ESERCIZIO 1 — Sia dato il campo vettoriale

$$F(x,y,z)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}-\frac{z}{x^2+z^2},\ \frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+z^2}\right)$$

a) Determinarne il dominio di definizione Ω e dire se $F\in C^1(\Omega)$.

b) F è irrotazionale?

c) F è conservativo su Ω?

d) E' possibile determinare un potenziale definito su tutto Ω?

Risoluzione

a) Risulta $$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\neq 0,\ x^2+z^2\neq 0\}$$

che corrisponde a tutto $\mathbb{R}^3$ escluso l'asse delle z e quello delle y. Sono perciò due rette che si intersecano in un punto (l'origine, dove le due rette sono ortogonali).

Si tratta di un dominio NON SEMPLICEMENTE CONNESSO, oltre alla classe di omotopia banale (le curve che si possono ridurre ad un punto), ve ne sono altre SEI; per esempio i rappresentanti di tali classi di omotopia possono essere

$$\gamma_1:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\operatorname{sen}\vartheta\\ z=1\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi) \qquad \gamma_2:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\operatorname{sen}\vartheta\\ z=-1\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi)$$

$$\gamma_3:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=+1\\ z=\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi) \qquad \gamma_4:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=-1\\ z=\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi)$$

$$\gamma_5:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\\ z=\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi) \qquad \gamma_6:\begin{cases}x=\cos\vartheta\\ y=\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\\ z=-\frac{\sqrt2}{2}\operatorname{sen}\vartheta\end{cases}\quad \vartheta\in[0,2\pi).$$

b) Si tratta di calcolare il rotore di F.

$$\operatorname{rot} F = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2}-\dfrac{z}{x^2+z^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+z^2} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(0, -\partial_x\left(\frac{x}{x^2+z^2}\right) - \partial_z\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{z}{x^2+z^2}\right), \partial_x \frac{x}{x^2+y^2} + \right.$$

$$\left. + \partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{z}{x^2+z^2}\right)\right) =$$

$$= \left(0, \frac{-(x^2+z^2)+2x^2}{(x^2+z^2)^2} - \frac{(x^2+z^2)-2z^2}{(x^2+z^2)^2}, \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = \left(0, \frac{+x^2-z^2-x^2+z^2}{(x^2+z^2)^2}, \frac{-x^2+y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) = 0$$

Il campo è dunque irrotazionale.

c) Poichè F è irrotazionale, per verificare se è conservativo su Ω bisogna solo verificare che la circuitazione su ognuna delle curve chiuse γ_k, $k=1,\dots,6$ del punto a) deve risultare zero. In realtà non servirà calcolare il lavoro su γ_5 e γ_6 in quanto tale lavoro è pari alla somma del lavoro su due delle precedenti.

Su γ_1 risulta

$$\oint_{\gamma_1} \langle F, T\rangle \, ds = \int_0^{2\pi} \left[\left(-\operatorname{sen}\vartheta - \frac{1}{1+\cos^2\vartheta}\right)(-\operatorname{sen}\vartheta) + \cos\vartheta \cdot \cos\vartheta \right.$$

$$\left. + \frac{\cos\vartheta}{1+\cos^2\vartheta}\cdot 0\right] d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\operatorname{sen}^2\vartheta + \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{1+\cos^2\vartheta} + \cos^2\vartheta \right) d\vartheta = 2\pi + \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{1+\cos^2\vartheta}\, d\vartheta$$

$$= 2\pi - \operatorname{arctg}(\cos\vartheta) \Big|_{\vartheta=0}^{\vartheta=2\pi} = 2\pi \neq 0$$

Di conseguenza F non è conservativo su Ω.

d) No, visto che F non è conservativo su Ω.

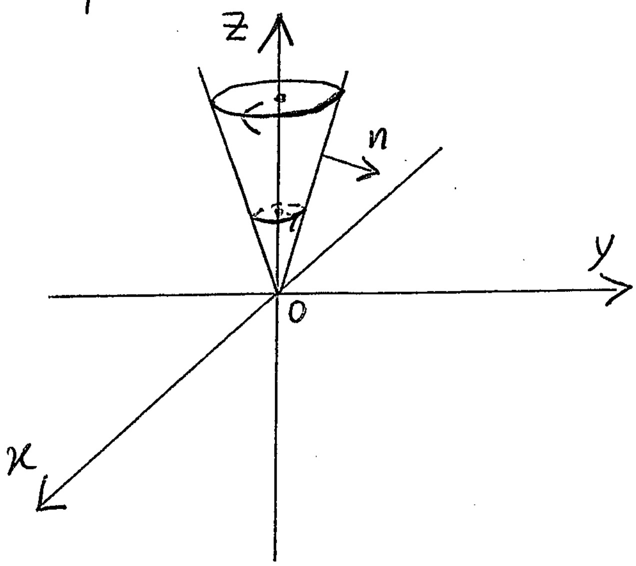
ESERCIZIO 2 – Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (-xy, -yz, -xz)$$

e la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2},\ 1 \leq z \leq 4\right\}$$

orientata in modo che la terza componente del versore normale sia negativa.



RISOLUZIONE

La superficie è quella (laterale) di un tronco di cono. Parametrizziamola:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta & 1 \leq \rho \leq 4 \\ z = \rho & -\pi \leq \vartheta < \pi \end{cases}$$

Risulta poi

$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -xy & -yz & -xz \end{pmatrix} = (+y, +z, x)$$

La formula da verificare è

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle \, d\sigma = \int_{+\partial S} \langle F, T \rangle \, ds$$

Calcoliamo il vettore normale ad S:

$$\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\vartheta & \operatorname{sen}\vartheta & 1 \\ -\rho\operatorname{sen}\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix} = (-\rho\cos\vartheta, -\rho\operatorname{sen}\vartheta, \rho)$$

La terza componente in tal modo sarebbe positiva: ci serve il vettore con verso opposto.

Per il primo membro si ha

$$\iint_S \langle \operatorname{rot} F, n \rangle \, d\sigma = \int_1^4\int_{-\pi}^{\pi} \langle (\rho\operatorname{sen}\vartheta, \rho, \rho\cos\vartheta), (\rho\cos\vartheta, \rho\operatorname{sen}\vartheta, -\rho) \rangle$$

$$= \int_1^4\int_{-\pi}^{\pi} (\rho^2\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta + \rho^2\operatorname{sen}\vartheta - \rho^2\cos\vartheta)\, d\rho\, d\vartheta = 0$$

visto che $\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta$, $\operatorname{sen}\vartheta$, $\cos\vartheta$ sono tutte periodiche a media nulla.

Per quanto riguarda il bordo lo si parametrizza come

$$\gamma_1: \begin{cases} x = 4\cos\vartheta \\ y = 4\operatorname{sen}\vartheta \quad -\pi \le \vartheta \le \pi \\ z = 4 \end{cases}$$

che gira però in senso opposto rispetto a quanto ci serve per il bordo $+\partial S$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \operatorname{sen}\vartheta \quad -\pi \le \vartheta \le \pi \\ z = 1 \end{cases}$$

che gira nel senso che ci serve per il bordo $+\partial S$.

Si ha

$$\int_{+\partial S} \langle F,T\rangle \, ds = \int_{-\gamma_1} \langle F,T\rangle \, ds + \int_{\gamma_2} \langle F,T\rangle \, ds =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \langle(-16 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta, -16\operatorname{sen}\vartheta, -16\cos\vartheta),(-4\operatorname{sen}\vartheta, 4\cos\vartheta, 0)\rangle \, d\vartheta$$

$$+\int_0^{2\pi}\langle(-\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta, -\operatorname{sen}\vartheta, -\cos\vartheta),(-\operatorname{sen}\vartheta,\cos\vartheta,0)\rangle \, d\vartheta$$

$$= -\int_0^{2\pi} +(64 \operatorname{sen}^2\vartheta\cos\vartheta + 64\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) \, d\vartheta +$$

$$+\int_0^{2\pi}(\operatorname{sen}^2\vartheta\cos\vartheta+\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta) \, d\vartheta = 0$$

La verifica è conclusa.

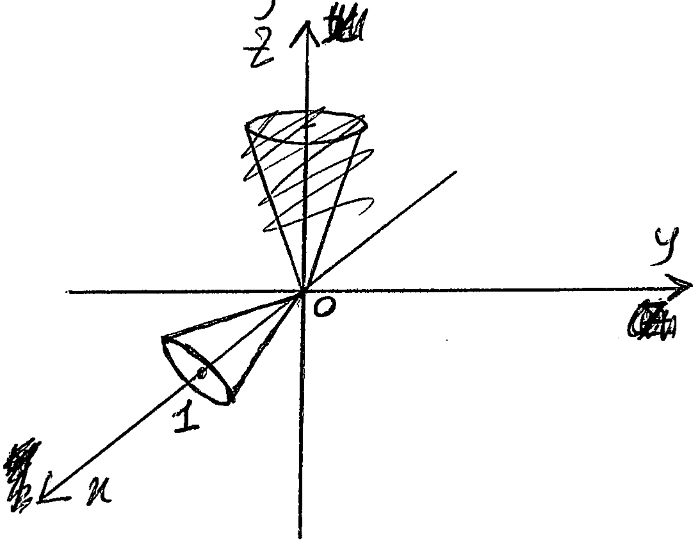
ESERCIZIO (16 dicembre 2005)

Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left((x-1)^2, -2xy, 2z\right)$$

e l'insieme

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2+z^2 \leq x^2,\ 0 \leq x \leq 1\right\}$$



RISOLUZIONE

Si tratta di un cono con asse quello delle x. Ci interessa il tratto tra $[0,1]$.
Si tratta di verificare la formula

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle \, d\sigma$$

Si ha

$\operatorname{div} F = 2(x-1) - 2x + 2 = 0$, per cui il campo è a divergenza nulla. Il primo membro della formula da verificare è banalmente nullo.
Per quanto riguarda il secondo membro, la superficie è divisa in due parti, $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$, dove

$$\cancel{S_1 \begin{cases} x=1 \\ y=\rho\cos\vartheta \\ z=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \quad 0\leq\rho\leq 1,\ -\pi\leq\vartheta\leq\pi \quad n_e=(1,0,0)}$$

S_1 è il cerchio di raggio 1 perpendicolare all'asse delle x nel punto $x=1$ e con centro in tale punto: si ha ~~$\langle F, n_e\rangle \equiv 0$~~

$F_{|S_1} = (0, -2y, 2z)$, $n_e = (1,0,0)$ e $\langle F, n_e \rangle \equiv 0$.

Infine la superficie S_2 è data da

$$\begin{cases} x = \rho \\ y = \rho \cos \vartheta \\ z = \rho \,\text{sen}\, \vartheta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \vartheta \le 2\pi \end{array}$$

Per determinare il vettore normale calcolo

$$\det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -\rho \,\text{sen}\, \vartheta & \rho \cos \vartheta \\ 1 & \cos \vartheta & \text{sen}\, \vartheta \end{pmatrix} = (-\rho, \rho \cos \vartheta, \rho \,\text{sen}\, \vartheta)$$

La componente x è negativa, come è corretto che sia per il vettore uscente dalla superficie laterale del cono.

Risulta

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \langle ((\rho-1)^2, -2\rho^2 \cos\vartheta, +2\rho \,\text{sen}\, \vartheta), (-\rho, \rho\cos\vartheta, \rho \,\text{sen}\, \vartheta) \rangle \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-\rho(\rho-1)^2 - 2\rho^3 \cos^2\vartheta + 2\rho^2 \,\text{sen}^2 \vartheta \right) d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_0^1 2\pi(-\rho^3 + 2\rho^2 - \rho) - 2\pi\rho^3 + 2\pi\rho^2 \, d\rho =$$

$$= 2\pi\left(-\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) = 2\pi(1-1) = 0$$

e la verifica è compiuta