2} - \cos(y) - \sin(z) + \arctan(xyz) = 0\Big\}.$$

- Dimostrare che è possibile, nell'intorno dell'origine, esplicitare su $\mathcal{A}$ una coordinata in funzione delle altre due, in particolare

$$z = \varphi(x,y).$$

- Trovare tale parametrizzazione con un errore $o(x) + o(y)$.
- Trovare tale parametrizzazione con un errore $o(x^2) + o(y^2)$.
- Dimostrare che per la funzione φ l'origine é un punto stazionario e classificarlo.

Esercizio 2

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_{\mathcal{B}} \left(x^2 + y^2\right) dx\ dy$$

dove

$$\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \; x \ge 0, \; y \ge 0\right\}.$$

Esercizio 3

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\; e^{x^2+y^2}$$

definita su

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

- Stabilire dove è continua e dove è prolungabile per continuità.
- Calcolare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto della f su $\mathcal{C}$.

Prova scritta di Analisi Matematica II

Classe delle lauree in Ingegneria Civile e Ambientale

L'Aquila, 7 aprile 2006 – Docente: B. Rubino

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Corso di laurea: ______________________________

Prova orale il ______________________________

Esercizio 1

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - y'' + y' - y = t.$$

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 e^{-t} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

Studiare la serie numerica giustificando nel dettaglio tutte le affermazioni

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{5^n}$$

Esercizio 4

Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluto della funzione di due variabili

$$f(x, y) = \sin(xy) - x + y$$

sul dominio

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1, \ |y| \leq 1\right\}.$$

Esercizio 5

Mediante l'uso della formula di Taylor calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin\left(x^2 + 3y^2\right)}{x^2 + y^2}$$

Esercizio 6

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_{\mathcal{B}} x \cos(xy) dx \ dy$$

dove

$$\mathcal{B} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq 1\right\}.$$

Prova scritta di Analisi Matematica II

Classe delle lauree in Ingegneria Civile e Ambientale

L'Aquila, 24 luglio 2006 – Docente: B. Rubino

Tempo a disposizione: 120 miinuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Corso di laurea: ______________________________

Prova orale il ______________________________

Esercizio 1

Trovare il massimo e minimo della funzione di due variabili

$$f(x, y) = x^2 - y^3$$

sul dominio

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esercizio 2

Mediante l'uso della formula di Taylor calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^x$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale doppio

$$\int_{\mathcal{B}} 2y\left(x-y^2\right)(1+2x)\sin\left(x^2+y^2\right)dx\ dy$$

dove

$$\mathcal{B}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\geq 0,\ y^2\leq x\leq 1+y^2,\ 4\leq x^2+y^2\leq 16\right\}.$$

Esercizio 4

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)}+3y''-4y=e^x+\sin x$$

Esercizio 5

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=e^x\sqrt{y} \\ y(0)=0. \end{cases}$$

Esercizio 6

Giustificando nel dettaglio tutte le affermazioni, studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right)$$

Prova scritta di Analisi Matematica II

Classe delle lauree in Ingegneria Civile e Ambientale

L'Aquila, 5 settembre 2006 – Docente: B. Rubino

Tempo a disposizione: 120 miinuti

Cognome e nome: ____

Matricola: ____

Corso di laurea: ____

Prova orale il ____

Esercizio 1

Trovare il massimo e minimo della funzione di due variabili

$$f(x, y) = x - 2y$$

sul dominio

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x + y| \leq 1, \ |2x - y| \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2

Mediante l'uso della formula di Taylor calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{x + x^2 - \sin(x + x^2)}{2x \arctan(x^2)}$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} (x+y)\, dx\ dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1, \frac{\sqrt{3}}{3} x \leq y \leq \sqrt{3}\, x,\ x \geq 0 \right\}.$$

Esercizio 4

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = e^{-x}$$

Esercizio 5

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x\ (1+y^2)}{1+x^2} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 6

Giustificando nel dettaglio tutte le affermazioni, studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$$

Prova scritta di Analisi Matematica II

Cognome e nome: ________________________________

Matricola: ________________________________

prova orale: ☐ 4 dicembre ☐ 12 dicembre ☐ 9 gennaio

Esercizio 1

Trovare il massimo e minimo della funzione di due variabili

$$f(x,y) = 3x - 12y$$

sul dominio

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x+y| \leq 1, \ |x-y| \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2

Mediante l'uso della formula di Taylor calcolare

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^3 - 6x} + \frac{1}{6 \sin x} \right)$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} (x + 2y) \, dx \, dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}x \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}x, \ x \geq 0 \right\}.$$

Esercizio 4

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 2y'' - 3y = e^{-x}$$

Esercizio 5

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{(1+y^2)}{y(1+x^2)} \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6

Giustificando nel dettaglio tutte le affermazioni, studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$$

Prova scritta di Analisi Matematica II

Cognome e nome: ________________________________

Matricola: ________________________________

prova orale: ☐ 12 dicembre2006 ☐ 9 gennaio 2007

Esercizio 1

Determinare i punti di massimo e minimo vincolato per la funzione

$$f(x,y) = \cos x \ \sin y$$

sul bordo del quadrato chiuso di vertici $(0,0)$, $(\pi,0)$, (π,π), $(0,\pi)$.

Esercizio 2

Mediante l'uso della formula di Taylor calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\sin x)-\sin(1-\cos x)}{1-e^{\sin x}-\sin(1-e^x)}$$

Esercizio 3

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} y \ e^{\frac{3x}{x^2+y^2}}\,dx\ dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 4, \quad x \ge 0,\ y \ge 0\right\}.$$

Esercizio 4

Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4\pi^2 y = 0.$$

Si determini poi la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(1/2) = 1$, $y'(1/2) = 0$.

Esercizio 5

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-1)\sin(t^2) \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 6

Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Analisi Matematica 2

Docente: B. Rubino

L'Aquila, 9 gennaio 2007

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: _________________________

Prova orale il 12 gennaio ore 9

Esercizio 1

Determinare, se esistono, il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(x^2 + y^2\right)$$

sull'insieme

$$\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x+y| \leq 1, \ |x-y| \leq 1\right\}.$$

Esercizio 2

Data la funzione $f : \ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

stabilire dove è continua e differenziabile.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\,(1-y^2) \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Trovare l'integrale generale $y = y(x)$ della seguente equazione differenziale

$$y''' - 3y'' + 2y' = xe^x$$

Esercizio 5

Mediante l'uso della formula di Taylor calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 - \frac{\sin^2 x}{x}\right)^{1/x}$$

Esercizio 6

Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^3(n+3)}\right)$$

Prova intermedia di Analisi Matematica II

Docente: B. Rubino

L'Aquila, 26 febbraio 2007

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Corso di studi: ______________________________

Tempo a disposizione: 75 minuti

Esercizio 1

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

1. si stabilisca in quali punti di $\mathbb{R}^2$ è continua,
2. se ne studi la differenziabilità nell'origine.

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-t}(1+y^2) \\ \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando in particolare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione trovata.

Esercizio 3

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \max(x^2,\ y^2),$$

se ne stabilisca il massimo ed il minimo assoluto sul dominio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x-2y| \leq 1,\ |2x+y| \leq 1\right\}.$$

Correzione prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
del 26/2/07 (prova intermedia) – B. RUBINO

ESERCIZIO 1. La funzione è, fuori dall'origine, rapporto di due funzioni $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e il denominatore si annulla solo nell'origine (dove la funzione è definita però diversamente). Di conseguenza, fuori dall'origine, la f è di classe C^1, per cui continua e differenziabile. Resta perciò da controllare solo l'origine.
Riguardo alla continuità, si tratta di calcolare il

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

passando in coordinate polari, $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & \rho \geq 0 \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta \in [0,2\pi) \end{cases}$

$$= \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2(\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta)}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\left(\cos^2\vartheta - \mathrm{sen}^2\vartheta\right) = 0,$$

in quanto prodotto di una funzione continua e limitata in ϑ per una infinitesima in ρ. Poiché il limite coincide con il valore $f(0,0)$, la funzione è continua.

Per studiare la differenziabilità nell'origine, calcoliamo intanto le derivate parziali in $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|}$$

Tale limite non esiste, poiché $\lim_{t\to 0^-} \frac{t}{|t|} = -1$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{t}{|t|} = 1$.

Poichè se f è differenziabile in P allora f ammette in P tutte le derivate direzionali, possiamo concludere che f NON è differenziabile in $(0,0)$.

ESERCIZIO 2. Si tratta del problema di Cauchy relativo ad un'equazione differenziale del 1° ordine non lineare a variabili separabili. Il secondo membro,
$f(t,y) = e^{-t}(1+y^2)$ è $C^1(\mathbb{R}^2)$ per cui è assicurata esistenza ed unicità locale. Inoltre $f(t,y) > 0 \ \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2$, che equivale a dire che

a) non vi sono soluzioni stazionarie dell'equazione;

b) la soluzione sarà strettamente monotone crescente in tutto l'intervallo massimale di esistenza.

~~Integrando per parti~~ Separando le variabili e integrando si ha

$$\frac{y'(t)}{1+y^2(t)} = e^{-t}$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{dz}{1+z^2} = \int_0^t e^{-s}\,ds$$

$$\operatorname{arctg}(y(t)) = -e^{-t}+1, \quad \text{da cui} \quad -\frac{\pi}{2} < -e^{-t}+1 < \frac{\pi}{2}$$

e, tenuto conto dell'invertibilità della funzione arctg,

$y(t) = \operatorname{tg}(1-e^{-t})$, con $t \in \mathbb{R}$ che soddisfa la disequazione $1-\frac{\pi}{2} < e^{-t} < \frac{\pi}{2}+1$

Poiché $e^{-t}>0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$, la diseguaglianza a sinistra è superflua visto che $1-\frac{\pi}{2}<0$.

Perciò l'intervallo massimale è dato dalle soluzioni della disequazione

$$e^{-t}<\frac{\pi}{2}+1,$$

ovvero

$$-t<\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right), \quad \text{da cui} \quad t>-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

Abbiamo poi

$$\lim_{t\to\left(-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right)^+} tg\left(1-e^{-t}\right)=-\infty, \quad \lim_{t\to\infty} tg\left(1-e^{-t}\right)=tg(1)$$

Abbiamo perciò trovato la soluzione

$$y(t)=tg\left(1-e^{-t}\right)$$

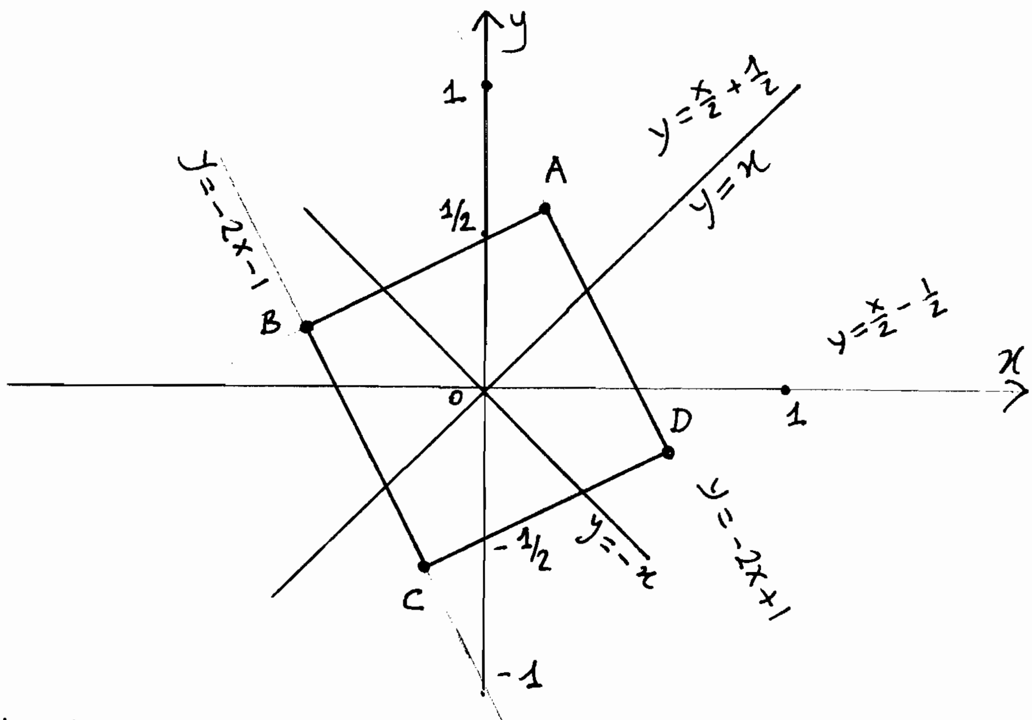
definita nell'intervallo massimale

$$t\in\left(-\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right), +\infty\right)$$

ESERCIZIO 3. Il dominio Ω è quello riportato in figura (un parallelogramma)

Per individuare i valori che assume la funzione $f(x,y)$ si tratta di risolvere intanto la disequazione

$$x^2 \geq y^2 \quad \text{ovvero} \quad x^2 - y^2 \geq 0, \quad (x-y)(x+y) \geq 0$$



Riportando perciò le rette $x-y=0$ e $x+y=0$ si individuano quattro regioni in $\mathbb{R}^2$:

a) la zona I, contenente il semiasse positivo delle x, dove $f(x,y) = x^2$;

b) la zona II, contenente il semiasse positivo delle y, dove $f(x,y) = y^2$;

c) la zona III, contenente il semiasse negativo delle x, dove $f(x,y) = x^2$;

d) la zona IV, contenente il semiasse negativo delle y, dove $f(x,y) = y^2$.

Per ognuna delle quattro zone il minimo è nell'origine (unico punto comune alle quattro zone) dove la f vale zero.
Perciò il minimo assoluto della funzione è in $O=(0,0)$ dove $f(0,0)=0$.
Per quanto riguarda il massimo assoluto, per ognuna delle quattro zone si ha:

a) nella zona I il massimo assoluto è in D e corrisponde all'ascissa del punto D al quadrato;

b) nella zona II il massimo assoluto è in A e corrisponde all'ordinata del punto A al quadrato;

c) nella zona III il massimo assoluto è in B e corrisponde all'ascissa del punto B al quadrato;

d) nella zona IV il massimo assoluto è in C e corrisponde all'ordinata del punto C al quadrato.

Poichè Ω è un quadrato, i quattro valori prima nominati, per ragioni di simmetria, sono uguali fra loro, come si evince dal disegno. Determiniamo le coordinate del punto D (e quindi degli altri punti).

$$\begin{cases} y = -2x+1 \\ y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x+1 \\ \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = -2x+1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(\frac{1}{2}+2\right) = 1+\frac{1}{2} \\ y = -2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{5} = \frac{3}{5} \\ y = -2\,\frac{3}{5}+1 = -\frac{1}{5} \end{cases} \qquad D = \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right), \text{ da cui}$$

$$\max_{\Omega} f = f(D) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \qquad \min_{\Omega} f = f(0,0) = 0.$$

Analisi Matematica II

Corso di Laurea in Ingegneria Agroindustriale

Scritto del 19 marzo 2007

Durata della prova: 150 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: ☐ 19 marzo ☐ 26 marzo ☐ 3 aprile

Esercizio 1

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

1. si stabilisca in quali punti di $\mathbb{R}^2$ è continua,
2. se ne studi la differenziabilità nell'origine.

Esercizio 2

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = x^2 + y^2,$$

se ne stabilisca il massimo ed il minimo assoluto sul dominio

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x-2y| \leq 1, \ |2x+y| \leq 1 \right\}.$$

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t(1+y^2) \\ \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

determinando in particolare l'intervallo massimale di esistenza per la soluzione trovata.

Esercizio 4

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(x^2 + y^2\right)^2 dx\ dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x,\ y \leq \sqrt{3}\, x,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}.$$

Esercizio 5

Dato il sistema

$$\begin{cases} x + x^3 + \log(1 + y + z) = 0 \\ x + z^3 - \log(1 + y - z) = 0, \end{cases}$$

dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare (x, y) in funzione della z e nel caso affermativo trovare tale esplicitazione a meno di $o(z^3)$.

Esercizio 6

Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{n(n+1)}{(n+2)^3(n+4)}\right)$$

Analisi Matematica II

Prof. Bruno Rubino

Prova scritta del 20 marzo 2007

Durata della prova: 150 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: □ 26 marzo □ 3 aprile

Esercizio 1

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_{\mathcal{D}} \left(x^2+y^2\right)^2 dx\ dy,$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq x,\ y \leq \sqrt{3}\, x,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\right\}.$$

Esercizio 2

Dato il sistema

$$\begin{cases} x + xz^3 + \log(1+y+z) = 0 \\ x + x^3 - \log(1+y-z) = 0, \end{cases}$$

dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare (x,y) in funzione della z e nel caso affermativo trovare tale esplicitazione a meno di $o(z^3)$.

Esercizio 3

Studiare la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{n(n+1)}{(n+2)^3(n+4)}\right)$$

Esercizio 4

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

1. si stabilisca in quali punti di $\mathbb{R}^2$ è continua,
2. se ne studi la differenziabilità nell'origine.

Esercizio 5

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2,$$

se ne stabilisca il massimo ed il minimo assoluto sul dominio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Esercizio 6

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-1)(y-3)t \\ \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

In particolare si motivi il perché esiste un'unica soluzione del problema e se ne riporti sul piano (t, y) un grafico approssimativo.

Analisi Matematica II

Prof. Bruno Rubino

Prova scritta del 3 aprile 2007

Durata della prova: 150 minuti

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

prova orale: 11 aprile ore 12

Esercizio 1

Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = x - y + \log|x+y|,$$

se ne stabilisca il massimo ed il minimo assoluto sul dominio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le |x+y| \le 2, \ 1 \le |x-y| \le 2\right\}.$$

Esercizio 2

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 14y'' + y' = 1 + t.$$

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = te^{-t^2}\sqrt{y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Dato il luogo di zeri
$$\cos(x+y) - e^{(x-y)} = 0,$$
dire se in un intorno dell'origine è possibile esplicitare y in funzione della x e nel caso affermativo trovare tale esplicitazione a meno di $o(x^3)$.

Esercizio 5

Dopo averlo disegnato, calcolare il volume del solido
$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y,x) \in \mathbb{R}^3 : \; -\sqrt{1-4x^2-4y^2} \leq z \leq \sqrt{\frac{1}{4} - x^2 - y^2} \right\}.$$

Esercizio 6

Studiare la serie numerica
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n) \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$