# RISOLUZIONE 4° ESONERO

~~[illegible]~~ Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore. Il problema è ben posto.

Cerchiamo una soluzione per separazione di variabili:

$$u(x,t) = \varphi(x)\,\psi(t) \qquad (1)$$

che sostituita nell'equazione dà

$$\varphi(x)\,\psi'(t) = 3\,\varphi''(x)\,\psi(t)$$

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 3\,\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -3\lambda\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

da cui

$$\psi' + 3\lambda\psi = 0 \qquad (2)$$

$$\varphi'' + \lambda\varphi = 0 \qquad (3)$$

Sostituendo poi la (1) nelle condizioni di Dirichlet si ha $\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0 \quad \forall t > 0$,

da cui $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \qquad (4)$

Mettendo insieme (3) e (4), si ha

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\mu^2 + \lambda = 0$. Si tratta di distinguere tre casi.

1. $\boxed{\lambda < 0}$ In tal caso $\mu^2 = -\lambda > 0$, $\mu = \mp\sqrt{-\lambda}$

$$\varphi(x) = a\, e^{-\sqrt{-\lambda}\, x} + b\, e^{\sqrt{-\lambda}\, x}$$

e imponendo i dati al bordo

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = a + b \\ 0 = \varphi(\pi) = a\, e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} + b\, e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi} \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -a \\ a\underbrace{\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\,\pi} - e^{\sqrt{-\lambda}\,\pi}\right)}_{\neq 0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$ Non vi sono, pertanto, autovalori $\lambda < 0$.

2. $\boxed{\lambda = 0}$ $\mu^2 = 0$, $\mu = 0$ con molt. 2

$$\varphi(x) = a + bx$$

e imponendo i dati al bordo

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = a \\ 0 = \varphi(\pi) = a + b\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$ per cui $\lambda = 0$ non è autovalore.

3. $\boxed{\lambda > 0}$ $\mu^2 = -\lambda < 0$, $\mu = \mp i\sqrt{\lambda}$

$$\varphi(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\, x)$$

$$\begin{cases} 0 = \varphi(0) = a \\ 0 = \varphi(\pi) = a\cos(\sqrt{\lambda}\,\pi) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b\,\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \end{cases}$$ Pertanto potremo avere autosoluzioni solo se $\mathrm{sen}(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0$

ovvero se $\sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$

ovvero $\lambda_K = K^2$, $K \in \mathbb{N}$, $K \geq 1$ sono autovalori corrispondenti alle autosoluzioni

$$\varphi_K(x) = b_K \operatorname{sen}(Kx)$$

Si tratta ora di risolvere la (2) per gli autovalori or ora trovati

$$\psi' + 3K^2\psi = 0$$

$$\psi(t) = \alpha_K e^{-3K^2 t}$$

Tornando alla (1), per sovrapposizione si ha quindi

$$u(x,t) = \sum_{K=1}^{\infty} \alpha_K b_K e^{-3K^2 t} \operatorname{sen}(Kx),$$

da cui raccogliendo le due costanti in una si ha:

$$u(x,t) = \sum_{K=1}^{\infty} B_K e^{-3K^2 t} \operatorname{sen}(Kx) \qquad (5)$$

Imponiamo ora il dato di Cauchy:

$$5x = u(x,0) = \sum_{K=1}^{\infty} B_K \operatorname{sen}(Kx) \qquad \text{per } x \in [0,\pi]$$

Poiché il secondo membro è una serie di Fourier dispari, anche $5x$ va estesa dispari su tutto $[-\pi,\pi]$:

$$5x = \sum_{K=1}^{\infty} B_K \operatorname{sen}(Kx), \qquad x \in [-\pi,\pi]$$

Proiettiamo su $\operatorname{sen}(hx)$, $h \in \mathbb{N}$, $h \geq 1$ ottenendo

$$\int_{-\pi}^{\pi} 5x \operatorname{sen}(hx)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(hx)\,dx$$

da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} 5x \operatorname{sen}(hx)\,dx = B_h\,\pi, \quad \text{ovvero}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 5x \operatorname{sen}(kx)\,dx = \frac{10}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \operatorname{sen}(kx)\,dx \qquad (6)$$

D'altra parte si ha

$$\int x \operatorname{sen}(kx)\,dx = x\,\frac{\cos(kx)}{-k} - \int 1\cdot\frac{\cos(kx)}{-k}\,dx =$$

$$= -\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{1}{k}\,\frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} + \text{costante}$$

da cui, tornando alla (6) si ha:

$$B_k = \frac{10}{\pi}\left(-\frac{x}{k}\cos(kx) + \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k^2}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{10}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi)\right) = (-1)^{k+1}\,\frac{10}{k}$$

e sostituendo infine in (5) si ha

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{10}{k}\,e^{-3k^2t}\operatorname{sen}(kx)$$