Equazioni Differenziali e Analisi Matematica 3

per le Facoltà di Ingegneria

Richiami di teoria ed Esercizi

Corrado Lattanzio e Bruno Rubino

Versione preliminare

L'Aquila, ottobre 2004

Indice

1 Funzioni Implicite

Esercizio 1.1 *Sia dato il sistema*

$$\begin{cases} \sin(xy) + \cos(z) + \tan(x - z) = 1 \\ \log(1 + y + z) + \arctan(xy) = 0. \end{cases}$$

- *Dimostrare che in un intorno di* $(0, 0, 0)$ *si possono esplicitare due coordinate in funzione della terza, in particolare*

$$\begin{cases} x = x\,(z) \\ y = y\,(z) \end{cases}$$

- *Trovare tale parametrizzazione con un errore* $o\,(z)$.

- *Trovare tale parametrizzazione con un errore* $o\,(z^2)$.

Risoluzione. Sviluppando con Taylor in un intorno dell'origine si ha

$$\begin{cases} xy + o((xy)^2) + 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^3) + x - z + o((x - z)^2) = 1 \\ y + z - \frac{1}{2}(y + z)^2 + o((y + z)^2) + xy + o(xy) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

da cui al prim'ordine si ha

$$\begin{cases} x = z + o(x) + o(z) \\ y = -z + o(z) + o(x) + o(y) \end{cases}$$

da cui passando agli infinitesimi $o(x) = o(y) = o(z)$ e quindi

$$\begin{cases} x = z + o(z) \\ y = -z + o(z) \end{cases} \tag{1.2}$$

che è lo sviluppo al prim'ordine cercato. Sostituendo opportunamente lo sviluppo (1.2) nella (1.1) si ha

$$\begin{cases} x = z - z^2 + o(z^2) - \frac{z^2}{2} = z - \frac{3}{2}z^2 + o(z^2) \\ y = -z + o(z^2) - z^2 = -z - z^2 + o(z^2) \end{cases}$$

che è lo sviluppo al second'ordine cercato. ■

Esercizio 1.2 *Data l'equazione*

$$1 - \cos(y^2 + x) + \sin(y + x^2) = 0,$$

- *dimostrare che definisce implicitamente una e una sola funzione* $y = \phi(x)$ *in un intorno di* $(x, y) = (0, 0)$.
- *Trovare lo sviluppo di Taylor di* $y = \phi(x)$ *nell'origine con un errore* $o\,(x^3)$.
- *Dimostrare che* $y = \phi(x)$ *ha un massimo locale in* $x = 0$.

Risoluzione. Sviluppando le funzioni seno e coseno si ha:

$$1 - 1 + \frac{1}{2}(y^2 + x^2)^2 + o((y^2 + x)^3) + y + x^2 + o((y + x^2)^2) = 0,$$

$$o(y^2) + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + y + x^2 = 0,$$

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^3) + o(y^2) \tag{1.3}$$

da cui $o(y) = o(x^2)$ (ed anche $o(y^2) = o(x^4)$) e sostituendo nella (1.3) si ha

$$y = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)$$

che è lo sviluppo al terz'ordine cercato.
La funzione $y = \phi(x) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^3)$ verfica allora $\phi'(0) = 0$, $\phi''(0) = -3 < 0$, per cui l'origine è un punto di massimo locale per ϕ. ■

Esercizio 1.3 *Sia dato*

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \log(1 + \sin x) + (x - 1)^2 + xy = 1 + z,$$
$$(x + y + 1)^2 + \log(1 + x + z) = 1\}\,.$$

- *Dimostrare che in un intorno di* $(0,0,0)$ *si possono esplicitare su* $\mathcal{C}$ *due coordinate in funzione della terza, e precisamente*

$$\begin{cases} y = y\,(x) \\ z = z\,(x) \end{cases}$$

- *Trovare tale parametrizzazione con un errore* $o\,(x^2)$*.*

- *Trovare tale parametrizzazione con un errore* $o\,(x^4)$*.*

Risoluzione. Consideriamo il sistema non lineare

$$\begin{cases} \log(1+\sin x) + (x-1)^2 + xy = 1+z \\ (x+y+1)^2 + \log(1+x+z) = 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Sviluppando con Taylor al prim'ordine intorno all'origine si ha

$$\begin{cases} 1 + x - 2x + o(x) = 1 + z \\ 1 + 2x + 2y + x + z + o(x) + o(y) + o(z) = 1 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} z = -x + o(x) \\ 2y = 3x + z + o(x) + o(y) + o(z) = 0 \end{cases}$$

e sostituendo la prima nella seconda si ha

$$\begin{cases} z = -x + o(x) \\ y = -x + o(x) \end{cases}$$

da cui $o(y) = o(x) = o(z)$ e di conseguenza $o(y^n) = o(x^n) = o(z^n)$ per $n \in \mathbb{N}$. Sviluppiamo ora il sistema (1.4) al secondo ordine

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) + x^2 - 2x + 1 + xy = 1 + z \\ x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y + 2xy + x + z - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}z^2 - xz + o(x^2) = 1 \end{cases}$$

e facendo uso degli sviluppi al prim'ordine

$$\begin{cases} \begin{aligned} z = {} & -x + \tfrac{1}{2}x^2 - x^2 + o(x^2) \\ 2y = {} & -3x - z - \tfrac{1}{2}x^2 - y^2 + \tfrac{1}{2}z^2 - 2xy + xz + o(x^2) = \\ & -2x - \tfrac{1}{2}x^2 - x^2 + \tfrac{1}{2}x^2 + 2x^2 - x^2 + o(x^2) \end{aligned} \end{cases}$$

che dà luogo allo sviluppo al second'ordine

$$\begin{cases} z = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\ y = -x + o(x^2) \end{cases} \tag{1.5}$$

Al fine di sviluppanre ora il sistema (1.4) al quarto ordine, ricaviamoci gli sviluppi dei singoli pezzi:

$$\begin{aligned} \log(1+\sin x) &= \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{4}\sin^4 x + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(1+x+z) &= x + z - \frac{1}{2}(x+z)^2 + \frac{1}{3}(x+z)^3 - \frac{1}{4}(x+z)^4 + o((x+z)^4) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Risulta allora

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) + x^2 - 2x + 1 + xy = 1 + z \\ x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y + 2xy + o(x^4) - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} z = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + xy + o(x^4) \\ 2y = -2x - 2xy - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - y^2 + o(x^4) \end{cases} \tag{1.6}$$

e facendo uso dello sviluppo al second'ordine (1.5) si ottiene

$$\begin{cases} z = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + o(x^3) = -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ y = -x + x^2 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - x^2 = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{cases}$$

e usando tale sviluppo all'interno dello sviluppo del quart'ordine (1.6),

$$\begin{cases} z = -x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^4) \\ y = -x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4) \end{cases}$$

e semplificando si ottiene

$$\begin{cases} z = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \\ y = -x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{16}x^4 + o(x^4) \end{cases}$$

che è lo sviluppo al quart'ordine cercato. ■

Esercizio 1.4 *Provare che l'equazione*

$$4z - \left(x^2 + 3y^2\right) 2^z = 8$$

definisce in forma implicita una ed una sola funzione $z = \phi(x, y)$ *in un intorno di* $Q = (0, 0, 2)$. *Provare inoltre che* ϕ *ha un minimo locale in* $P = (0, 0)$.

Esercizio 1.5 *Sia dato il sistema non lineare nelle variabili* (x, y, u, v)

$$\begin{cases} \sin(x + u) + \tan(y^2 + v) + (u - v)^2 = 0 \\ \arctan(x - y^2) + \log(u^2 + x + 1) = 0. \end{cases}$$

Verificare che è possibile eplicitare nell'intorno di $(0, 0, 0, 0)$ *due variabili in funzione delle altre due fornendone uno sviluppo al second'ordine.*

Esercizio 1.6 *Sia dato il sistema non lineare nelle variabili* (x, y, u, v)

$$\begin{cases} \sin(x + u) + \tan(y^2 + v) + (u - v)^2 = 0 \\ \arctan(x - y^2) + \log(u^2 + x + 1) = 0 \\ \cos(x + y + u + v) - e^{x+v}. \end{cases}$$

Verificare che è possibile eplicitare nell'intorno di $(0, 0, 0, 0)$ *tre variabili in funzione della quarta fornendone uno sviluppo al second'ordine.*

Esercizio 1.7 *Siano* $\mathcal{C}_1$ *e* $\mathcal{C}_2$ *i cilindri dati da*

$$\mathcal{C}_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = \rho^2\right\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 + y^2 = \sigma^2\right\}$$

con $0 < \rho \leq \sigma$ *e sia* $\Gamma = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

- *Dire se* $\forall P \in \Gamma$ *è possibile, in un intorno di* P, *esplicitare su* Γ *due variabili in fuinzione della terza nel caso* $\rho < \sigma$.
- *Studiare il caso* $\rho = \sigma$.