Sezione di Matematica per l'Ingegneria

del Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

Università degli Studi di L'Aquila

L'Aquila, 18/2/06
P.le E. Pontieri, 2 - 67040 Monteluco di Roio
Tel: 0862 434702 Fax: 0862 434703

Per gli studenti di ANALISI MATEMATICA II

Mi scuso per non aver inserito questi appunti prima.
Contavo di trovarne una copia (che esiste!) più ordinata, ma, ahimè!, non è venuta fuori.
Vi consiglio di non stamparli, usateli direttamente sul computer, se li trovo vi metto almeno una copia più leggibile (questa è pure fotocopiata male!)

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1997/98
Analisi Matematica II (dott. Bruno Rubino)

L'Aquila, 16 Gennaio 1998 **Recupero parziali**

Durata della prova: **30 minuti per parziale da recuperare**

Recupero del Parziale n. 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f = \begin{cases} f_1(x, y) = x - y \\ f_2(x, y) = x + y, \end{cases}$$

$$g(x, y) = xy \exp\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right).$$

Calcolare la funzione composta $F = g \circ f$. Calcolare poi le derivate prime di F, sia direttamente che utilizzando il teorema di differenziazione delle funzioni composte.

Recupero del Parziale n. 2

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y, z) = \begin{cases} xyz \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y, z) \neq (0, 0, z),\ z \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare, se esistono, $\max_{\mathcal{A}} f$ e $\min_{\mathcal{A}} f$, dove $\mathcal{A} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq e^{-z^2}\right\}$.

Recupero del Parziale n. 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = [n \sin(nx)]\, y + n^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema ammette un'unica soluzione y_n, e indicare l'intervallo massimale di esistenza con I_n.

- Dopo aver indicato con I l'intersezione tra i vari intervalli I_n, calcolare, se ciò ha senso, il

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) \qquad (x \in I).$$

Recupero del Parziale n. 4

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|\sin(u-1)|} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- Verificare che per tale problema c'è esistenza globale ma non unicità di soluzione.
- Dimostrare l'esistenza di una soluzione non limitata e tracciarne un grafico approssimativo.

Recupero del Parziale n. 5

Sia dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = \arctan x. \end{cases}$$

- Facendo uso del Teorema di linearizzazione, si stabilisca la natura dell'origine.
- Dopo aver indagato sull'esistenza di un integrale primo, disegnare approssimativamente le orbite del sistema.
- Facendo uso del punto precedente, si stabilisca la natura dei punti critici diversi dall'origine.

Recupero del Parziale n. 6

Calcolare il volume del dominio

$$\mathcal{T} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 + 3 \le 4\sqrt{x^2+y^2} \right\}.$$

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1997/98
Analisi Matematica II (dott. Bruno Rubino)

L'Aquila, 16 Gennaio 1998 **Recupero parziali**

Durata della prova: **30 minuti per parziale da recuperare**

Recupero del Parziale n. 1

Si considerino le seguenti funzioni:

$$f = \begin{cases} f_1(x,y) = x - y \\ f_2(x,y) = x + y, \end{cases}$$

$$g(x,y) = xy \exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right).$$

Calcolare la funzione composta $F = g \circ f$. Calcolare poi le derivate prime di F, sia direttamente che utilizzando il teorema di differenziazione delle funzioni composte.

Recupero del Parziale n. 2

Sia data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) = \begin{cases} xyz\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y,z) \neq (0,0,z),\ z \in \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Calcolare, se esistono, $\max_{\mathcal{A}} f$ e $\min_{\mathcal{A}} f$, dove $\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2 \leq e^{-z^2}\right\}$.

Recupero del Parziale n. 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = [n\sin(nx)]\, y + n^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema ammette un'unica soluzione y_n, e indicare l'intervallo massimale di esistenza con I_n.

- Dopo aver indicato con I l'intersezione tra i vari intervalli I_n, calcolare, se ciò ha senso, il

$$\lim_{n\to+\infty} y_n(x) \qquad (x \in I).$$

Recupero del Parziale n. 4

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{|\sin(u-1)|} \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

- Verificare che per tale problema c'è esistenza globale ma non unicità di soluzione.
- Dimostrare l'esistenza di una soluzione non limitata e tracciarne un grafico approssimativo.

Recupero del Parziale n. 5

Sia dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = \arctan x. \end{cases}$$

- Facendo uso del Teorema di linearizzazione, si stabilisca la natura dell'origine.
- Dopo aver indagato sull'esistenza di un integrale primo, disegnare approssimativamente le orbite del sistema.
- Facendo uso del punto precedente, si stabilisca la natura dei punti critici diversi dall'origine.

Recupero del Parziale n. 6

Calcolare il volume del dominio

$$\mathcal{T} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2+3 \le 4\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

A.A. '97/98 - ANALISI MATEMATICA II - CdL in MATEMATICA

RECUPERO PARZIALI del 16/1/98

N°1

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$F = g \circ f$

$$F(x,y) = (x-y)(x+y)\exp\left(\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{2}\right) = (x^2-y^2)\exp(x^2+y^2)$$

Quindi direttamente si ha

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (2x+(x^2-y^2)2x)\exp(x^2+y^2) = 2x(1+x^2-y^2)\exp(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (-2y+(x^2-y^2)2y)\exp(x^2+y^2) = 2y(x^2-y^2-1)\exp(x^2+y^2)$$

D'altra parte si ha

$$\nabla F = \nabla g \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \nabla g \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & +1 \end{pmatrix}$$

risulta

$$g_x(x,y) = y(1+x^2)\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$g_y(x,y) = x(1+y^2)\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

e cui

$$g_x(x-y, x+y) = (x-y)(1+(x+y)^2)\exp(x^2+y^2)$$

$$g_y(x-y, x+y) = (x+y)(1+(x-y)^2)\exp(x^2+y^2)$$

e perciò

~~$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right.$~~

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x-y,x+y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x-y,x+y), -\frac{\partial g}{\partial x}(x-y,x+y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x-y,x+y)\right)$$

$$= \Big(\{(x+y)+(x-y)+(x+y)(x-y)^2+(x-y)(x+y)^2\}\exp(x^2+y^2), \{-(x+y)+(x-y)+$$
$$-(x+y)(x-y)^2+(x-y)(x+y)^2\}\exp(x^2+y^2)\Big) =$$

$$= \left(2x(1+x^2-y^2)\exp(x^2+y^2), 2y(x^2-y^2-1)\exp(x^2+y^2)\right)$$

e la verifica è compiuta.

—/—

$\boxed{N^\circ 2}$

Si osservi, intanto, che la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}^3$: infatti, passando in coordinate cilindriche,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \\ z = t \end{cases}$$

si ha $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y,z) = \lim_{\rho\to 0^+} \rho^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\, t \log\rho^2 = 0$

Cerchiamo tutti i punti stazionari interni ad A:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = xy\log(x^2+y^2) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = yz\log(x^2+y^2) + xyz\,\frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = xz\log(x^2+y^2) + xyz\,\frac{2y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

In tutti questi punti, come si deduce dalla prima equazione, la funzione f vale in ogni caso zero.

All'interno del nostro insieme A all'infinito ci si arriva solo per $|z| \to +\infty$ e il limite è 0. Per simmetria è poi ovvio che $-\min_A f = -\max_A f$

L'unica possibilità per raggiungere max e min è ormai soltanto sulla frontiera.

Usando le coordinate cilindriche la funzione è

$$\tilde{f}(\rho, \vartheta, t) = t\rho^2 \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \log \rho^2$$

e la condizione sul bordo è $\rho^2 = e^{-t^2}$, da cui sostituendo si ha

$$\tilde{f}\left((e^{-t^2})^{1/2}, \vartheta, t\right) = -\operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \cdot t^3 e^{-t^2}$$

con $\vartheta \in [0, 2\pi[$, $t \in \mathbb{R}$.

Sia $K(t) = t^3 e^{-t^2}$

$$K'(t) = (3t^2 - 2t^4)\, e^{-t^2} = 0$$

da cui $t = 0$, $t^2 = 3/2 \iff t = \mp \frac{\sqrt{6}}{2}$

Inoltre $\max_\vartheta(\operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta) = \frac{1}{2} = -\min_\vartheta(\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta)$

$$\max_t t^3 e^{-t^2} = \frac{3}{2}\,\frac{\sqrt{6}}{2}\, e^{-3/2} = \frac{3}{4}\sqrt{6}\, e^{-3/2}$$

Si ha, quindi:

$$\max_A f = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{6}\, e^{-3/2} = \frac{3}{8}\sqrt{6}\, e^{-3/2} = -\min_A f.$$

$\boxed{N^\circ 3}$ L'equazione è del tipo

$$y' + a_0(x)\, y = g(x),$$

il cui integrale generale è dato da

$$y(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_0(t)\, dt\right)\left(\int_{x_0}^{x} g(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} a_0(s)\, ds\right) dt + c\right)$$

Nel nostro caso si ha

$$-\int_{x_0}^{x} a_0(t)\, dt = \int_0^x n \,\mathrm{sen}(nt)\, dt = 1 - \cos(nx)$$

e

$$\int_{x_0}^{x} g(t) \exp\left(\int_{x_0}^{t} a_0(s)\, ds\right) dt = \int_0^x n^2 e^{\cos(nt) - 1}\, dt,$$

$y(0) = 0 \implies \boxed{c = 0}$

Perciò la soluzione del nostro problema è

$$y_n(x) = n^2 \int_0^x e^{\cos(nt) - \cos(nx)}\, dt$$

Come era ovvio, l'intervallo massimale $I_n = \mathbb{R}\ \forall n$.

Essendo poi $\quad e^{-2} \leq e^{\cos(nt) - \cos(nx)} \leq e^2,$

si ha
$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = \begin{cases} -\infty & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +\infty & x > 0. \end{cases}$$

$\boxed{N^{\circ} 4}$ Il problema non verifica globalmente il teorema di Cauchy ma soltanto il teorema di Peano di unicità locale. Più precisamente, il teorema di Cauchy non è verificato ogni qual volta $\operatorname{sen}(u-1)=0$, ovvero per

$$u = 1+k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Il dato iniziale non viene assegnato su una di queste rette, quindi localmente — in un intorno del dato iniziale — c'è esistenza ed unicità locale per il teorema di Cauchy. Vale inoltre, fuori dalle rette prima considerate, il teorema di esistenza ed unicità globale, dato che

$$\left|\sqrt{|\operatorname{sen}(u-1)|}\right| \leq 1 \quad \forall (t,u).$$

D'altra parte la soluzione è monotona non decrescente $\forall (t,u)$, dato che

$$\sqrt{|\operatorname{sen}(u-1)|} \geq 0.$$

In base al teorema di esistenza ed unicità globale, la soluzione continuerebbe ad esistere finchè non raggiunge una delle rette $u=1+k\pi$, $k=-1,0$ (visto che il valore iniziale $u(0)=0$ è compreso in $(1-\pi,1)$). D'altra parte la soluzione non rimane sempre lontana da tali rette, dato che in tal caso esisterebbero M_1, M_2 t.c.

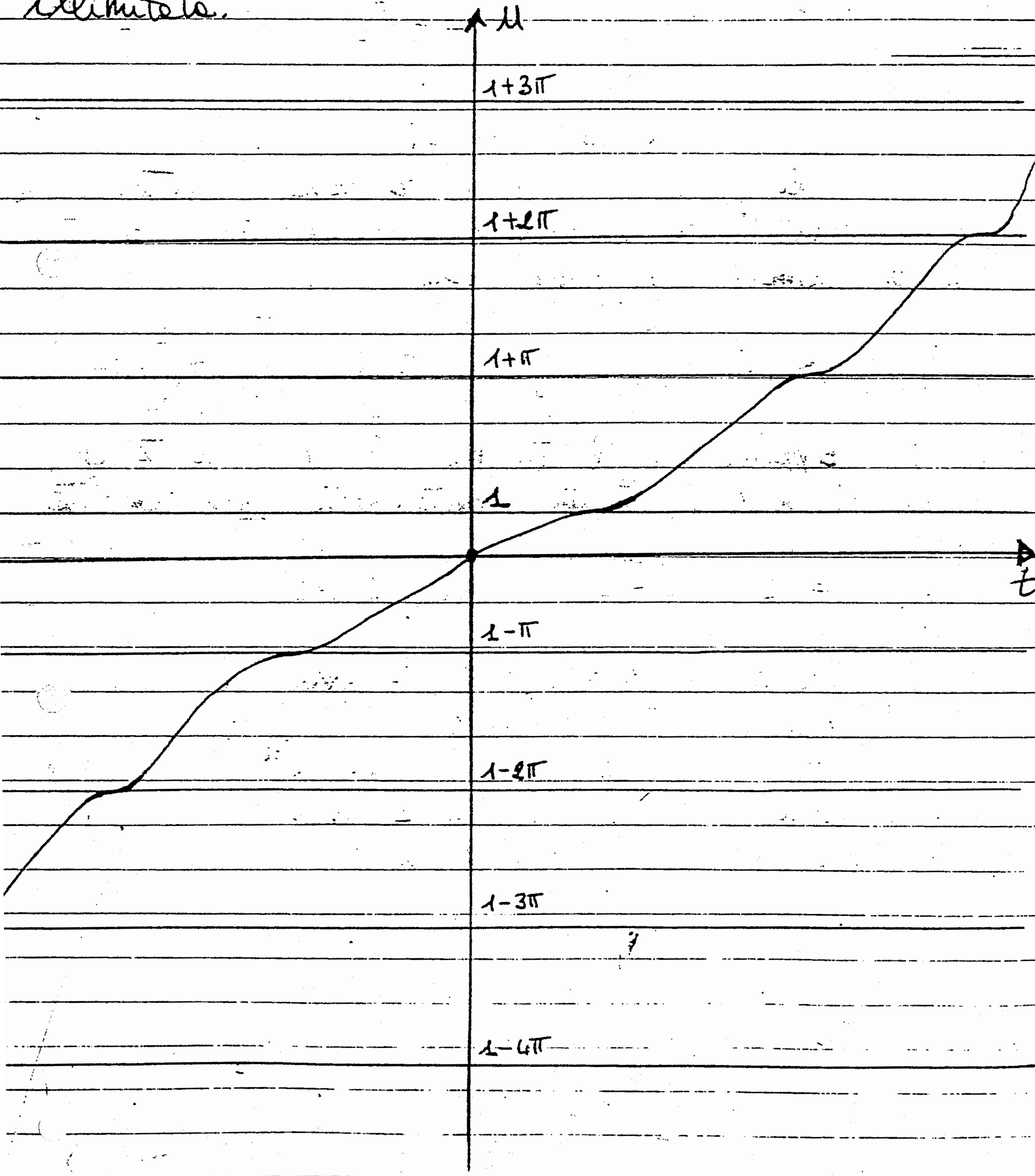
$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = M_1 < 1, \qquad \lim_{t\to-\infty} u(t) = M_2 > 1-\pi$$

e $\lim_{|t|\to+\infty} u'(t) = 0$ (per il teorema dell'asintoto).

Ciò contraddirebbe l'equazione del problema, dato che
$$0 \neq \sqrt{|\operatorname{sen}(M_j - 1)|} \quad \text{per } j = 1, 2.$$

E' inoltre assurdo che sia $M_1 = 1$ oppure $M_2 = 1 - \pi$, dato che, ad esempio nell'intorno di $u = 1$, si ha
$$u' \simeq \sqrt{|u-1|}$$
e quindi la soluzione non rimane asintotica ad $u = 1$, ma ci va a cadere sopra in tempo finito.
Più precisamente, sappiamo che
$$\frac{2}{\pi}|y| \leq |\operatorname{sen} y| \leq |y| \quad \text{per } |y| \leq \pi/2,$$
per cui applicando il teorema del confronto in entrambi i casi, tenuto conto della non unicità per
$$u' = c\sqrt{|u-1|} \quad \text{per } c > 0$$
nell'intorno di $u = 1$, si ricava la non unicità per il nostro problema.
Una volta che la soluzione giunge in $u = 1$ può restare costantemente uguale a 1 oppure ripartire (immediatamente o dopo un po') e continuare a crescere.
Si giunge poi al livello $1 + \pi$ e la situazione è analoga alla precedente e così via.
Stessa situazione anche per $t < 0$, ripetendo il ragionamento precedente o invocando la simmetria.
Si tenga conto a tal proposito che mancando l'unicità la ~~stessa~~ simmetria non ci impone che la soluzione sia simmetrica ma soltanto che si possa

scegliere una soluzione simmetrica. Scegliendo la soluzione che ad ogni livello $1+k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, non si blocca a quel livello ma continua a crescere, si ottiene una (non l'unica!) soluzione illimitata.



$\boxed{N^\circ 5}$

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen} y \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} x \end{cases}$$

Punti critici:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} y = 0 \\ \operatorname{arctg} x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = k\pi \\ x = 0 \end{cases}$$

$A_k = (0, k\pi)$ sono tutti punti critici.

Linearizzando il sistema nell'origine, si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori sono $\lambda = \mp 1$, per cui l'origine è un punto di sella.
Si ha poi

$$E(x,y) = -\int_0^y \operatorname{sen} t \, dt + \int_0^x \operatorname{arctg} t \, dt$$

è un integrale primo, da cui

$$\cancel{+\cos} y + x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) = -k$$

sono le curve di livello. Si ha perciò

$$\cos y = -x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \log(1+x^2) \mp k.$$

Da quindi risulta

$$-1 \leq x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + K \leq 1$$

Detta $h(x) = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + K$,

si ha $h(x)$ pari e $h'(x) = \operatorname{arctg} x \geq 0 \quad \forall x \geq 0$, quindi monotona crescente per $x \geq 0$. Inoltre

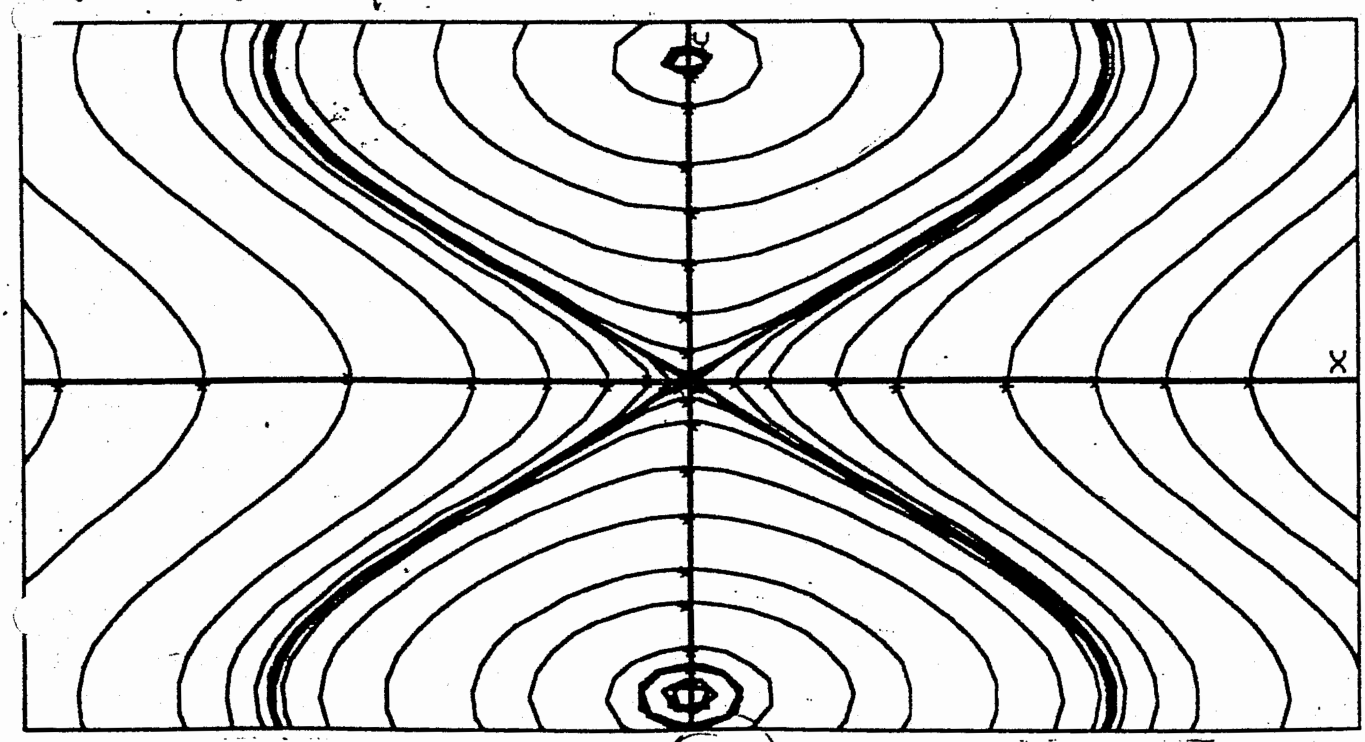
$h(0) = K = \min h(x)$ e $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

Deve quindi essere $-1 \leq K \leq +1$ e per ogni K la disuguaglianza non sarà verificata $\forall x$ ma solo per

$$-x_K \leq x \leq x_K < +\infty \quad \text{t.c. } h(x_K) = 1$$

Risulta poi $y = 2k\pi \mp \arccos(-h(x))$

Il grafico è quello riportato in figura



Per quanto riguarda gli altri punti stazionari si deduce che i punti A_{2k} sono tutti punti di sella mentre i punti A_{2k+1} sono tutti dei centri.

$\boxed{N^o\ 6}$ $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2+3\leq 4\sqrt{x^2+y^2}\}$

Passando in coordinate ~~po~~ cilindriche si ha

$$\begin{cases} x=t\cos\vartheta \\ y=t\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ z=s \end{cases} \qquad |J_1|=t$$

$$\tilde{T}=\{(t,s,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times[0,2\pi] : t^2+s^2+3\leq 4t\}$$

$t^2-4t+4+s^2-1\leq 0$

$(t-2)^2+s^2\leq 1$, cioè

$$\tilde{T}=\{(t,s,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times[0,2\pi] : (t-2)^2+s^2\leq 1\}$$

Perciò $\iiint_T dx\,dy\,dz=\iiint_{\tilde{T}} t\,dt\,ds\,d\vartheta$

e posto ora (nuovo passaggio in coordinate cilindriche

$$\begin{cases} t=2+\rho\cos\varphi \\ s=\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ \vartheta=\vartheta \end{cases} \qquad |J_2|=\rho$$

$$\overline{T}=\{(\rho,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^+\times[0,2\pi]^2 : \rho\leq 1\}$$

$$\iiint_{\tilde{T}} t\,dt\,ds\,d\vartheta=\iiint_{\overline{T}}(\rho\cos\varphi+2)\rho\,d\rho\,d\varphi\,d\vartheta=(2\pi)^2.$$

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1997/98
Analisi Matematica II (dott. Bruno Rubino)

L'Aquila, 3 Febbraio 1998 **Recupero parziali**

Durata della prova: **30 minuti per parziale da recuperare**

Recupero del Parziale n. 1

Posto

$$f(x,y) = \int_0^1 g(t,x,y)dt,$$

dove

$$g(t,x,y) = \begin{cases} \frac{1-e^{-xyt^2}}{t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

provare che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ e calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Recupero del Parziale n. 2

Sia dato

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \log(1+\sin x) + (x-1)^2 + xy = 1+z,$$
$$(x+y+1)^2 + \log(1+x+z) = 1\}.$$

- Dimostrare che in un intorno di $(0,0,0)$ si possono esplicitare su $\mathcal{C}$ due coordinate in funzione della terza, e precisamente

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

- Trovare tale parametrizzazione con un errore $o(x^2)$.
- **[Facoltativo]** Trovare tale parametrizzazione con un errore $o(x^4)$.

Recupero del Parziale n. 3

Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} u' = iu - v \\ v' = u + iv + e^{it}. \end{cases}$$

Recupero del Parziale n. 4

Sia p_k un qualunque polinomio di grado k (a coefficienti reali). Dimostrare che, se p_k è soluzione dell'equazione differenziale

$$(u')^2 + tu' - u = 0,$$

si ha $k \leq 2$. Trovare un polinomio di primo grado e un polinomio di secondo grado che siano soluzioni di tale equazione.

Recupero del Parziale n. 5

Sia dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^2 \arctan x \\ \dot{y} = x - y^2 \arctan y. \end{cases} \tag{1}$$

- Qual'è la natura dell'origine per il sistema lineare associato?
- La funzione $V(x, y) = x^2 + y^2$ è una funzione di Lyapunov per il sistema (1)?
- Utilizzare la forma polare associata al sistema (1) per stabilire la natura dell'origine.

Recupero del Parziale n. 6

Calcolare

$$\iint_{\mathcal{D}} \left| x^2 - 4y^2 \right| e^{(x+2y)^2} dx\, dy,$$

dove $\mathcal{D}$ è il quadrilatero di vertici $(1,0)$, $(0,1/2)$, $(-1,0)$, $(0,-1/2)$.

RECUPERO N°1 DEL 3/2/98

PERCHÈ f sia ~~continua~~ differenziabile deve almeno essere continua.

Poichè $\lim_{t \to 0^+} g(t,x,y) = 0$, la funzione g è continua su $[0,1] \times \mathbb{R}^2$ e di conseguenza la f lo è su $\mathbb{R}^2$.

Si ha inoltre per $t > 0$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) = y t e^{-xyt^2} \qquad \frac{1-e^{-xyt^2}}{t^2}$$

e $\lim_{t \to 0^+} \frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) = xy$,

~~per cui g_x è continua [illegible] $t=0$~~

ed analogamente

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t,x,y) = x t e^{-xyt^2} \qquad \frac{1-e^{-xyt^2}}{t^2} \qquad \text{e} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{\partial g}{\partial y}(t,x,y) = xy.$$

Dunque g_x e g_y sono continue su $[0,1] \times \mathbb{R}^2$ e per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale f_x ed f_y sono continue. Di conseguenza f è differenziabile su $\mathbb{R}^2$.

Poichè inoltre

$$f_x(0,0) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x}(t,0,0)\,dt = 0 = f_y(0,0)$$

ed $f(0,0) = \int_0^1 g(t,0,0)\,dt = 0$, allora il limite richiesto (per la definizione di differenziale) è zero.

RECUPERO N°2 del 3/2/98

$$\begin{cases} \log(1+\operatorname{sen} x) + (x-1)^2 + xy = 1+z \\ (x+y+1)^2 + \log(1+x+z) = 1 \end{cases}$$

Sviluppando con Taylor intorno all'origine si ha

a) AL 1° ORDINE

$$\begin{cases} \cancel{1}+x-2x+\cancel{xy} = \cancel{1}+z+o(x) \\ \cancel{1}+2x+2y+\cancel{2xy}+x+z+o(x)+o(y)+o(z) = \cancel{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -x+o(x) \\ 2y+3x+z+o(x)+o(y)+o(z)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y+3x-x+o(x)+o(y)+o(z)=0 \\ z=-x+o(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+o(x) \\ z=-x+o(x) \end{cases} \Longrightarrow o(y)=o(x)=o(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{o(y^n)=o(x^n)=o(z^n)}$$

b) AL 2° ORDINE

$$\begin{cases} x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+x^2-2x+\cancel{1}+xy = \cancel{1}+z \\ x^2+y^2+\cancel{1}+2x+2y+2xy+x+z-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}z^2-xz+o(x^2) = \cancel{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -x + \dfrac{x^2}{2} - x^2 + o(x^2) \\ 2y = -3x - z - \dfrac{x^2}{2} - y^2 + \dfrac{1}{2} z^2 - 2xy + xz + o(x^2) \\ \quad = -2x - \cancel{\dfrac{x^2}{2}} - \cancel{x^2} + \cancel{\dfrac{x^2}{2}} + \cancel{2x^2} - \cancel{x^2} + o(x^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2) \\ y = -x + o(x^2) \end{cases}$$

(e) AL 4° ORDINE

$$\log(1+\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + o(x^4) =$$

$$= x - \cancel{\frac{x^3}{6}} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \cancel{\frac{1}{3}x^3} - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$$

$$\log(1+x+z) = x+z - \frac{1}{2}(x+z)^2 + \frac{1}{3}(x+z)^3 - \frac{1}{4}(x+z)^4 + o(x+z)^4 =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{x^4}{4} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

da cui si ha

$$\begin{cases} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{12} + o(x^4) + x^2 - 2x + \cancel{1} + xy = \cancel{1} + z \\ x^2 + y^2 + \cancel{1} + 2x + 2y + 2xy + o(x^4) - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} = \cancel{1} \end{cases}$$

$$z = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + xy + o(x^4)$$

Usando lo sviluppo al 2° ordine si ha

$$\begin{cases} z = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - x^2 + o(x^3) = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ y = -x + \cancel{x^2} + o(x^3) - \frac{x^2}{2} + \cancel{\frac{x^4}{8}} - \cancel{x^2} = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \end{cases}$$

e usando tale sviluppo nello sviluppo al 4° ordine,

$$\begin{cases} z = -x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^4) \\ y = -x + x^2 + \cancel{\frac{x^3}{2}} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \cancel{\frac{x^3}{2}} + o(x^4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \\ y = -x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{16} + o(x^4) \end{cases}$$

che è lo sviluppo cercato.

RECUPERO N° 3 del 3/2/98

$$\begin{cases} u' = iu - v \\ v' = u + iv + e^{it} \end{cases}$$

Se $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{it} \end{pmatrix}$,

allora possiamo riscriverlo nella forma

$$\boxed{\mathcal{U}' = A\mathcal{U} + B}$$

Gli autovalori di A sono dati da $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$, per cui la forma di Jordan associata è data da

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$$

Si ha $e^{tJ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{pmatrix}$

Gli autovettori relativi a λ_1 e λ_2 sono rispettivamente

$v_1 = (1, i)^T$, $v_2 = (i, 1)^T$, per cui una ~~stabile~~ matrice fondamentale ~~risolvente~~ è data da

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ie^{2it} \\ i & e^{2it} \end{pmatrix}$$

La generica soluzione è perciò data da

$$\mathcal{U}(t) = \begin{pmatrix} 1 & ie^{2i(t-t_0)} \\ i & e^{2i(t-t_0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} 1 & ie^{2i(t-s)} \\ i & e^{2i(t-s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{is} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta e^{2i(t-t_0)} \\ \alpha i + \beta e^{2i(t-t_0)} \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} i e^{2it} e^{-is} \\ e^{2it} e^{-is} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta e^{2i(t-t_0)} \\ \alpha i + \beta e^{2i(t-t_0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2it} e^{-is} \\ i e^{2it} e^{-is} \end{pmatrix} \Bigg|_{t_0}^{t} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta e^{2i(t-t_0)} \\ \alpha i + \beta e^{2i(t-t_0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2it}\left(e^{-it_0} - e^{-it}\right) \\ i e^{2it}\left(e^{-it} - e^{-it_0}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha + i\beta e^{2i(t-t_0)} + e^{i(2t-t_0)} - e^{it} \\ \alpha i + \beta e^{2i(t-t_0)} + i e^{it} - i e^{i(2t-t_0)} \end{pmatrix}$$

N°4

$$p_k(t) = \sum_{n=0}^{k} a_n t^n \qquad \text{con} \quad a_k \neq 0$$

$$p_k'(t) = \sum_{n=0}^{k} n a_n t^{n-1} , \qquad t p_k'(t) = \sum_{n=1}^{k} n a_n t^n$$

$$t p_k'(t) - p_k(t) = k a_k t^k - a_k t^k + \text{grado inferiore}$$
$$= (k-1) a_k t^k + \text{grado inferiore}$$

$$\deg\left(t p_k'(t) - p_k(t)\right) = k \qquad \text{purché} \quad k \neq 1$$

$$\left(p_k'(t)\right)^2 = k^2 a_k^2 \, t^{2(k-1)} + \text{grado inferiore}$$

$$\deg\left(\left(p_k'(t)\right)^2\right) = 2(k-1) \qquad \text{purché } k \geq 1$$

Quindi, se $\boxed{k \geq 2}$ ~~$p_k(t)$~~

p_k può essere soluzione solo se $k = 2(k-1)$ ovvero $\boxed{k=2}$

~~Allora~~ Perciò il grado del polinomio può essere al più 2.

Sia perciò $p(t) = a t^2 + b t + c$ un polinomio di grado al più 2 (cioè a, b, c possono anche annullarsi). Si ha

$p'(t) = 2at + b$ e quindi

$$4a^2t^2 + 4abt + b^2 + 2at^2 + \cancel{bt} - at^2 - \cancel{bt} - c = 0$$

$$\begin{cases} a(4a+1) = 0 \\ ab = 0 \\ b^2 - c = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad 1^\circ \begin{cases} a = 0 \\ b^2 = c \\ p(t) = bt + b^2 \ \forall b \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad 2^\circ \begin{cases} a = -1/4 \\ b = c = 0 \\ p(t) = -\frac{t^2}{4} \end{cases}$$

9.8

RECUPERO Nº 5 DEL 3/2/98

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x^2 \operatorname{arctg} x \\ \dot{y} = x - y^2 \operatorname{arctg} y \end{cases}$$

Punti critici: sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = -x^2 \operatorname{arctg} x \\ x = y^2 \operatorname{arctg} y \end{cases}$$

e in particolare l'origine.
Linearizzando si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si tratta perciò di un CENTRO. Non trattandosi di punto asintoticamente stabile, non sappiamo quale sia la natura del punto critico corrispondente per il sistema non lineare di partenza ($\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} = 0$)

Verifichiamo se $V(x,y) = x^2 + y^2$ è di Lyapounov:

$$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \left(\nabla V(x,y) \cdot (\dot{x}, \dot{y})\right) = 2x\left(-y - x^2 \operatorname{arctg} x\right) +$$
$$+ 2y\left(x - y^2 \operatorname{arctg} y\right) = -2\left(x^3 \operatorname{arctg} x + y^3 \operatorname{arctg} y\right) \leq 0$$

e in particolare < 0 fuori dall'origine (in un suo intorno)
Perciò V è di Lyapunov e quindi l'origine è asintoticamente stabile

Passando in forma polare si ha

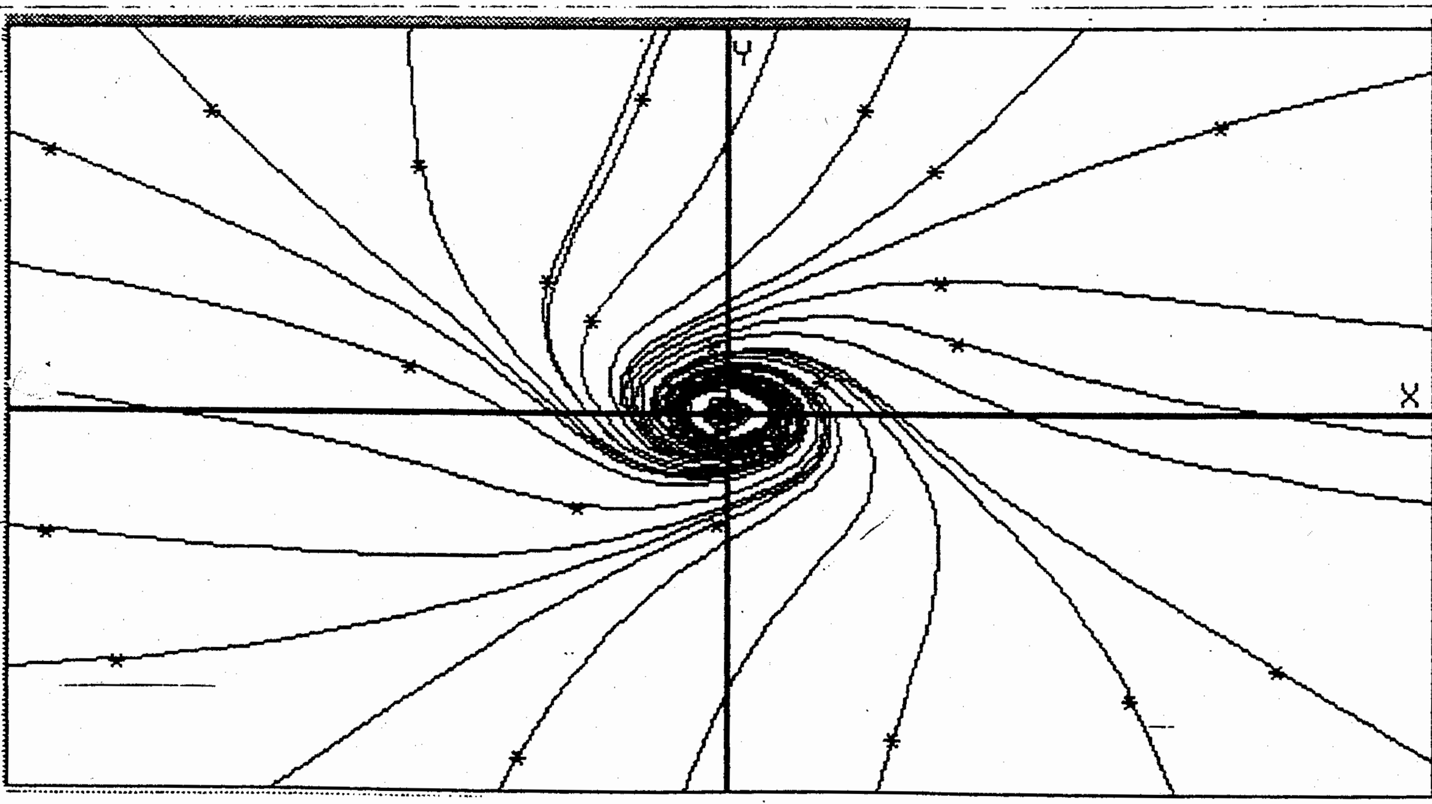
$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\dot{x} + y\dot{y}\right) = -\frac{1}{r}\left(x^3 \operatorname{arctg} x + y^3 \operatorname{arctg} y\right) \leq 0$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) = \frac{1}{r^2}\left(x^2 - xy^2 \operatorname{arctg} y + y^2 + yx^2 \operatorname{arctg} x\right)$$

$$= 1 - \frac{xy}{x^2+y^2}\left(y \operatorname{arctg} y - x \operatorname{arctg} x\right) \geq \frac{1}{2}$$ in un intorno dell'origine.

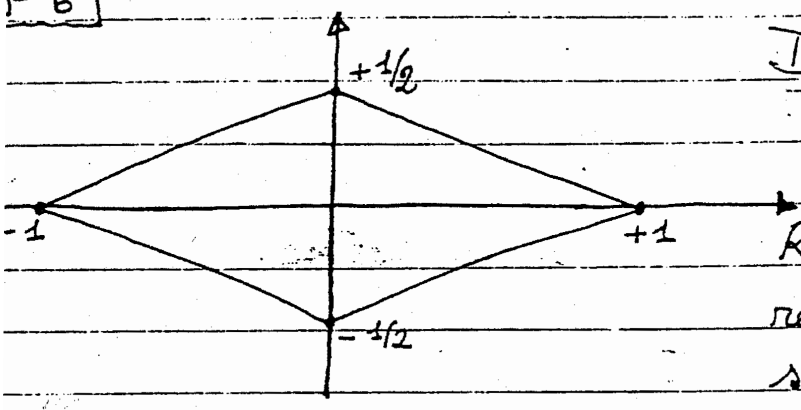
Si tratta perciò di una spirale attrattiva che gira in senso antiorario.

Il grafico (non richiesto) viene riportato sotto.



A '97/98 - ANALISI MATEMATICA II - CdL in MATEMATICA
RECUPERO PARZIALI del 3/2/98

N° 6



D è il rombo riportato in figura.

Ricavandosi le equazioni delle rette che passano per i vertici si ha

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2y| \le 1, \; |x+2y| \le 1\}$$

Sia

$$\begin{cases} X = x - 2y \\ Y = x + 2y \end{cases} \qquad \tilde{D} = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : |X| \le 1, \; |Y| \le 1\}$$

Lo Jacobiano del cambio di variabili (da (x,y) a (X,Y)) è $1/4$. Perciò si ha

$$\iint_D |x^2 - 4y^2| \, e^{(x+2y)^2} \, dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{4} \iint_{\tilde{D}} |XY| \, e^{Y^2} \, dX\,dY = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} |X| \, dX \int_{-1}^{+1} |Y| \, e^{Y^2} \, dY =$$

$$= \int_0^1 X \, dX \int_0^1 Y e^{Y^2} \, dY = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} e^{Y^2} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{4}(e-1)$$

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1997/98
Analisi Matematica II (dott. Bruno Rubino)

L'Aquila, 17 Febbraio 1998 **Recupero parziali**

Durata della prova: **30 minuti per parziale da recuperare**

Recupero del Parziale n. 1

Data la funzione $f:\ \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z):\ z \in \mathbb{R}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) = xyz \log\left(x^2 + y^2\right),$$

mostrare che f è estendibile ad una funzione $\widetilde{f}$ di classe C^0 su tutto $\mathbb{R}^3$.
Si stabilisca inoltre se:

- $\widetilde{f}$ è differenziabile nell'origine;
- $\widetilde{f}$ è differenziabile in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Recupero del Parziale n. 2

Sia data la funzione $f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) = x + 2y.$$

Calcolare, se esistono, $\max_{\mathcal{A}} f$ e $\min_{\mathcal{A}} f$, dove

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3:\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x + 2y + z \geq 0\right\}.$$

Recupero del Parziale n. 3

Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' = 2tu' + e^{t^2}$$

che soddisfano alla condizione $u'(0) = 0$.

Recupero del Parziale n. 4

Provare che le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = (u-1)^3 \arctan(t) \\ u(0) = \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

sono convesse se $\lambda > 1$ e concave se $\lambda < 1$.

Recupero del Parziale n. 5

Sia dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = x + \sin x. \end{cases}$$

- Facendo uso del Teorema di linearizzazione, si stabilisca la natura dell'origine.
- Dopo aver indagato sull'esistenza di un integrale primo, disegnare approssimativamente le orbite del sistema.
- Facendo uso del punto precedente, si stabilisca la natura del punto $(0, \pi)$.

Recupero del Parziale n. 6

Verificare il Teorema della Divergenza in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale $F = (x, y, 0)$ e la regione

$$\mathcal{C} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2 \ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

RECUPERO N° 1 del 17/2/98

Si ha $\lim_{|(x,y)|\to 0} xyz\log(x^2+y^2)=0$

come si vede banalmente passando a coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta & \rho\geq 0 \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta & \vartheta\in[0,2\pi) \\ z=t & t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Sia perciò

$$\tilde{f}(x,y,z)=\begin{cases} xyz\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per quanto riguarda la differenziabilità si ha

$$\lim_{|(x,y,z)|\to 0}\frac{xyz\log(x^2+y^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$$

$$\cancel{\lim_{|(t,\rho)|\to 0}}\ \frac{\rho^2 t\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\log(\rho^2)-(\alpha\rho\cos\vartheta+\beta\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta+\gamma t)}{\sqrt{\rho^2+t^2}}=\epsilon$$

~~se~~ $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,0,0)$ visto che $\left|\rho t/\sqrt{\rho^2+t^2}\right|$ è limitato da 1/2

Inoltre, la differenziabilità in $(0,0,z_0)$ la si ha in quanto

$$\lim_{|(x,y,z-z_0)|\to 0} \frac{\tilde{f}(x,y,z)-\tilde{f}(0,0,z_0)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z_0)^2}} \overset{(*)}{=} \lim_{|(\rho,t)|\to 0} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta\,(t+z_0)\log\rho^2}{\sqrt{\rho^2+t^2}} = 0$$

in quanto $\left|\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+t^2}}\right| \leq 1.$

(*) se $(x,y)=(0,0)$ la funzione considerata è già ~~nulla~~ prima ancora di passare al limite.

RECUPERO N° 2 del 17/2/98

Poiché f è continua (in realtà C^∞) ed A è una semisfera chiusa, l'esistenza di massimo e minimo è garantita.
D'altra parte $\nabla f = (1, 2, 0) \neq 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, per cui non ci sono punti stazionari interni.
Si tratta allora di cercare max e min sulla frontiera.
Esaminiamo anzitutto l'intersezione piano-sfera:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \qquad (1)$$

~~In coordinate per~~
Se si usa il metodo dei moltiplicatori a tale sistema bisogna aggiungere le equazioni

$$\begin{cases} 1+2\lambda x + \mu = 0 \\ 2+2\lambda y + 2\mu = 0 \\ 2\lambda z + \mu = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\lambda x = -\mu - 1 \\ 4\lambda y = -4\mu - 4 \\ 2\lambda z = -\mu \end{cases} \qquad (2)$$

Dalla seconda di (1) si ha (si noti che $\lambda = 0$ è assurdo)

$2\lambda x + 4\lambda y + 2\lambda z = 0$, da cui sostituendo (2)

$$-\mu - 1 - 4\mu - 4 - \mu = 0 \Rightarrow -6\mu = 5 \Rightarrow \boxed{\mu = -\frac{5}{6}}$$

Da (2) si ha allora

$$\begin{cases} 2\lambda x = \frac{5}{6} - 1 \\ \lambda y = \frac{5}{6} - 1 \\ \lambda z = \frac{5}{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{12\lambda} \\ y = -\frac{1}{6\lambda} \\ z = \frac{5}{12\lambda} \end{cases} \qquad (3)$$

Sostituendo nella prima di (1) si ha

$$\frac{1+4+25}{12^2 \lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{24},$$

$$\lambda = \mp\sqrt{\frac{5}{24}}$$

e da tre si trovano due punti

$$A = \left(-\frac{1}{12}\sqrt{\frac{24}{5}}, -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{5}}, \frac{5}{12}\sqrt{\frac{24}{5}}\right)$$

$$B = \left(\frac{1}{12}\sqrt{\frac{24}{5}}, \frac{1}{6}\sqrt{\frac{24}{5}}, \frac{5}{12}\sqrt{\frac{24}{5}}\right).$$

Si ha $f(A) = -\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{24}{5}} = -\frac{5}{12}\sqrt{\frac{24}{5}} = -\sqrt{5/6}$

$$f(B) = \frac{5}{12}\sqrt{\frac{24}{5}} = \sqrt{5/6}$$

Si tratta di vedere ora se ci sono punti ~~sulla~~ semisfera o sul cerchio in cui si supera $f(B)$ o si va sotto al valore $f(A)$.

Dalla teoria dei massimi e minimi su varietà sappiamo d'altra parte che se tali punti esistono allora ∇f dovrà essere perpendicolare alla superficie. D'altra parte $\nabla f = (1,2,0)$ e non è mai ortogonale al piano $x+2y+z=0$. Il punto in cui tale vettore è ortogonale alla sfera $x^2+y^2+z^2=1$ lo si trova ~~risolvendo il sistema~~ ~~...~~ sostituendo le coordinate del generico punto $P=(t,2t,0)$, $t\in\mathbb{R}$, nell'equazione:

$t^2+4t^2=1$, $t=\mp\sqrt{5}/5$ ovvero $P_\mp = \left(\mp\sqrt{5}/5, \mp\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0\right)$

e solo $P_+ \in A$ e risulta $f(P_+) = \sqrt{5} > f(B)$.

Perciò $f(A) = \min_A f$ ed $f(P_+) = \max_A f$.

RECUPERO DEL 17/2/98 $\boxed{N^\circ 3}$

Posto $y(t) = u'(t)$ si ha il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t\,y + e^{t^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Trattandosi di equazione differenziale lineare, uso il metodo della variazione delle costanti (si può anche ricorrere alla formula risolutiva)

$$\tilde{y}' = 2t\,\tilde{y} \Rightarrow \tilde{y}(t) = c\,e^{t^2}$$

$$y(t) = c(t)\,e^{t^2}$$

$$y' = (c' + 2ct)\,e^{t^2}$$

e sostituendo $c' = 1 \Rightarrow y(t) = (t + c)\,e^{t^2}$

e usando la condizione iniziale $y(t) = t\,e^{t^2}$

Tornando alla variabile u si ha:

$$u(t) = \int_0^t y(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}e^{t^2} + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

RECUPERO N° 4 del 17/2/98.

Derivando l'equazione si ha

$$u'' = 3(u-1)^2 u' \operatorname{arctg}(t) + (u-1)^3 \frac{1}{1+t^2}$$

$$= 3(u-1)^{2+3} \operatorname{arctg}^2(t) + (u-1)^3 \frac{1}{1+t^2}$$

$$= (u-1)^3 \left[3(u-1)^2 \operatorname{arctg}^2(t) + \frac{1}{1+t^2} \right]$$

Poiché $\forall \lambda$ siamo in ipotesi di unicità globale e visto che per $\lambda = 1$ la soluzione è $u(t) \equiv 1$, si ha

$$u(t) > 1 \quad \forall t \in \mathbb{R} \iff \lambda > 1.$$

Visto che dall'espressione di u'' trovata risulta che tutte le soluzioni sono di classe C^2 (in realtà C^∞) nel proprio intervallo d'esistenza e che il segno di u'' è lo stesso del segno di $(u-1)$, allora

$$u \text{ è convessa } (u''>0) \iff u > 1 \iff \lambda > 1.$$

RECUPERO N°5 DEL 17/2/98

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen} y \\ \dot{y} = x + \operatorname{sen} x \end{cases}$$

L'origine è un punto critico. Linearizzando il sistema intorno ad esso si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 - 2 = 0, \quad \lambda = \mp\sqrt{2}$$

Si tratta perciò di un punto di sella.
Si ha poi che

$$E(x,y) = -\int_0^y \operatorname{sen} t \, dt \; \cancel{+} \int_0^x t + \operatorname{sen} t \, dt =$$

$$= + \cos y + 1 + \frac{x^2}{2} - \cos x + 1$$

è un integrale primo, da cui le curve di livello sono date da

$$\cos y = K \mp \frac{x^2}{2} + \cos x$$

al variare di K. Si ha perciò

$$-1 \leq K \mp \frac{x^2}{2} + \cos x \leq +1$$

Sia $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} - \cos x$. Allora $\varphi'(x) = x + \operatorname{sen} x$,

$\varphi'(x) < 0$ per $x < 0$ e $\varphi'(x) > 0$ per $x > 0$, da cui

$\min_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \varphi(0) = \cancel{\phi} - 1$, $\lim_{|x| \to \infty} \varphi(x) = +\infty$.

Poichè $-1 + K \leq \varphi(x) \leq 1 + K$

Dunque, da $\varphi(x) \geq -1$, si ha $1 + K \geq -1 \Rightarrow \boxed{K \geq 2}$

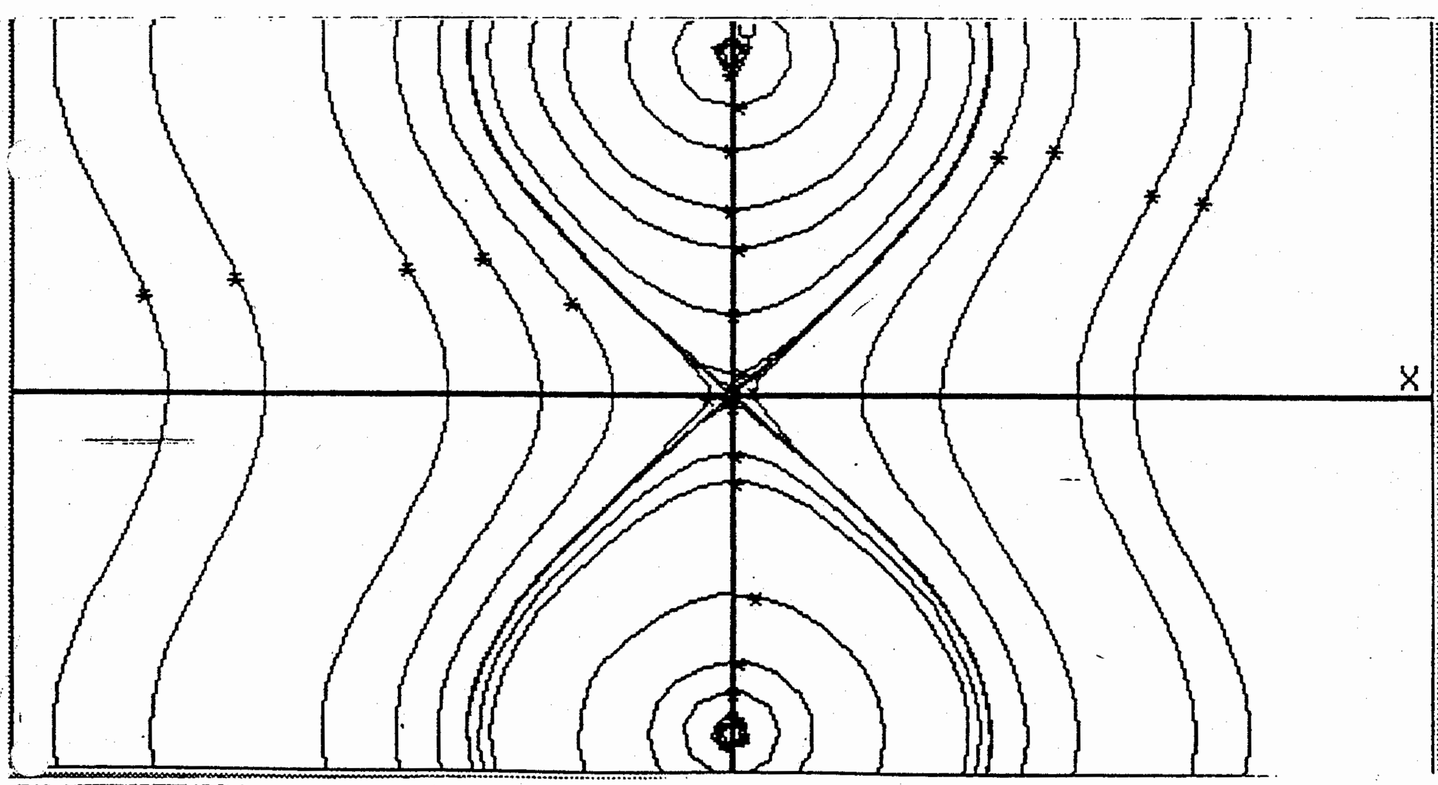
Poichè φ è pari, le diseguaglianze per ogni $K \in \mathbb{R}$ sarà verificate per

$$-x_k \leq x \leq +x_k < +\infty, \quad \text{dove}$$

$$\varphi(x_k) = 1 + K.$$

Risulta poi $y = 2h\pi \mp \arccos\left(K \mp \frac{x^2}{2} + \cos x\right)$

con $h \in \mathbb{Z}$. Il grafico è quello riportato in figura. In particolare $(0, \pi)$ è perciò un centro.



RECUPERO N° 6 del 17/2/98

Risulta $\operatorname{div} F = 2$

Poichè $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \geq x^2+y^2,\ 0 \leq z \leq 1\}$

è un cono il cui volume è $\pi/3$, allora

$$\iiint_G \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \frac{2}{3}\pi.$$

D'altra parte, parametrizzata la superficie laterale di G come

$$\varphi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\vartheta & 0 \leq \rho \leq 1 \\ z = \rho \end{cases}$$

Risulta quindi $|\varphi_\rho \wedge \varphi_\vartheta| = \sqrt{2}\,\rho$, mentre il vettore esterno è dato da

$$\nu_e = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\vartheta, \text{sen}\,\vartheta, -1)$$

e di conseguenza

$$\iint_{S_1} \langle F, \nu_e \rangle \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\rho\,(\cos^2\vartheta + \text{sen}^2\vartheta)(\sqrt{2}\,\rho)\,d\vartheta\,d\rho =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2\,d\rho = \frac{2\pi}{3}.$$

Il teorema della divergenza è perciò dimostrato notando che F è ortogonale (e quindi non dà contributo) alla superficie di base.

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1997/98
Analisi Matematica II (dott. Bruno Rubino)

L'Aquila, 11 Giugno 1998 **Recupero parziali**

Durata della prova: **30 minuti per parziale da recuperare**

Recupero del Parziale n. 1

Sia $B(0,r)$ il cerchio di centro l'origine e raggio r e sia $f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$. Per $r \geq 0$ si ponga

$$F(r) = \iint\limits_{B(0,r)} f(x,y)dx\ dy.$$

Dimostrare che:

- la funzione F è continua in $[0,+\infty)$.
- F ha derivata destra in 0. Calcolare tale derivata.

Recupero del Parziale n. 2

Calcolare l'estremo superiore e l'estremo inferiore della funzione $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y,z) = xy + yz + xz$$

nel piano $x + y + z = 3$. Dire se esistono dei punti di questo piano (eventualmente determinarli) in cui tali estremi sono raggiunti.

Recupero del Parziale n. 3

Trovare tutte le funzioni $u :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ che risolvono il problema

$$\begin{cases} u'(t) = 1 + \int\limits_0^t \frac{u'(s)}{1+s}\, ds \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Recupero del Parziale n. 4

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt[3]{\log(1+u^2)} \\ u(0) = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Verificare che per tale problema c'è esistenza globale ma non unicità di soluzione.
- Calcolare (quando ciò ha senso), al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, i possibili valori dei limiti

$$\lim_{x \to \mp\infty} u_\alpha(x).$$

Recupero del Parziale n. 5

Sia dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin(\pi(y+x)) \\ \dot{y} = x + \arctan(x). \end{cases}$$

Stabilire la natura dell'origine e del punto $(0,1)$. Cosa si può dire sulla natura degli altri punti critici?

Recupero del Parziale n. 6

Sia Ω la regione di piano la cui frontiera γ è l'unione tra la curva γ_1, espressa in coordinate polari da

$$\{(\rho,\vartheta):\ \rho = \vartheta^4,\ \vartheta \in [0, 2\pi[\},$$

e il segmento γ_2 che unisce il punto $(16\pi^4, 0)$ all'origine. Calcolare:

- la misura del perimetro di Ω;
- la misura dell'area di Ω.

A.A. '97/98 – ANALISI MATEMATICA II – CdL in MATEMATICA

RECUPERO PARZIALI DELL'11/6/98

N°1

- Continuità: basta applicare la definizione: infatti $\forall r_1, r_2$ con $r_2 > r_1$ si ha

$$|F(r_2) - F(r_1)| = \iint_{B(0,r_2)\setminus B(0,r_1)} f(x,y)\,dx\,dy \leq \frac{\pi}{2}\,\pi(r_2^2 - r_1^2),$$

da cui:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall r_1, r_2$ con $r_2 > r_1$, $|r_2 - r_1| < \delta$,

allora $|F(r_2) - F(r_1)| < \varepsilon$.

- Derivabilità in 0: poichè $F(0) = 0$, ancora per definizione si ha

$$0 \leq F'(0) = \lim_{r\to 0^+} \frac{F(r) - F(0)}{r} = \lim_{r\to 0^+} \frac{\iint_{B(0,r)} f(x,y)\,dx\,dy}{r} \leq$$

$$\leq \lim_{r\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(r^2)\,\pi r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = 0.$$

N°2

Sostituendo $z = 3 - x - y$ nella f si ottiene la funzione

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = f(x,y,3-x-y) = xy + (y+x)(3-x-y)$$
$$= xy + 3(x+y) - (x+y)^2$$

Con l'ulteriore cambio di variabili

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}$$

si ottiene la funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(u,v) = g(u+v,\, u-v) = u^2 - v^2 - 6u - 4u^2$$
$$= 3 - \left[3(u-1)^2 + v^2\right]$$

da cui il massimo assoluto per h è uguale a 3 e lo si raggiunge per $A = (1,0)$, mentre la funzione non ha minimo e

$$\inf_{(u,v)\in\mathbb{R}^2} h(u,v) = -\infty$$

Ritornando alla f il punto A corrisponde a

$P = (1,1,1)$ (punto in cui si raggiunge l'estremo superiore $f(1,1,1) = 3$),

mentre l'estremo inferiore è $-\infty$ e non viene mai raggiunto

$\boxed{N°3}$ Derivando l'equazione integrale si ottiene il problema di Cauchy equivalente

$$\begin{cases} u'' = \dfrac{u'}{1+t} \\ u(0) = 1,\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

Attraverso il cambio di variabile $y(t) = u'(t)$ si ottiene poi

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+t} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

che integrata per separazione di variabili

$$\int_1^{y(t)} dz = \int_0^t \frac{ds}{1+s}$$

ci dà $\quad y(t) = 1 + \log(1+t)$.

Dato che

$$u(t) = 1 + \int_0^t y(\tau)\, d\tau,$$

si ha allora

$$u(t) = 1 + t + \tau \log(1+\tau)\Big|_0^t - \int_0^t \frac{\tau}{1+\tau}\, d\tau$$

$$= 1 + \cancel{t} + t\log(1+t) - \cancel{t} + \log(1+t)$$

$$= 1 + (t+1)\log(t+1).$$

$\boxed{N^\circ 4}$

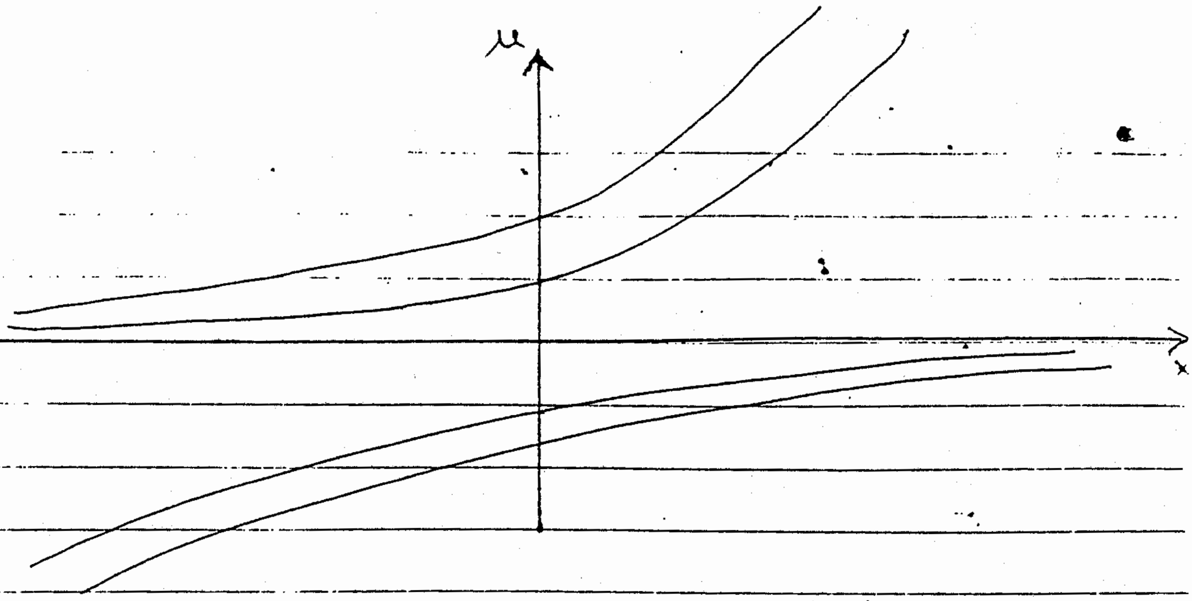
- ESISTENZA GLOBALE: basta verificare l'ipotesi del relativo teorema

$$\sqrt[3]{\log(1+u^2)} \le \sqrt[3]{u^2} \le 1 + |u| \qquad \forall u \in \mathbb{R},$$

e la verifica è conclusa.

- Mancanza di unicità.

Osserviamo anzitutto che risulta $u' \ge 0 \ \forall u$. Sia ora $\alpha \ne 0$. Supponiamo per assurdo che ci sia unicità. Allora la soluzione sarebbe limitata dall'alto (per $\alpha < 0$) o dal basso (per $\alpha > 0$) dalla soluzione nulla.



Risulterebbe inoltre asintotica ad $u=0$ (per $x \to -\infty$ se $\alpha>0$ e per $x \to +\infty$ per $\alpha<0$), come si potrebbe provare con un ragionamento standard (se per $\alpha>0$ risultasse $u_\alpha(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} M>0$, allora $u'_\alpha \xrightarrow[x\to-\infty]{} \sqrt[3]{\log(1+M^2)}>$ in assurdo con la convergenza monotona verso l'asintoto $u=M$).

Possiamo perciò ridurre il ragionamento in un intorno di $u=0$ e, poiché l'equazione è autonoma, a meno di traslazione ci possiamo anche riportare in un intorno di $t=0$. Basta allora esaminare l'unicità del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt[3]{\log 1+u^2} \\ u(0)=0 . \end{cases}$$

Si ha $|u'| \leq |u|^{2/3}$ e $|u'| \geq \frac{1}{2}|u|^{2/3}$

in un opportuno intorno dell'origine. D'altra parte sappiamo che non c'è unicità per il problema di Cauchy associato a queste due equazioni con dato iniziale $u(0)=0$, da cui tramite il teorema del confronto otteniamo la mancanza di unicità per il nostro problema.

• LIMITI. Possiamo per simmetria restringerci (in verità dovevamo farlo fin dall'inizio!) al caso $x \leq 0$. Da quanto prima detto si ha:

Se $x = 0$ si hanno le due possibilità

$$\lim_{x \to -\infty} u_0(x) = \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}$$

mentre per $x < 0$

$$\lim_{x \to -\infty} u_x(x) = -\infty .$$

Risulta invece in ogni caso doppia la possibilità a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} u_x(x) = \begin{cases} +\infty \\ 0 . \end{cases}$$

RECUPERO N°5 dell'11/6/98

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen}(\pi(y+x)) \\ \dot{y} = x + \operatorname{arctg}(x) \end{cases}$$

I punti critici sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + \operatorname{arctg} x = 0 \\ \pi(y+x) = k\pi \end{cases} \qquad \begin{cases} y + x = k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x + \operatorname{arctg} x = 0 \implies \boxed{x = 0} \end{cases}$$

Tutti i punti critici sono dati da $(0,k)$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$.
In particolare sono punti critici $(0,0)$ e $(0,1)$.
LINEARIZZANDO ATTORNO A $(0,k)$ si ha

$$\begin{cases} \dot{x} = (-1)^k \pi (x+y) \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$

Basta allora distinguere tra k pari e k dispari.

a) k pari

$$\begin{cases} \dot{x} = \pi x + \pi y \\ \dot{y} = 2x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda(\pi - \lambda) - 2\pi = 0 \qquad \lambda^2 - \pi\lambda - 2\pi = 0 \qquad \lambda = \frac{\mp\pi \mp \sqrt{\pi^2 + 8\pi}}{2}$$

per cui si tratta di un punto di sella.

b) k dispari

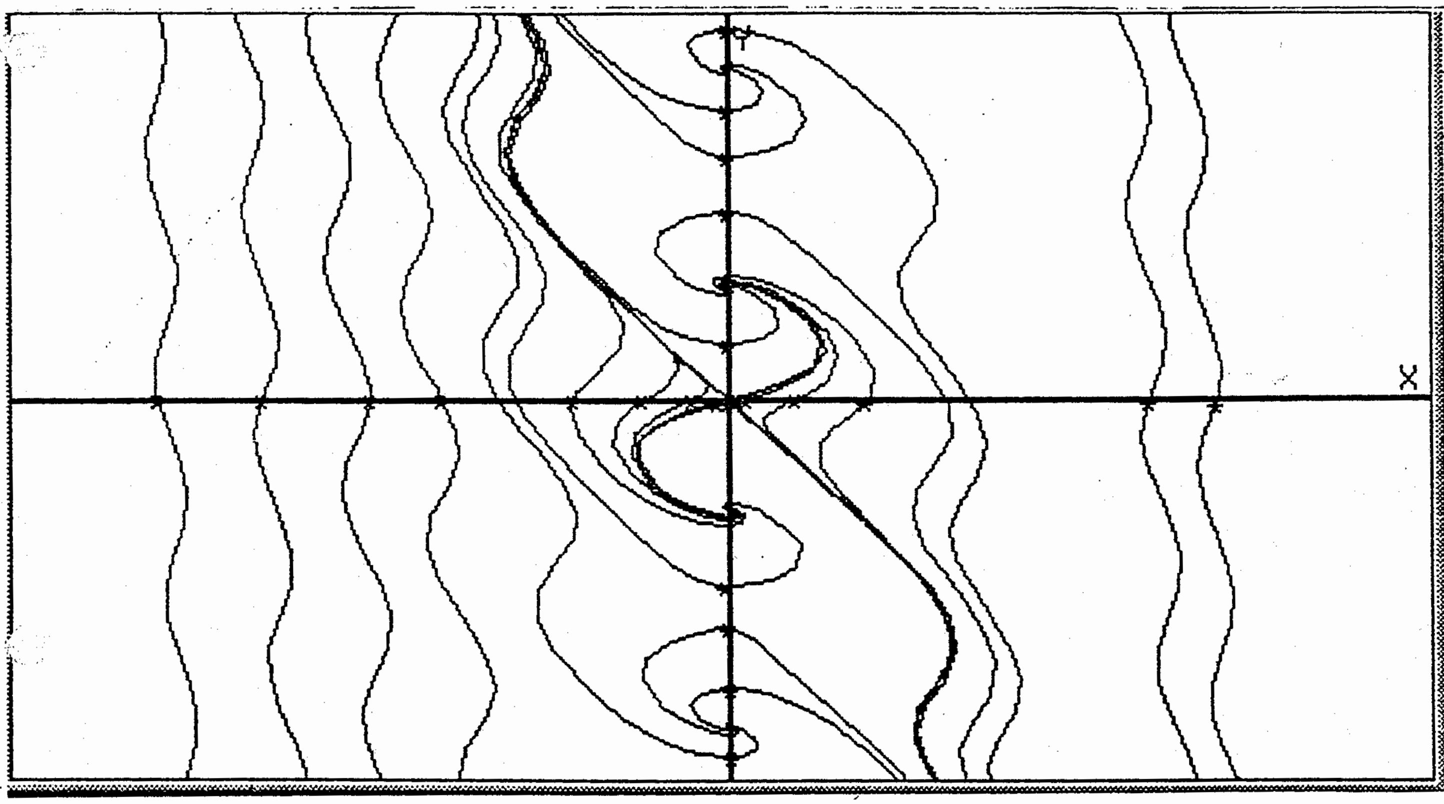
$$\begin{cases} \dot{x} = -\pi x - \pi y \\ \dot{y} = 2x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -\pi & -\pi \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\lambda(-\pi-\lambda)+2\pi=0 \qquad \lambda^2+\pi\lambda+2\pi=0$$

$$\Delta=\pi^2-8\pi<0 \qquad \operatorname{Re}\lambda_{1,2}=-\frac{\pi}{2}<0$$

Si tratta perciò di una spirale attrattiva.

Il grafico complessivo (non richiesto) è quello di seguito riportato.



N°6

Si ha $|\gamma| = |\gamma_1| + |\gamma_2|$

D'altra parte è banalmente $|\gamma_2| = 16\pi^4$.

Parametrizzando γ_1 in coordinate polari $\begin{cases} x = \vartheta^4 \cos\vartheta \\ y = \vartheta^4 \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ $\vartheta \in [0, 2\pi[$.

$$|\gamma_1| = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16\vartheta^6 + \vartheta^8}\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \vartheta^3 \sqrt{16 + \vartheta^2}\, d\vartheta$$

Tramite il cambio di variabili $t = 16 + \vartheta^2$

$$|\gamma_1| = \int_{16}^{16+4\pi^2} \frac{1}{2}(t-16)\sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{16}^{16+4\pi^2} \left(t^{3/2} - 16\, t^{1/2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} t^{5/2} - \frac{32}{3} t^{3/2}\right)\Bigg|_{16}^{16+4\pi^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{5}\left((16+4\pi^2)^{5/2} - 16^{5/2}\right) - \frac{32}{3}\left((16+4\pi^2)^{3/2} - 16^{3/2}\right)\right)\right]$$

Per quanto riguarda il calcolo della superficie racchiusa, facendo uso delle formule di Gauss-Green si ha

$$m(D) = \int_\gamma x\,dy = \int_0^{2\pi} \vartheta^4 \cos\vartheta \left(4\vartheta^3 \operatorname{sen}\vartheta + \vartheta^4 \cos\vartheta\right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 4\vartheta^7 \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \vartheta^8 \cos^2\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\vartheta^7 \operatorname{sen}(2\vartheta)\, d\vartheta + \int_0^{2\pi} \frac{\vartheta^8(1+\cos(2\vartheta))}{2} d\vartheta =$$

$$= \frac{\vartheta^9}{18}\Bigg|_0^{2\pi} + \ldots$$

$$= \frac{(2\pi)^9}{18} + \int_0^{4\pi} \frac{\alpha^7}{2^7} \operatorname{sen}(\alpha)\, d\alpha + \int_0^{4\pi} \frac{\alpha^8}{2^{10}} \cos(\alpha)\, d\alpha$$

e questi ultimi integrali si possono facilmente calcolare attraverso (lunga!!) integrazione per parti.

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1997/98
Analisi Matematica II (dott. Bruno Rubino)

L'Aquila, 15 Luglio 1998 **Recupero parziali**

Durata della prova: **30 minuti per parziale da recuperare**

Recupero del Parziale n. 1

Dimostrare che esiste unico $l \in \mathbb{R}$ tale che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\begin{cases} xy^2 \exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right) & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ l & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è di classe C^1. Dire se f è limitata.

Recupero del Parziale n. 2

Provare che l'equazione

$$\log\left(\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) + \arctan(x^2+y+x+z) - \sin(2y+x+z) = 0$$

definisce in forma implicita una e una sola funzione

$$y = \varphi(x,z)$$

in un intorno del punto $(0,0,0)$.

Stabilire poi se $(0,0)$ costituisce per la funzione φ un punto stazionario e in tal caso studiare la sua natura (massimo, minimo, sella).

Recupero del Parziale n. 3

Sia data l'equazione differenziale

$$au'' + bu' + cu = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Trovare le relazioni cui debbono soddisfare a, b, c affinché le soluzioni siano:

[**I caso**] tutte periodiche (in $\mathbb{R}$);

[**II caso**] tutte infinitesime per $t \longrightarrow +\infty$.

Recupero del Parziale n. 4

Dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u' = \log \sqrt{1 + u^2 + 2|t|}$$

sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Tracciarne poi un grafico approssimativo.

Recupero del Parziale n. 5

Sia dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = \arctan(\sin y) \\ \dot{y} = x. \end{cases}$$

- Facendo uso del teorema di linearizzazione, si stabilisca la natura dell'origine.
- Dopo aver indagato sull'esistenza di un integrale primo, disegnare approssimativamente le orbite del sistema.
- Facendo uso del punto precedente, si stabilisca la natura del punto $(0, -\pi)$.

Recupero del Parziale n. 6

Calcolare

$$\iint_{\mathcal{D}} y^3(e^{2x} + e^{2y})(1 + y)e^x e^y dx\, dy$$

dove

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0,\ y > 0,\ y^2(e^{2x} + e^{2y}) < 1\right\}.$$

RECUPERO ~~[illegible]~~ N° 1 del 15/7/98

$$\lim_{|(x,y)|\to 0} xy^2 \exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)=0$$

Infatti $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

Perciò, se $l=0$, la funzione è di classe C^0.
Dobbiamo ora verificare ~~[illegible]~~ se tale scelta implica che la funzione è di classe C^1. Il problema sussiste solo nell'origine
Le derivate parziali sono nulle nell'origine: infatti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} y^2 \exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)}{\cancel{x}}=0, \quad \lim_{y\to 0} \frac{x y^{\cancel{2}} \exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)}{\cancel{y}}=0$$

Per ~~la~~ differenziabilità si ha:

$$\lim_{|(x,y)|\to 0} \frac{xy^2\exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

~~passando~~

$$=\lim_{|(x,y)|\to 0}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)\right)xy=0$$

visto che ~~anche~~ $\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq 1 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

Si ha infine

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(y^2+\frac{y^6-x^2y^2}{(x^2+y^4)^2}xy^2\right)\exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(2xy+2\frac{x^3y-xy^5}{(x^2+y^4)^2}xy^2\right)\exp\left(\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right)$$

e passandole in coordinate

$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

si ha

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|\rho \operatorname{sen}\vartheta + \rho^{\cancel{*}} \cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \left(\operatorname{sen}^2\vartheta - \cos^2\vartheta\right)\right| \cdot$$

$$\cdot\, e^{\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta} \leq \frac{3}{2} \cancel{\cdot}\, e^{1/2}\, \rho \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

e

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left| 2\rho^{3/2} + 2 \frac{\cancel{\rho^2}\left(\cos^2\vartheta - \operatorname{sen}^2\vartheta\right)}{\cancel{\rho^4}} \cancel{\rho^2}\, \rho^{3/2} \cos^{\cancel{*}}\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \right| \cdot$$

$$\cdot\, |\cos\vartheta|\, |\operatorname{sen}\vartheta|^{1/2} \cdot e^{\cos\vartheta \operatorname{sen}\vartheta} \leq$$

$$\leq 3 e^{1/2} \rho^{3/2} \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

La funzione è quindi $C^1(\mathbb{R}^2)$

~~Per~~ In quanto ~~alla~~ riguarda la limitatezza, la risposta è negativa. Basta infatti scegliere $x = y^2$ e si ha

$$f(y^2, y) = y^4 e^{1/2} \xrightarrow[|y| \to +\infty]{} +\infty.$$

RECUPERO N° 2 del 15/7/98

__NOTA__: Il testo presentava purtroppo un errore di stampa. Leggasi
$y = \varphi(x,z)$ anziché $x = \varphi(y,z)$.

SOLUZIONE

Ricordandoci che nell'intorno dell'origine si ha

$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$, $\log(1+t) = t + o(t)$,

$\operatorname{arctg}(t) = t + o(t^2)$, $\operatorname{sen}(t) = t + o(t^2)$,

allora si ha

$$\log\left(\cos\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \log\left(1 - \tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + o\left((x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right)\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + o(x^2+y^2+z^2),$$

da cui per la nostra equazione si ha

$$-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) + o(x^2+y^2+z^2) + x^2 + y + \cancel{x} + \cancel{z} - (2y + \cancel{x} + \cancel{z}) = 0$$

e quindi

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 - y^2 - z^2) + o(x^2+y^2+z^2)$$

e passando agli infinitesimi $o(y) = o(x^2+z^2)$.

Risulta perciò infine

$$y = \tfrac{1}{2}(x^2 - z^2) + o(x^2+z^2)$$

per cui l'origine per la funzione φ è un punto di sella.

RECUPERO N° 3 del 15/7/98

Il polinomio caratteristico associato è dato da
$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Sia $a = 0$. Allora $b\lambda + c = 0$. Se anche $b = 0$, allora l'equazione differenziale diviene $\boxed{cu = 0}$
Se $c = 0$, allora ogni funzione è soluzione, per cui la scelta $(a, b, c) = (0,0,0)$ non è accettabile.
Il caso $(a, b, c) = (0, 0, c_0)$, $c_0 \neq 0$, implica $\boxed{u \equiv 0}$
che si può considerare periodica di qualsiasi periodo e infinitesima per $t \to +\infty$ (è nulla!).
Il caso $(a, b, c) = (0, b_0, c_0)$, $b_0 \neq 0$, implica
$\boxed{u' = -\frac{c_0}{b_0} u}$ che può essere riscritta nella forma $\boxed{u' = c_1 u}$

la cui soluzioni sono tutte della forma $u(t) = \alpha e^{c_1 t}$,
con $\alpha \in \mathbb{R}$ ~~[illegible]~~.
Tali soluzioni non saranno mai tutte periodiche $\forall \alpha$ ma saranno infinitesime per $t \uparrow +\infty$ se $c_1 = -\frac{c_0}{b_0} < 0$, ovvero se

$\boxed{bc > 0}$ $\boxed{a = 0}$

Esaminiamo ora il caso $\boxed{a \neq 0}$ Dividendo per a l'equazione possiamo sempre supporre che sia $\boxed{a = 1}$
Le soluzioni del polinomio caratteristico sono allora
$$\lambda_\mp = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Distinguiamo allora tre casi:

•) $b^2 - 4c = 0$. Allora la generica soluzione per l'equazione differenziale è data da

$$u(t) = (\alpha + \beta t)\, e^{-\frac{b}{2} t} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Tali soluzioni non saranno mai periodiche.
Le soluzioni sono tutte infinitesime per $t \uparrow +\infty$ se $b > 0$.

2) $b^2 - 4c > 0$. ~~Se $b < 0$, $c > 0$ le due radici sono positive e quindi non ci sono né tutte soluzioni periodiche né tutte soluzioni infinitesime per $t \uparrow +\infty$~~

Se $b > 0$, $c > 0$ le radici sono entrambe negative e quindi le soluzioni sono infinitesime per $t \uparrow +\infty$.
Negli altri casi almeno una delle due radici è positiva e quindi non si hanno tutte soluzioni infinitesime (né tantomeno periodiche!)

3) $b^2 - 4c < 0$. In tal caso $\lambda_\mp$ sono complesse coniugate. Allora si ha:

3i) $b = 0$, $c > 0$. Allora $\lambda_\mp = \mp 2\sqrt{c}\, i$ e le soluzioni sono date da

$$u(t) = \alpha_1 e^{2\sqrt{c}\, i t} + \alpha_2 e^{-2\sqrt{c}\, i t}$$

Le soluzioni sono tutte periodiche in $\mathbb{R}$, ma non infinitesime.

3ii) $b > 0$. Allora $\mathrm{Re}\, \lambda_\mp < 0$ e le soluzioni sono tutte infinitesime per $t \uparrow +\infty$, ma non periodiche

(iii) $b<0$. Allora $\mathrm{Re}\,\lambda_{\mp} > 0$ e le soluzioni non sono né periodiche né infinitesime per $t \uparrow +\infty$.

Riassumendo si ha:

[I CASO] soluzioni periodiche solo per $b=0$, $ac>0$

[II CASO] soluzioni infinitesime per $t \uparrow +\infty$ per

i) $a=0$, $b=0$, $c \neq 0$

ii) $a=0$, $bc>0$

iii) $ab>0$, $b^2-4ac=0$

iv) $ab>0$, $ac>0$, $b^2-4ac>0$

v) $ab>0$, $b^2-4ac<0$.

RECUPERO N° 4 del 15/7/98

L'esistenza globale è assicurata dato che

$$|u'(t)| = \left|\log\sqrt{1+u^2+2|t|}\right| \leq \log\left(1+\sqrt{1+u^2+2|t|}\right) \leq$$

$$\leq \sqrt{1+u^2+2|t|} \leq \sqrt{1+2|t|} + |u(t)|.$$

Risulta poi $u'(t) \geq 0$ $\forall u(t)$ e $\forall t$ e in particolare

$u'(t) > 0$ $\forall t \neq 0$ e $\boxed{u'(0) = 0 \iff u(0) = 0}$

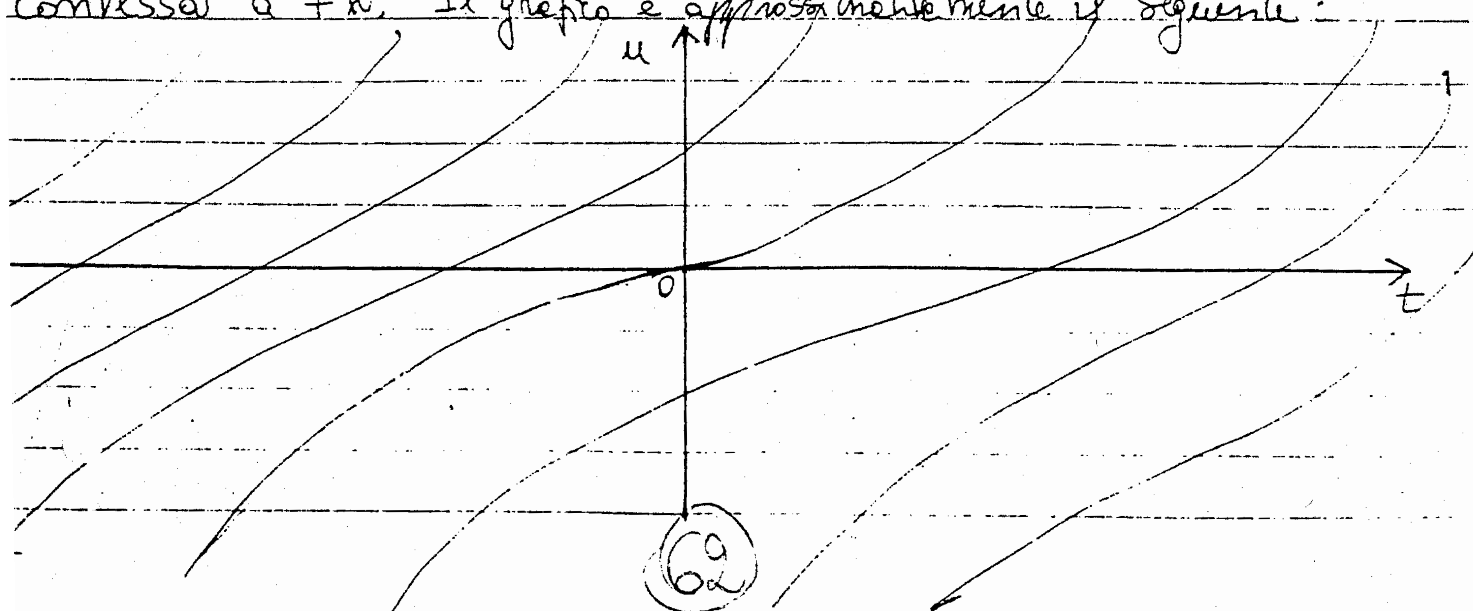
Inoltre $\lim_{|t|\to+\infty} u'(t) = +\infty$, perciò tutte le soluzioni

verificano la condizione

$$\lim_{t\to-\infty} u(t) = -\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty.$$

Risulta poi $$u''(t) = \frac{u(t)u'(t) + \operatorname{sgn}(t)}{1+u^2+2|t|}$$

e in base ai limiti appena calcolati risulta che la soluzione è definitivamente concava a $-\infty$ e definitivamente convessa a $+\infty$. Il grafico è approssimativamente il seguente:



RECUPERO N°5 del 15/7/98

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} y) \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

Sono punti critici tutte le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} y) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \end{cases}$$

In particolare lo sono l'origine ed il punto $(0, -\pi)$.

Linearizzando attorno l'origine si ha:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \lambda^2 - 1 = 0 \\ \lambda = \mp 1 . \end{matrix}$$

Si tratta perciò di un punto di sella

Si ha poi che

$$E(x,y) = -\int_0^y \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)\, dt + \int_0^x t\, dt$$

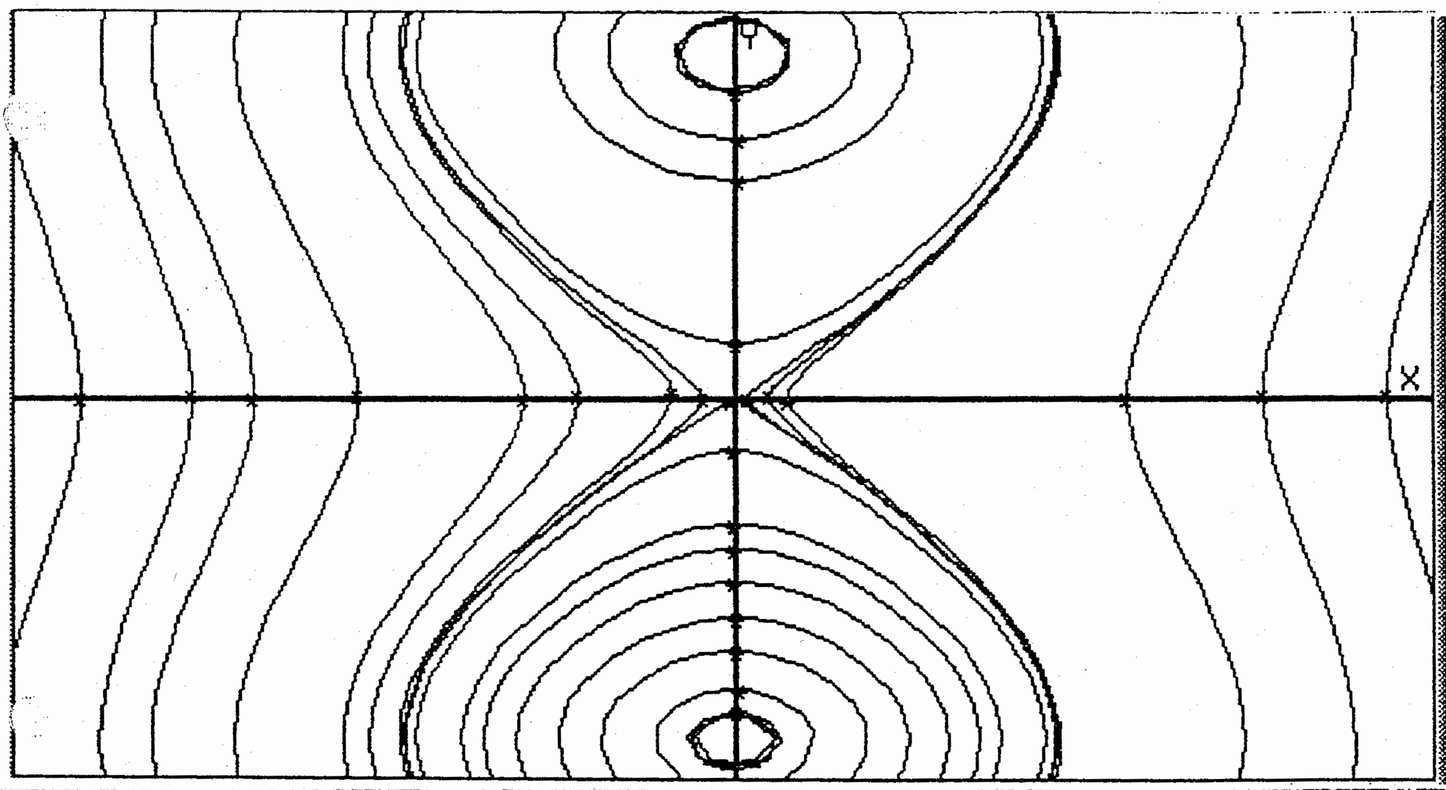
è un integrale primo, da cui le curve di livello sono date da

$$\frac{x^2}{2} - \int_0^y \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)\, dt = k$$

che risulta pari sia in x che in y. Basta allora studiarle nel primo quadrante. Si ha (k può qui assumere qualunque valore $k \in \mathbb{R}$)

$$x = \sqrt{2}\, K \pm \sqrt{2} \int_0^y \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t)\, dt$$

Il grafico è quello riportato in figura.
In particolare il punto $(0, -\pi)$ è un centro (bas utilizzare la simmetria della funzione $\operatorname{sen} t$ attorno al valore $t = -\pi$).



RECUPERO N°6 del [redacted] 15/7/98

Si tratta intanto di cercare un opportuno cambiamento di variabili che trasformi D nel quadrante positivo del cerchio unitario: poichè

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0,\ (ye^x)^2 + (ye^y)^2 < 1\}$$

Tramite il cambio di variabile

$$\begin{cases} w = ye^x \\ z = ye^y \end{cases}$$

D si trasforma in

$$\tilde{D} = \{(w,z) \in \mathbb{R}^2 : w>0,\ z>0,\ w^2+z^2<1\}$$

e risulta

$$\frac{1}{|J|} = \left| \det \begin{pmatrix} ye^x & 0 \\ e^x & e^y(1+y) \end{pmatrix} \right| = y e^x e^y (1+y).$$

Perciò il nostro integrale si è trasformato in

$$\iint_{\tilde{D}} (w^2+z^2)\, dw\, dz =$$ passando in coordinate polari

$$w = \rho\cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0, \pi/2]$$
$$z = \rho \operatorname{sen}\vartheta \qquad 0<\rho<1$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \rho^2 \cdot \rho\, d\rho\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Analisi Matematica II – CdL in Matematica
Esercizi di riepilogo – A.A. 97/98

Esercizio 1

Trovare i punti stazionari delle seguenti funzioni e stabilire la loro natura:

a. $f(x,y) = \dfrac{x+y-1}{x^2+y^2}$

b. $f(x,y) = (x+y)e^{-\frac{1}{2}xy}$

c. $f(x,y) = x\log(x+y)$

d. $f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2)$

e. $f(x,y) = e^{x^2} + y^2 - 1 - x^2$

f. $f(x,y,z) = e^{x^2-y^2}e^{2z^2+4xz}$

g. $f(x,y,z) = \log(1+x^2+y^2+z^2) - x^2$

Esercizio 2

Date le seguenti funzioni $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definite da:

a. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^5y^5+2xy^4-3y^5}{(x^4+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\left[x^2(y-1)-y^2(y+1)\right]}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^5y}{x^4+4y^4}\sin\frac{1}{3x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

d. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)\sin\left[(x+y)^2\right]}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

e. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\left(1-e^{-y}\right)\cos\frac{1}{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(x^6+y^2+x^6y^4)-\log(x^6+y^2)}{xy-\sin(xy)} & \text{se } xy \neq 0 \\ 0 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$

1. verificare la continuità nell'origine
2. calcolare, se ciò ha senso, le derivate direzionali nell'origine
3. verificare, se ciò ha senso, la differenziabilità nell'origine
4. determinare, quando esiste, l'equazione del piano tangente nell'origine
5. per le funzioni a, b, c, d, e, stabilire se esiste il limite all'infinito ed eventualmente calcolarlo.

Esercizio 3

Sia dato

$$\begin{aligned} C = \ & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \tan x + \sin(y+z-x) + \cos(xyz) - 1 = 0, \\ & \log(1+4xyz) + \arcsin(x+y) = 0\}. \end{aligned}$$

a) Dimostrare che in un intorno di $(0,0,0)$ si possono esplicitare su C due coordinate in funzione della terza, in particolare

$$\begin{cases} x = x(y) \\ z = z(y). \end{cases}$$

b) Trovare la parametrizzazione con un errore $o(y^2)$.

Esercizio 4

Provare che l'equazione

$$e^x \tan y + e^{x-y} - 1 - z^2 = 0$$

definisce in forma implicita una e una sola funzione

$$x = \varphi(y,z)$$

in un intorno del punto $(0,0,0)$.
Stabilire poi se $(0,0)$ costituisce per la funzione φ un punto stazionario e in tal caso studiare la sua natura (massimo, minimo, sella).

Esercizio 5

Dato l'insieme

$$K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{1-x^2-y^2},\ x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\right\},$$

provare che è una varietà differenziabile uni-dimensionale compatta e calcolare il massimo e il minimo valore che assume su di essa la funzione

$$f(x,y,z) = \left(y - \frac{1}{4}\right)^2.$$

Esercizio 6

Trovare la distanza dei due insiemi A e B di $\mathbb{R}^2$ descritti rispettivamente da

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 - 5,\ 0 \le x \le 2\}.$$

Esercizio 7

Sia $\Gamma = C_1 \cap C_2$ dove C_1 e C_2 sono i cilindri dati da

$$C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2\}$$
$$C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = \sigma^2\}.$$

a) Dire se per ogni $P \in \Gamma$ è possibile, in un intorno di P, esplicitare su Γ due variabili in funzione della terza nel caso $r < \sigma$.

b) Studiare il caso $r = \sigma$.

Esercizio 8

Dimostrare che l'equazione

$$2x^2 + y + xe^{x+y} = 1 + ex$$

definisce implicitamente una e una sola funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 0$, $y = 1$. Dimostrare inoltre che tale funzione ha un massimo locale in $x = 0$.

Esercizio 9

Determinare, anche utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y, z) = z^2 + xy$$

sul cono

$$C = \left\{z \geq \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \leq z \leq 1\right\}.$$

Esercizio 10

Sia D il disco unitario di $\mathbb{R}^2$ e sia $f(x, y)$ definita da:

$$f(x, y) = e^{y-x^2-y^2}.$$

Determinare il massimo e il minimo di f su D.

Esercizio 11

Determinare il minimo di

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

lungo la curva

$$\Gamma = \{x^3 + y^3 = 1\}.$$

Qual è il sup di f su tale curva?

Esercizio 12

Data la funzione

$$f(x, y) = e^{-x}\left(y^2 - xy\right)$$

a) Determinare i punti di massimo e di minimo relativi di f in $\mathbb{R}^2$ e l'estremo superiore e inferiore di f in $\mathbb{R}^2$.

b) Data una costante $a > 0$, determinare, al variare di a, il massimo e il minimo di f sul triangolo di vertici $(0, 0)$, (a, a) e $(a, 0)$.

Esercizio 13

Determinare il minimo di

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sull'insieme

$$\{z^2 - xy = 1\}.$$

L'estremo superiore di f su tale insieme è finito?

Esercizio 14

Determinare il massimo e il minimo di

$$f(x,y,z) = xyz$$

sul cilindro

$$C = \left\{x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\right\}.$$

Esercizio 15

Si dimostri che la successione di funzioni

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}$$

a) converge a zero $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) converge uniformemente in $[z, +\infty)$, $\forall r > 0$;

c) non converge uniformemente in $[0,1]$.

Esercizio 16

Si determino gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione

$$f_n(x) = n\sin(nx)e^{-nx}.$$

Esercizio 17

Mostrare che la successione

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+nx)^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

converge puntualmente, ma non uniformemente, in $(0,1)$.

Esercizio 18

Studiare convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-|x|}}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Esercizio 19

Si considerino le funzioni $f_n : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = min\left\{n^2x^2, e^{-nx}\right\}.$$

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$$

Esercizio 20

Sia data la successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definite come

$$f_x(x) = \log\left(\frac{1}{1+2nx^2}\right) - \log\left(\frac{1}{1+nx^2}\right).$$

a) Stabilirne il limite puntuale su $\mathbb{R}$. Concludere se la convergenza può essere uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

b) Caratterizzare gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme.

Esercizio 21

Stabilire gli intervalli di convergenza puntuale e uniforme per la serie di funzioni reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

nei casi

a) $a_n(x) = \sin\left(\dfrac{x^n}{n^2}\right)$;

b) $a_n(x) = n \sin\left(\dfrac{x^n}{n^2}\right)$;

c) $a_n(x) = n \arctan(n) \sin\left(\dfrac{x^n}{n^2}\right)$.

Esercizio 22

Dato il sistema di equazioni differenziali lineari

$$Y' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y + B(t),$$

verificare che

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

è una matrice fondamentale per l'omogeneo associato. Trovare la soluzione del non omogeneo che verifichi la condizione iniziale $Y(0) = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ nei due casi $B(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ e $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}$

Esercizio 23

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(4)} + 2y'' + y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 2 \\ y'''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 24

Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x^2y'' + xy' - y = x^3$$

dopo aver osservato che $y(x) = x$ è una soluzione particolare per l'equazione differenziale omogenea associata.

Esercizio 25

Trovare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali lineari non omogenei

$$Y' = AY + B(t)$$

in ognuno dei seguenti casi:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos t} \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix}$

Trovare in particolare, in ognuno dei casi presi in esame, la soluzione che verifica la condizione iniziale $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 26

Si determini b in modo che la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \sin x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{2}) = b \end{cases}$$

abbia derivata prima che non si annulla mai in $(0, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 27

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 1} e^n \arctan\left(\frac{x}{\pi^n}\right).$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 28

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(\sin x)^n}{n + x^2}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 29

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n \geq 1} \left(\sqrt[n]{e^{nx} + \pi} - e^x\right).$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme e totale.

Esercizio 30

- Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} \sin\left(\dfrac{\sin(x^n)}{x^{4n}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Si consideri ora la serie

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x).$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.

Esercizio 31

Si determini la soluzione $y = y(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' - y = \begin{cases} e^x & x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) & x > 0 \end{cases} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -\frac{1}{3} \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

abbia derivata prima che non si annulla mai in $(0, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 32

Studiare l'equazione differenziale

$$u' = u^2 + u^4$$

e tracciarne i grafici delle soluzioni nel loro intervallo massimale di esistenza.

Esercizio 33

Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$tu' = \sqrt{1 - u^2},$$

precisando l'intervallo massimale di esistenza e disegnandone i grafici. Cosa si può dire del relativo problema di Cauchy con la condizione $u(0) = \alpha$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?

Esercizio 34

Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$2uu' = \sqrt{|u^2 - 1|},$$

precisandone gli intervalli massimali di esistenza e tracciandone i grafici.

Esercizio 35

Si consideri la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^n}{n!}.$$

a) Calcolare il raggio di convergenza e la somma $f = f(x)$ della serie.

b) Dimostrare che per ogni $k \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(n-k)x^n}{n!} = P_k(x) + e^x(x-k),$$

dove P_k è un polinomio di grado $k-1$.

c) Calcolare P_2 e P_3.

Esercizio 36

Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^n.$$

a) Studiare la convergenza puntuale.

b) Calcolare la somma della serie.

c) Studiare la convergenza uniforme.

Esercizio 37

Sia $\{a_n\}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \\ a_{n+2} = \frac{n^2+n+6}{(n+1)(n+2)} a_n. \end{cases}$$

Dimostrare che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

converge su $(-1, 1)$.

Esercizio 38

Sia

$$Q_\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| \geq \alpha \text{ oppure } |x-y| \geq \alpha,\ \alpha > 0\}$$

e $f : Q_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = -\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Calcolare il *sup* e l'*inf* di f sul suo dominio di definizione, stabilendo se trattasi rispettivamente di massimo e minimo.
Si consideri ora la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (f(x,y))^n$$

dove $f : Q_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ è la funzione prima definita.

a) Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la serie risulta essere puntualmente convergente su tutto Q_α.

b) Trovare per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ la convergenza è uniforme su tutto Q_α.

c) Calcolare, dove ciò ha senso, la somma della serie.

Esercizio 39

Studiare le proprietà di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right).$$

In particolare, determinare su quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ si ha convergenza uniforme, dire se la serie è derivabile termine a termine e, infine, calcolarne la somma.

Esercizio 40

Determinare la matrice fondamentale per il sistema

$$Y' = AY$$

in ognuno dei seguenti casi:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 41

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 2y \\ \\ \dot{y} = 3x - y. \end{cases}$$

Studiare la natura degli eventuali punti critici e analizzare il comportamento qualitativo delle soluzioni nel piano delle fasi.

Esercizio 42

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = 6y - 2xy \\ \\ \dot{y} = 2x + y^2. \end{cases}$$

Studiare la natura degli eventuali punti critici e analizzare il comportamento qualitativo delle soluzioni nel piano delle fasi, anche attraverso la determinazione di eventuali integrali primi.

Esercizio 43

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

Studiare la stabilità dei punti critici e descrivere l'andamento qualitativo delle soluzioni nel piano delle fasi (x, y).

Esercizio 44

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases}$$

Descrivere l'andamento qualitativo delle soluzioni nel piano delle fasi (x, y).

Esercizio 45

Studiare la stabilità dell'origine per le seguenti equazioni differenziali ordinarie,

1. $x'' - 3x' + x = 0$;
2. $x'' + 3x' + x = 0$;
3. $x'' - 3x' + 2x = 0$;
4. $x'' - x' - 6x = 0$;
5. $x'' - 3x' + 2x = 0$.

Esercizio 46

Consideriamo i sistemi di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 2y. \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2 \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$$

Verificare che $V(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ è una funzione di Lyapunov per entrambi i sistemi traendone le opportune conseguenze riguardo alla stabilità dell'origine per ognuno di essi. Descrivere infine l'andamento qualitativo delle soluzioni nel piano delle fasi (x, y).

Esercizio 47

Trovare la serie di Fourier per f, estesa 2π-periodica, definita per $x \in [-\pi, +\pi]$ rispettivamente da

1. $f(x) = e^x$,
2. $f(x) = x^2$,
3. $f(x) = x$,
4. $f(x) = \sin^3 x$

Esercizio 48

Trovare la somma nel punto $x = \pi$ della serie di Fourier reale di f definita per $x \in [-\pi, +\pi]$ da $f(x) = e^x$ ed estesa 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 49

Calcolare il

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\pi} x^{\alpha} \sin(nx)\, dx$$

al variare di $\alpha > -2$.

Esercizio 50

Trovare la serie di Fourier reale di f definita per $x \in [-\pi, +\pi]$ da $f(x) = x^4$ ed estesa 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$. Trovare una limitazione per l'errore che si commette approssimando f con i primi tre termini della serie.

Esercizio 51

Trovare un numero N tale che la somma parziale $S_N(x)$ della serie di Fourier reale di f, definita per $x \in [-\pi, +\pi]$ da $f(x) = |x|$ ed estesa 2π-periodica su tutto $\mathbb{R}$, approssimi f con un errore non superiore a $1/10$.

Esercizio 52

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \left[\frac{2x}{\sqrt{2x^2 + y^2 - 1}} + u^2(x) \log \sqrt{1 + y^2} \right] dx +$$
$$\left[\frac{y}{\sqrt{2x^2 + y^2 - 1}} + \frac{y}{1 + y^2} \left(x^2 u(x) + \frac{1}{3} u^3(x) + u(x) \right) \right] dy$$

dove u è una funzione reale tale che $u(1) = 2$.

- Dimostrare che $\exists!\, u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $u \in C^1(\mathbf{R})$ che rende la forma chiusa.
- Dimostrare che con tale scelta della funzione u la forma risulta esatta (può essere utile osservare che la somma di due forme esatte è ancora una forma esatta).

Esercizio 53

Caratterizzare le funzioni T di classe $C^1(\mathbf{R}^4)$ tali che la forma differenziale ω definita come

$$\omega = 2xt\, \mathrm{d}x - t \cos y\, \mathrm{d}y + 3t \sin z\, \mathrm{d}z + T(x, y, z, t)\, \mathrm{d}t$$

sia integrabile in $\mathbf{R}^4$ e calcolare in corrispondenza di ogni funzione T l'insieme delle primitive di ω.

Esercizio 54

Si calcoli la lunghezza della curva γ espressa, in coordinate polari, dall'equazione

$$\rho = \sin^2(e\vartheta) \quad \vartheta \in [0, \pi/2].$$

Si scriva l'equazione della retta tangente al sostegno di γ nel punto $\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{3}{8}\right)$.
Si calcoli infine l'area della regione interna alla curva γ.

A-6

Esercizio 55

Si consideri la forma differenziale ω definita da

$$\omega = \frac{x}{x^2+z^2}dx + \left(\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}} + \cos\sqrt{y}\right)dy + \frac{z}{x^2+z^2}dz.$$

- Verificare che ω è chiusa.
- Dire dove è definita e di classe C^1 e se è possibile prolungarla in modo C^1.
- Stabilire *a priori* se è esatta e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva.
- calcolare, se ha senso, il lavoro per andare dal punto $A = (1,0,0)$ al punto $B = (-1,0,0)$ lungo l'ellisse del piano $y = 0$ di equazione $x^2 + 2z^2 = 1$ orientata in senso orario.

Esercizio 56

Calcolare

$$\iint_A y^3 \, dx \, dy,$$

dove $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{2} \le y \le 2x^2, \ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}\right\}$.

Esercizio 57

Calcolare

$$\iint_T xy \, dx \, dy,$$

dove $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0, \ y \log y \le x \le y\}$.

Esercizio 58

Sia $\mathcal{T}$ la piramide con base triangolare $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le y \le 1, \ z = 0\}$ e vertice nel punto $P = (1,1,1)$. Calcolare

$$\iiint_{\mathcal{T}} xz \, dx \, dy \, dz.$$

Dimostrare che

$$\iiint_{\mathcal{T}} f(x)f(z) \, dx \, dy \, dz < 0$$

per ogni $f : \ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, non identicamente nulla e tale che $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Esercizio 59

Si consideri la funzione, definita per $\lambda > 0$,

$$f(\lambda) = \iint_Q \frac{x - \lambda y}{x + \lambda y} \, dx \, dy,$$

dove $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, \ 0 < y < 1\}$.

- Dimostrare che $f(\lambda)$ è finito per ogni $\lambda > 0$.

- Dimostrare che $f(\lambda) = -f(1/\lambda)$ per ogni $\lambda > 0$.
- Dimostrare che f è derivabie e decrescente.
- Calcolare $\lim_{\lambda \to 0^+} f(\lambda)$, $\lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda)$.
- Per quale $\lambda > 0$ si ha $f(\lambda) = 0$?
- Calcolare $f(2)$.

Esercizio 60

Calcolare

$$\iiint_{\mathcal{T}} \frac{1}{1 - x - y + xy} \, dx \, dy$$

dove $\mathcal{T}$ è il triangolo avente vertici in $(0,0)$, $(0,1/2)$, $(1/2,1/2)$.

Esercizio 61

Calcolare

$$\lim_{r \to +\infty} \iint_{\mathcal{D}_r} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

dove, per $r > 0$,

$$\mathcal{D}_r = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; \frac{r^2}{2} \leq x^2 + y^2 \leq r^2 \right\}.$$

Esercizio 62

Sia $\mathcal{Q} = \left\{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \; 1 \leq t_2 \leq 2 \right\}$ ed $f : \; \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(t_1, t_2) = \int_1^{t_2} \frac{e^{t_1 \xi}}{\xi} d\xi.$$

Calcolare

$$\iint_{\mathcal{Q}} f(t_1, t_2) \, dt_1 \, dt_2.$$

Esercizio 63

Calcolare

$$\int_\gamma \frac{(x_2 x_4)^2}{x_1 x_2 + x_3 x_4} \, ds$$

dove $\gamma : \; [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ è la curva definita da $\gamma(t) = (t^2/2, 8, 3t, 4t)$.

Esercizio 64

Verificare l'uguaglianza stabilita dal Teorema di Stokes per il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (z, 0, -x)$$

e la superficie $\mathcal{S}$ ottenuta dalla frontiera della regione

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z \geq x^2 + y^2, \; 1 \leq z \leq x + 4 \right\}$$

togliendole la base superiore.

Esercizio 65

Dato il campo vettoriale irrotazionale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{xz}{x^2+y^2+2y}, \frac{(1+y)z}{x^2+y^2+2y}, \log\sqrt{x^2+y^2+2y} \right),$$

- stabilire *a priori* se è conservativo e, in caso affermativo, calcolarne il potenziale;
- calcolarne il flusso uscente dalla frontiera $\mathcal{S}$ del dominio

  $$\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 3 \le x^2+y^2+2y \le 8, \; |z| \le 1 \right\},$$

  cioè l'integrale $\iint_{\mathcal{S}} F \cdot n \, dS$, essendo n il versore normale ad $\mathcal{S}$ orientato verso l'esterno.

Esercizio 66

Calcolare il volume della regione

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2+y^2z^2 \le 1, \; z \ge \sqrt{x^2+y^2} \right\}$$

e l'area della sua frontiera.

Esercizio 67

Provare che la funzione

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$$

è integrabile in senso improprio nella regione

$$\mathcal{T} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \ge 0, \; y \ge 0, \; x+y \le 1 \right\}$$

e calcolarne l'integrale.

Esercizio 68

Dire per quali $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \iint_{\mathcal{B}_n} \frac{log(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)^\alpha} \, dx \, dy$$

risulta convergente, dove $\mathcal{B}_n$ è la palla di $\mathbb{R}^2$ di centro l'origine e raggio n.

Esercizio 69

Calcolare l'area dell'insieme misurabile $\mathcal{T}$ la cui frontiera è sostegno della curva parametrizzata nel modo seguente:

$$\begin{cases} x = (1+\cos t)\cos t \\ \\ y = (1+\cos t)\sin t \end{cases} \qquad -\pi \le t \le +\pi.$$

Esercizio 70

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{2tu}{t^2-u^2} \\ u(1) = 2. \end{cases}$$

(Studiare eventuali simmetrie; risolvere l'equazione ponendo $u = tz$; imporre la condizione iniziale; descrivere la soluzione, precisandone dominio di definizione e grafico. Esistono altre soluzioi?)

Esercizio 71

Studiare la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^2 e^{nx},$$

precisando dove converge puntualmente e dove uniformemente. Trovarne quindi la somma.

Esercizio 72

Risolvere il sistema differenziale

$$\begin{cases} u' + v = \cos t \\ v' + u = \sin t \end{cases}$$

a) ricorrendo ai metodi utilizzati per i sistemi lineari b) passando a un'equazione di ordine superiore al primo.

Esercizio 73

Dire se l'equazione

$$(t^2 - 4)u' + tu = 4$$

ha soluzioni definite in $\mathbb{R}$.

Esercizio 74

Data la funzione

$$f(x, y) = (y - x^2)\log(x^2 + y^2),$$

dire dove è definita e quale è il suo segno, riportando queste informazioni nel piano cartesiano; dire se si può prolungare con continuità in qualche punto e se ha limite all'infinito.

Esercizio 75

Studiare le soluzioni dell'equazione

$$u'u - 1 = \frac{u^2}{t},$$

dopo aver indagato circa eventuali simmetrie. Risolvere l'equazione con la condizione iniziale
a) $u(-1) = 1$
b) $u(-1) = 0$.
In entrambi i casi, precisare l'intervallo massimale in cui esiste la soluzione.

Esercizio 76

Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}} x^n}{1 + x^{2n}}.$$

Esercizio 77

Data l'equazione differenziale

$$y' = \frac{y-1}{x^2-1},$$

a) studiare *a priori* l'andamento delle soluzioni;
b) studiare *a posteriori* l'andamento delle soluzioni;
c) confrontare i risultati dei due primi punti.

Esercizio 78

Si studi l'equazione differenziale

$$y''' - (1-\sqrt{\alpha})y'' + (\alpha^3 - \sqrt{\alpha})y' - \alpha^3 y = 0$$

con $\alpha \geq 0$. In particolare stabilire se
a) esistono soluzioni periodiche;
b) esistono soluzioni $y = y(x)$ tali che

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty,$$

dove ∞ sta qui sia per $+\infty$ che per $-\infty$.

Esercizio 79

Trovare la distanza del punto $(1,-2,-1)$ dalla retta $x = y = z$, cioè la minima distanza tra il punto dato e un punto della retta. Analogamente, la distanza del punto dal piano $x + y - z = 2$.

Esercizio 80

Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per calcolare la distanza tra la retta $x + y = 4$ e l'ellisse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, cioè la minima distanza tra un punto (x, y) sulla retta e un punto (u, v) sull'ellisse.

Esercizio 81

Studiare il luogo degli zeri della funzione

$$f(x,y) = y - xe^{-xy};$$

far vedere che è una curva cartesiana grafico di una funzione $F(x)$ definita in $\mathbb{R}$ e dispari; si disegni tale grafico.

Esercizio 82

Disegnare il grafico dell'estensione periodica della funzione

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{in } [-\pi, 0) \\ x - \pi + \frac{\pi^2}{2} & \text{in } [0, \pi]. \end{cases}$$

Scrivere il suo sviluppo in serie di Fourier e discutere la convergenza puntuale e uniforme di tale serie.

Esercizio 83

Si consideri il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u' + v = t \\ v'' - 3v + 2u = 0. \end{cases}$$

Risolvere il problema di Cauchy per il sistema con dati iniziali $u(0) = 1$, $v(0) = 0$, $v'(0) = -1$.

Esercizio 84

Risolvere il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} 2(x-1)u' = 2u + [(x-2)e^{-x} - xe^{x}]u^2 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

e scrivere il suo sviluppo di Taylor fino all'ordine due nell'origine.

Esercizio 85

Studiare l'equazione differenziale

$$tu' \sin(2u) = \sin^2(u) - t^2;$$

in particolare: a) trovare simmetrie e periodicità;
b) risolvere l'equazione dopo aver effettuato un cambio di variabile;
c) studiare gli intervalli in cui sono definite le soluzioni;
d) tracciare i grafici delle soluzioni (conviene studiare *a priori* il segno della derivata; osservare le discontinuità di tale derivata).

Esercizio 86

Calcolare (se esiste finito) l'integrale della funzione

$$f(x,y,z) = z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}$$

nell'insieme

$$D = \left\{(x,y,z) : \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} < z < h\right\},$$

essendo $h > 0$ e $0 < \alpha < \pi$.

Esercizio 87

Calcolare la distanza del punto x_0 dal piano $ax = b$.

Esercizio 88

Dati

$$f(x,y,z) = xy - z$$

$$K = \left\{x^2+y^2-2x \le z \le \frac{1}{2}(x^2+y^2-2x)\right\},$$

calcolare:
a) il massimo e il minimo di f su K;
b) il flusso uscente da K del campo ∇f, cioè

$$\int_{\partial K} \nabla f \cdot n d\sigma,$$

essendo n il versore normale esterno.

Esercizio 89

Studiare la convergenza puntuale e uniforme per la serie di funzioni

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-2)![\log(x^n+n!) - \log(n!)].$$

Esercizio 90

Trovare per quali valori $k \in \mathbb{R}$ risulta integrabile la funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{y^2 + e^{-\frac{k}{x^2}}}$$

su

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 0 \leq y \leq e^{-\frac{1}{x^2}}\right\}.$$

Esercizio 91

Calcolare lestremo superiore e l'estremo inferiore (precisando se sono rispettivamente massimo e minimo) della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 - xy + y^2}$$

nell'insieme

$$A = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

Esercizio 92

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Dire se f è continua in $(0,0)$.
b) Dire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 93

Studiare il problemia di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \log\left(2\frac{1-\cos(y)}{y^2}\right) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e tracciare un grafico approssimativo della soluzione.

Esercizio 94

Calcolare l'integrale

$$\int_Q\int (x^2 - y^2)e^{x+y)^2}dxdy$$

dove

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Esercizio 95

Dire per quali $\alpha > 0$ si ha

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\log(|x| + |y| + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^\alpha} dxdy < +\infty.$$

Esercizio 96

Dato il dominio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \le 1\}$, dire per quali α reali si ha

$$\int\int_D [x^2 + y^2 + 1]^\alpha dxdy < +\infty.$$

Esercizio 97

Per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ si considerino il rettangolo

$$Q(x_0, y_0) = \{(x, y) : |x| \le |x_0|, |y| \le |y_0|\}$$

e la funzione

$$f(x_0, y_0) = \int\int_{Q(x_0,y_0)} (t^2 + s^2)^{\frac{1}{2}} dtds.$$

a) Dimostrare che f si può estendere con continuità a $\mathbb{R}^2$.
b) Dire se tale estensione è di classe C^1.

Esercizio 98

Sia data una successione di polinomi di $3^{mathrmo}$ grado

$$P_n(x) = a_n x^3 + b_n x^2 + c_n x + d_n,$$

tale che il limite

$$lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$$

esiste finito per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Provare che:
a) le successioni (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) dei coefficienti sono limitate;
b) $f(x)$ è un polinomio;
c) la convergenza $P_n(x) \to f(x)$ è uniforme sui compatti di $\mathbb{R}$.

Esercizio 99

Sia

$$I_n = \int\int_{B_n} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

dove B_n la palla di $\mathbb{R}^2$ di centro $(n + \delta_n, 0)$ e raggio n.
Provare che se

$$\delta \ge \sqrt{2lnn}$$

allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} I_n < \infty.$$

Esercizio 100

Siano α e β due forme differenziali lineari, continue su tutto $\mathbb{R}^2$ e tali che esiste una funzione $\psi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ per cui

$$\int_\gamma \beta = \psi(p,q) \int_\gamma \alpha \tag{0.1}$$

per ogni curva γ di estremi p, q.
Provare che:
a) se $\psi(p,q) \equiv \lambda$ (costante), allora $\beta = \lambda\alpha$;
b) se $\psi(p,q)$ non è costante, allora α e β sono forme esatte.
Trovare poi un esempio di α e β verificanti (0.1) per qualche $\psi(p,q)$ continua e non costante.

Esercizio 101

a) Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione L-lipschitziana; provare che per ogni (x_0, y_0) ed ogni r

$$\int\int_{B_r(x_0,y_0)} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| dx dy \leq C r^3,$$

e trovare la migliore costante C (in funzione di L).
b) Mostrare che se f è di classe C^1 e

$$\int\int_{B_r(x_0,y_0)} |f(x,y) - f(x_0,y_0)| dx dy \leq C r^4,$$

per ogni (x_0, y_0) ed ogni r, allora f è costante.

Esercizio 102

Sia $(u(t), v(t))$ una soluzione del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u' = uv^2 \\ v' = u^2 v \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq T)$$

con le condizioni iniziali

$$\begin{cases} u(0) = a \geq 0 \\ v(0) = b \geq 0. \end{cases}$$

a) Provare che $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$.
b) Provare che se $a \neq b$ allora $u(t) \neq v(t)$ per ogni t.
c) Provare che se $a > 0$, $b > 0$ allora non può essere $T = +\infty$.

Esercizio 103

Sia $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ una funzione continua, e sia (δ_n) una successione di numeri reali positivi. Poniamo

$$a_n = \int_0^{\delta_n} f(nx) dx.$$

a) Provare che se $\delta_n = n^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$\sum \delta_n < +\infty \Rightarrow \sum a_n < +\infty. \tag{0.2}$$

b) Provare che se f è limitata, allora (0.2) vale per ogni successione (δ_n).
c) Provare che se $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$ allora (0.2) vale per ogni (δ_n).

Esercizio 104

Provare che per qualche costante $\delta > 0$ si ha

$$e^{x^2+y^2} \geq \delta(x+y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Determinare la costante ottimale.

Esercizio 105

Sia (a_k) una successione di reali non negativi. Provare che se

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$$

allora tutti gli a_k sono nulli tranne al più uno.

Esercizio 106

Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1, e siano u, v due soluzioni dell'equazione

$$y'' = f(y)$$

tali che

$$u(0) < v(0), \qquad u'(0) < v'(0).$$

a) Provare che, in generale, non è vero che

$$u(x) \leq v(x) \quad \text{per ogni} x \geq 0. \tag{0.3}$$

b) Provare che se f è crescente, allora (0.3) è valida.

Esercizio 107

Sia $f(x,y)$ una funzione di classe C^1 definita in $\mathbb{R}^2$ tale che

$$f(x,y) = 0$$

sulla retta $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$.
a) Provare che

$$f_x = -f_y \quad \text{su } \Delta.$$

b) Provare che la funzione

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{x-y} \quad (x,y) \notin \Delta$$

è estendibile con continuità ad $\mathbb{R}^2$.
c) Si può estendere il risultato di (b) al caso in cui

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{\phi(x,y)} \quad (x,y) \notin \Delta$$

per una arbitraria funzione ϕ di classe C^1 che si annulla solo in Δ?

Esercizio 108

Sia $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$g(t) = \int\int_{B(0,|t|)} f(x,y)dxdy,$$

dove $B(0,r)$ è la palla di $\mathbb{R}^2$ di centro $(0,0)$ e raggio r, mentre $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ è una data funzione continua. a) Mostrare che $g(t)$ è continua su $\mathbb{R}$.
b) Mostrare che $g(t)$ è derivabile in $t = 0$.
c) Mostrare che, in generale, b) non è più valida quando la funzione f è continua solo su $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ e assolutamente integrabile su $B(0,1)$.

Esercizio 109

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$|\nabla f(x,y)| \neq 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{0.4}$$

a) Provare che per $\lambda = \sup_{\mathbb{R}^2} f$ e anche per $\lambda = \inf_{\mathbb{R}^2} f$ esiste una successione (x_n, y_n) per cui (per $n \to \infty$)

$$|(x_n, y_n)| \longrightarrow \infty, \text{ e } f(x_n, y_n) \longrightarrow \lambda. \tag{0.5}$$

b) Provare che (0.5) vale per ogni λ reale con $\inf f < \lambda < \sup f$.
c) Si può dire che, se vale (0.5) per ogni λ con $\inf f < \lambda < \sup f$, allora vale necessariamente (0.4)?

Esercizio 110

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\left|\int_\gamma f ds\right| \leq |\gamma(1) - \gamma(0)| + l(\gamma)^2 \tag{0.6}$$

per ogni curva rettificabile $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ di lunghezza $l(\gamma)$; provare che $f \equiv 0$.
Dire poi se la stessa conclusione resta valida quando la (0.6) è soddisfatta, anzichè per ogni curva γ, solo per:
a) tutti i segmenti γ;
b) tutte le semi-circonferenze γ;
c) tutte le semi-ellissi γ.

Esercizio 111

Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ tale che $f_n(x) \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.
a) Supponendo che la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{0.7}$$

converga uniformemente su tutto $\mathbb{R}$, provare che $f(x) \to 0$ per $x \to +\infty$.
b) Dire se la stessa conclusione è valida se la serie (0.7) converge solo puntualmente.

Esercizio 112

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua nonnegativa.
a) Provare che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la funzione

$$\varphi_{x_0} : r \longrightarrow \int_{|x-x_0|\leq r} f(x)dx$$

è (debolmente) crescente.
b) Viceversa, provare che se per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$ le funzioni φ_{x_0} sono (debolmente) crescenti, allora $f(x) \geq 0$.

Esercizio 113

Trovare una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (possibilmente continua) che non verifichi la condizione

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty} f(x,y) = 0,$$

ma che verifichi invece

$$\lim_{|(x,y)| \to \infty,\ (x,y) \in r} f(x,y) = 0,$$

per ogni retta r passante per l'origine.

Facoltà di Ingegneria – A.A. 1997/98

Analisi Matematica D.U. (dott. Bruno Rubino) II semestre

Primo parziale L'Aquila, 30 aprile 1998

Durata della prova: 2 ore

Esercizio 1

Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(x^2+y^2)}{2x^2+3y^2}$$

Esercizio 2

Dimostrare che l'equazione

$$x^2+\sin(x^2+y)+\log(1+y^2)=0$$

definisce implicitamente una ed una sola funzione $y=\varphi(x)$ in un intorno dell'origine.

Esercizio 3

Calcolare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y)=x-y$$

sul dominio $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\right\}$.

Esercizio 4

Calcolare

$$\int \log\left\{(x-1)^2(x+3)^2\right\}\,dx$$

Esercizio 5

Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+7)\sqrt[3]{x^2}}$$

Facoltà di Ingegneria - A.A. 1997/98

Analisi Matematica D.U. (dott. Bruno Rubino) II semestre

Secondo parziale L'Aquila, 28 maggio 1998

Durata della prova: 2 ore

Esercizio 1

Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right).$$

Esercizio 2

Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3} x^n.$$

Esercizio 3

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} y + x^3 \quad \text{per } x > 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3t}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{2x-y}, \\ y(0) = \log 2. \end{cases}$$

90

Facoltà di Ingegneria – A.A. 1997/98

Analisi Matematica D.U. (dott. Bruno Rubino) II semestre

Secondo parziale bis L'Aquila, 1 giugno 1998

Durata della prova: 2 ore

Esercizio 1

Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

Esercizio 2

Si studi la convergenza puntuale e uniforme della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} x^n.$$

Esercizio 3

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy + x^3 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 5

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{2-2y}, \\ y(0) = \log 2. \end{cases}$$

Facoltà di Ingegneria – A.A. 1997/98

Analisi Matematica D.U.

L'Aquila, 1 giugno 1998

Durata della prova: 3 ore

Esercizio 1

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$$

tracciandone poi un grafico approssimativo.

Esercizio 2

Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{3} + x\cos x - \sin x}{x^2 \log(1+x^3)}$$

Esercizio 3

Calcolare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x$$

sul dominio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio 4

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x}{(x+1)(x-1)^2}\, dx$$

Esercizio 5

Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+3}}{n^3+5}$$

Esercizio 6

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2x(y^2+1), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Facoltà di Ingegneria – A.A. 1997/98
Analisi Matematica D.U.

L'Aquila, 16 luglio 1998

Durata della prova: 3 ore

Esercizio 1

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 1}{x^2 + x}$$

tracciandone poi un grafico approssimativo.

Esercizio 2

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{\log(1 + x^3)}.$$

Esercizio 3

Calcolare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2$$

sul dominio $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Esercizio 4

Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x + 2}{x^3 - 3x^2 + x - 3} \, dx.$$

Esercizio 5

Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n\sqrt{n}}{n^2 + 5}.$$

Esercizio 6

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{(y+1)}{x^2+1}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e si tracci poi un grafico approssimativo della soluzione.

Facoltà di Ingegneria – A.A. 1997/98
Analisi Matematica D.U.

L'Aquila, 14 settembre 1998

Durata della prova: 3 ore

Esercizio 1

Si studi la funzione

$$f(x) = \frac{x \log x}{1+x}$$

tracciandone poi un grafico approssimativo.

Esercizio 2

Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right).$$

Esercizio 3

Dimostrare che il punto $(0,0)$ è per la funzione

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{2} + \log\left(1 + x^2 + y^2\right)$$

un punto di minimo relativo.

Esercizio 4

Calcolare

$$\int_0^{1/2} \frac{x^2+x+1}{(x+2)(x^2-1)}\, dx.$$

Esercizio 5

Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+1} \right)^n.$$

Esercizio 6

Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - I Appello

L'Aquila, 4 Giugno 1997 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{x^n+n}{x^{2n}+n^2}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme, limitatamente alla semiretta $[-1,+\infty[$.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin x - x}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Si studi, al variare del parametro $\alpha\geq 0$, continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine. Per quali valori di α la funzione è di classe C^1?

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=y(y-t^2)(y^2+t^2-1) \\ y(0)=\alpha, & \alpha\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

- Trovare per quali valori di α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Esistono valori di α per cui la soluzione esiste per ogni $t\geq 0$, o per ogni $t\leq 0$, oppure è globale? Esistono valori di α per cui si ha sicuramente esplosione?
- Studiare il comportamento della soluzione per $t\longrightarrow\pm\infty$ (quando è possibile).

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Data la funzione

$$F(x,y)=x^4y+x^2y+x+y^2,$$

e detto $\mathcal{C}$ il suo luogo di zeri, verificare che in $(0,0)\in\mathcal{C}$ sono soddisfatte le ipotesi del Teorema del Dini almeno rispetto ad una delle variabili x,y, ed esprimere $\mathcal{C}$ in forma cartesiana in un intorno di $(0,0)$ al quarto ordine.

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - II Appello

L'Aquila, 30 Giugno 1997 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x}{[\log(2+e^n x^2)]^2}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = x\sin\left(|x^2-y|\right).$$

Si determinino gli insiemi di continuità, derivabilità, differenziabilità di f, e l'insieme su cui f è C^1.

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y-\sin t) \\ y(0) = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Studiare le soluzioni per $\alpha < 0$, $t > 0$. Esistono valori di $\alpha < 0$ per i quali la soluzione esplode per t positivi?
- Studiare le soluzioni per $\alpha > 0$, $t > 0$. Esistono valori di $\alpha > 0$ per i quali la soluzione esplode per t positivi? Inoltre, fissato $T > 0$, è possibile trovare $\alpha > 0$ per cui la soluzione esiste almeno su $[0,T]$?
- Esistono valori di $\alpha > 0$ per i quali la soluzione esiste per tutti i tempi $t > 0$?
- Completare lo studio per $t < 0$ e tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

Esercizio 4

Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{y\,dy + x\,dx}{x^2+y^2-1},$$

definita sui due aperti

$$\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\}, \quad \Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2>1\}$$

- Dire se ω è chiusa su Ω_1, Ω_2.
- Usando le proprietà generali delle forme differenziali, dire se ω è esatta su Ω_1, Ω_2 e in caso affermativo calcolarne tutte le primitive.

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - III Appello

L'Aquila, 17 Luglio 1997 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(\sin x)^n}{n+x^2}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x^\alpha y^2)}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si studi, al variare del parametro α, continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine.

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2+\sin y}{t^2+\sin t+1} \\ y(0) = \alpha, \qquad\qquad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Trovare per quali α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Esistono valori di α per cui la soluzione è globale?
- Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Usando i teoremi di passaggio al limite sotto integrale, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{B(0,n)} f_n(x,y)\,dxdy,$$

dove $B(0,n)$ è la sfera di raggio n con centro l'origine, mentre $f_n(x,y)$ è la funzione

$$f_n(x,y) = \frac{n^2 xy e^{-x^2-y^2}}{n^2+\sin^2 y}$$

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - IV Appello

L'Aquila, 22 Settembre 1997 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n+\sin x}{n\sqrt{n}+\cos^2 x}$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Si determinino massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 3y^2 - 6y$$

sul dominio

$$\mathcal{C} = \{x^2 + (y-3)^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xye^{-xy} \\ y(0) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Trovare per quali α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale e studiarne le simmetrie.
- Dimostrare che per $\alpha > 0$ la soluzione esiste globalmente per tutti gli $x \geq 0$.
- Dimostrare che per $\alpha > 0$ la soluzione non è globale per tutti gli $x < 0$.
- [Facoltativo] Cosa si può dire del limite della soluzione per $x \longrightarrow +\infty$ ($\alpha \geq 0$)?

Esercizio 4

Sia dato

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4y + y\sin z + x + \sin(xyz) = 0,$$
$$e^{xy} - e^{-xy} + \log[(1+z)(1-xy)] = 0\}.$$

- Dimostrare che in un intorno di $(0,0,0)$ si possono esplicitare su $\mathcal{C}$ due coordinate in funzione della terza, e precisamente

$$\begin{cases} x = x\,(y) \\ z = z\,(y) \end{cases}$$

- Trovare tale parametrizzazione con un errore $o\,(y^2)$.
- [Facoltativo] Trovare tale parametrizzazione con un errore $o\,(y^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1996/97
Analisi Matematica II (Programma Prof. Piero D'Ancona)

L'Aquila, 19 gennaio 1998

Durata della prova: 3 ore

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n+x^2}{n^2+\log(1+x^2)}$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Posto $\mathcal{D}_n = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \frac{1}{n}\leq x\leq n,\ 0\leq y\leq \frac{1}{x}\right\}$, dire se è finito o infinito il limite

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{\mathcal{D}_n} x^{3/2}\log\left(1+2y^2\right)\ dx\ dy.$$

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y-1|}\,(1+\log(y)) \\ y(0)=\alpha, \end{cases}$$

al variare di $\alpha > 0$, tracciandone poi un grafico approssimativo.

Esercizio 4

Dire se il seguente insieme

$$\mathcal{G} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\leq x\leq 1,\ \frac{x}{3}\sqrt{2}\leq y\leq x\sqrt{2},\ 2x^2+3y^2<z^2<4x^2+6y^2\right\}$$

è misurabile e calcolare l'integrale

$$\iiint_{\mathcal{G}} |z|\log\left(z^2+2x^2+3y^2\right)\ dx\ dy\ dz.$$

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1996/97
Analisi Matematica II (Programma Prof. Piero D'Ancona)

L'Aquila, 6 febbraio 1998

Durata della prova: 3 ore

Esercizio 1

Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = -\arctan\left(\frac{nx}{n+x}\right), \quad \text{se } x \neq -n.$$

Esercizio 2

Sia

$$I(a,b) = \iint_{\mathcal{E}(a,b)} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

dove $\mathcal{E}(a,b)$ è l'ellisse di semiassi a, b centrata in $(0,0)$. Trovare sup e inf di $I(a,b)$ sotto la condizione $a+b=3$.

Esercizio 3

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \left(y+\beta\sin^2 x\right)\cdot\log\left(\log\left(y+\beta\cos^2 x\right)\right)\cdot\log(y) \\ y(0)=\alpha, \end{cases}$$

nel semipiano $x \geq 0$. Risolvere il problema di Cauchy nel caso particolare $\alpha > 1$, $\beta = 0$.
Sia ora $\beta = 1$ e $\alpha > 0$. Studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni tracciandone il grafico.
In particolare,

- analizzare il caso particolare $\alpha = e$;
- analizzare il caso $0 < \alpha < 1$;

[Facoltativo] analizzare il caso generale $\alpha > 0$.

Esercizio 4

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \iint_{\mathcal{D}_n} \frac{\left(x^2-y^2\right)\sin\left(x^2-y^2\right)}{1+(x-y)^2}\, dx\, dy,$$

dove $\mathcal{D}_n = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; |x|+|y| \leq n\right\}$.

100

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1996/97
Analisi Matematica II (Programma Prof. Piero D'Ancona)

L'Aquila, 18 febbraio 1998

Durata della prova: 3 ore

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\log\left(1+nx^2e^{-nx^2}\right)}{\left(nx^2+1\right)^2}$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \int_x^y \frac{\sin(t+xy)}{t}\, dt$$

nel quadrante $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\}$.

- Provare che f è limitata su $\Omega \cap \mathcal{B}_1$, dove $\mathcal{B}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 1\}$.
- Provare che f è continua su Ω.
- Provare che f è estendibile con continuità a tutto $\bar{\Omega}$.

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y^2-1|}\,e^{-y^2} \\ y(0) = \alpha, \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, tracciandone poi un grafico approssimativo.

Esercizio 4

Per ogni intero positivo k, disegnare l'insieme

$$\mathcal{E}_k = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > \frac{1}{k}, \ y > \frac{1}{2^k}, \ 4x^2+y^2 \leq z < \frac{1}{2}, \ (1-kz)^2 \leq (4x^2+y^2)k^2\right\}.$$

Dire se

$$\mathcal{E}_k \quad \text{e} \quad \bigcap_1^\infty \mathcal{E}_k$$

sono misurabili e se sono di misura finita.

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - I Appello

L'Aquila, 8 Giugno 1996 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[n]{e^{nx}+\pi} - e^x \right).$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme e totale.

Esercizio 2

Calcolare massimi e minimi assoluti della funzione $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = \cos x + 2\cos y$$

dove $\mathcal{T}$ è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,-\pi)$, $(2\pi,-\pi)$.

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t}{\tan y + t} \\ y(0) = \alpha, \qquad |\alpha| \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Trovare per quali α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Esistono valori di α per cui la soluzione è globale?

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Sia data la forma differenziale, definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\omega(x,y) = \frac{x^n y^m}{x^6+y^6}\,dx - \frac{x^3y^2}{x^6+y^6}\,dy.$$

- Trovare per quali $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ la forma differenziale è chiusa.
- Esistono valori di $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ per cui la forma differenziale è esatta?

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - II Appello

L'Aquila, 29 Giugno 1996 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}\left(\sin^2(x)+\frac{2}{n}\right)^{n+\frac{\cos x}{n}}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme e totale.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x/y^2} & \text{se } y\neq 0,\\ 0 & \text{se } y=0.\end{cases}$$

Si studi continuità, derivabilità, differenziabilità della funzione su tutto $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2\ln|y-t| \\ y(0)=\alpha, & \alpha\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

- Trovare per quali α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Esistono valori di α per cui la soluzione è globale?
- Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.
- Esistono valori di α per cui la soluzione ammette asintoti obliqui?

Esercizio 4

Sia γ il luogo di zeri della funzione $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definita come

$$F(x,y)=e^{x+y}-y-1.$$

Verificare in quali punti di γ si può applicare il Teorema del Dini, distinguendo i punti dove si può esplicitare x in funzione di y e quelli in cui si può esplicitare y in funzione di x. In particolare, dimostrare che in un intorno dell'origine si può esprimere γ tramite una funzione f che esplicita x in funzione di y, cioè $x=f(y)$. Trovare lo sviluppo della funzione f al secondo ordine.

103

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - III Appello

L'Aquila, 22 Luglio 1996 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} |1 + e^n x|^{nx} .$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme e totale.

Esercizio 2

Calcolare massimi e minimi assoluti della funzione $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 - y^4 - x^2$$

dove $\mathcal{A}$ è l'insieme definito da

$$\mathcal{A} = \{ (x,y) : \; x^2 + y^2 \geq 1/4, \quad -1 \leq x \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1 \}.$$

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 \ln\left(\dfrac{1+t^2}{|y|}\right) \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Trovare per quali α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Esistono valori di α per cui la soluzione è globale? e valori di α per cui la soluzione non è globale?
- Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.
- Esistono valori di α per cui la soluzione ammette asintoti orizzontali e/o obliqui?

Esercizio 4

Facendo uso del teorema di Beppo Levi, dimostrare che la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è sommabile su $\mathbb{R}$ ed il suo integrale coincide con l'integrale di Riemann in senso improprio $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} ds$ (cioè $\lim\limits_{c\to\infty} \int_{-c}^{+c} \frac{1}{1+s^2} ds$).

Stessa domanda per la funzione $g(x) = \frac{\sin(tx)}{1+s^2}$, $t \in \mathbb{R}$.

Sia $H(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{1+s^2} ds$. Dire se la funzione $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua.

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - IV Appello

L'Aquila, 13 Settembre 1996 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^x + n}{n^2}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \frac{e^{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Si studi, al variare del parametro $\alpha \geq 0$, continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine.

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^4 - t^2}{y^2 + 1} \\ y(0) = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Trovare per quali α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Esistono valori di α per cui la soluzione è globale?
- Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Sia $\bar{y}$ la soluzione corrispondente ad $\alpha = 0$. Dimostrare che esistono i limiti

$$\lim_{t\to\pm\infty} (\bar{y}^4 - t^2)$$

e calcolarli.

Esercizio 4

Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che vale 0 sull'insieme

$$\Gamma = \{ (x,y) : \ (x-y)(x+y-2) = 0 \}.$$

Dimostrare se le seguenti affermazioni sono vere o false:

i. f non è differenziabile;

ii. f non può annullarsi in punti diversi dall'insieme Γ;

iii. f ha necessariamente massimo assoluto su $\mathbb{R}^2$;

iv. il punto $(1,1)$ è necessariamente punto sella per f.

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - V Appello

L'Aquila, 2 Ottobre 1996 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\log(x^2+n)}{1+n^2|x|}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Sia data la funzione

$$f(x,y) = \sin|x+y| + \sin|x-y|.$$

Determinare, se ciò ha senso, massimo e minimo di f sul disco $\{x^2+y^2 \leq \pi^2\}$.

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y-t^2)(y-2t^2) \\ y(0) = \alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Trovare per quali α si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Dimostrare che esistono valori di α per cui la soluzione non è globale.
- Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.
- Trovare un valore $\alpha_0 > 0$ per cui il problema di Cauchy non ammette soluzione globale.

Esercizio 4

Sia Γ il luogo dei punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ che verificano le condizioni

$$\begin{cases} e^z - (x+y)\sin(x+y) + \log(1+x+z) - 1 = 0 \\ z\tan(xy) + \log(1+x) + \arctan(y-x) = 0. \end{cases}$$

Verificare che si può descrivere Γ, in un intorno dell'origine, nella forma

$$\begin{cases} x = f(z) \\ y = g(z) \end{cases}$$

ed esprimere (f,g) al primo ed al secondo ordine nell'intorno di $z=0$.

(106)

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - VI Appello

L'Aquila, 21 Gennaio 1997 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\frac{x}{n^2}+e^{x/n}-1\right).$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.

Esercizio 2

Data la funzione di due variabili

$$f(x,y)=xy\ e^{y-x^2},$$

determinarne i punti di massimo e di minimo sull'insieme

$$Q=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ |x|\leq 2,\ |y|\leq 2\}.$$

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=\frac{y-t^2}{y-\cos t} \\ y(0)=\alpha, \qquad \alpha\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

- Per quali valori di α si ha esistenza locale?
- Per quali valori di α la soluzione esiste per ogni $t<0$?
- Per quali valori di α la soluzione esiste per ogni $t>0$?

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Sia $\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Trovare tutte le funzioni $\alpha(s)$ di classe C^1, definite su $]0,+\infty[$, tali che la forma su Ω

$$\omega(x,y)=\alpha(x^2+y^2)y\ dx-\alpha(x^2+y^2)x\ dy$$

è chiusa, e tutte quelle per cui ω è esatta.

(107)

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - I Appello

L'Aquila, 22 Maggio 1995 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}\left[\cos^2\left(\frac{x}{n}\right)\right]^{(n^3)},$$

- determinarne l'insieme di convergenza puntuale,
- dimostrare che essa converge uniformemente sugli intervalli della forma $[a,b]$ con $b \geq a > 0$,
- dimostrare che essa non converge uniformemente sull'intervallo $[1,+\infty[$.

Esercizio 2

Calcolare i massimi e i minimi della funzione $f: B \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x,y) = e^{|y|-x^2-y^2}$$

sull'insieme

$$B\left\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1\right\}.$$

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - ty \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

- Mostrare che si ha esistenza e unicità di una soluzione locale. Esistono valori di $\alpha \neq 0$ per cui la soluzione è globale?
- Esistono valori di α per cui la soluzione non è globale?
- Se possibile calcolare i limiti per $t \to \pm\infty$ delle soluzioni.

Tracciare inoltre un grafico approssimativo delle soluzioni.

Esercizio 4

Sia V il luogo di zeri della funzione

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - y^2.$$

Descrivere l'insieme V e verificare che il Teorema del Dini vale in tutti i punti di esso tranne che nell'origine.

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - II Appello

L'Aquila, 19 Giugno 1995 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

- Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^n} \sin\left(\dfrac{\sin(x^n)}{x^{4n}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Si consideri ora la serie

$$\sum_{n \geq 1} f_n(x).$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.

Esercizio 2

Sia data la funzione di due variabili definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin\left(\dfrac{x}{x-y^2}\right) & x \neq y^2 \\ 0 & x = y^2. \end{cases}$$

- Determinare l'insieme in cui la funzione risulta continua.
- Determinare l'insieme in cui la funzione risulta derivabile.
- Determinare l'insieme in cui la funzione risulta differenziabile.

Esercizio 3

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(x) + \cos(y) \\ y(\alpha) = 0, & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Mostrare che per ogni valore di α la soluzione è globale.
- Mostrare che per ogni valore di α la soluzione è limitata.
- Esistono i limiti della soluzione per $x \to \pm\infty$?
- In quanti punti la soluzione $y(x)$ attraversa l'asse $y = 0$?

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x^3}{x^4+y^4}\, dx + \frac{y^3}{x^4+y^4}\, dy + \left(\tan^2(z)+1\right)\, dz.$$

- Verificare che si tratta di una forma differenziale chiusa.
- Dimostrare *a priori* se è una forma differnziale esatta e in tal caso calcolarne una primitiva.
- Calcolare $\int_\gamma \omega$ dove γ è il segmento che va da $\left(1,1,-\frac{\pi}{4}\right)$ a $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt[4]{31}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - III Appello

L'Aquila, 3 Luglio 1995 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- C'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$?
- Esistono degli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui c'è convergenza totale?

Esercizio 2

Sia data la funzione di due variabili definita come

$$f(x,y) = (x - y^2)\tan(x^3 y^2).$$

Calcolare l'hessiano $H\ f(0,0)$, verificando che non è definito nè positivo nè negativo. Dimostrare poi che $(0,0)$ non è nè un punto di minimo nè di massimo.

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{x^2 - y^3} \\ y(0) = \alpha, \qquad \alpha < 0. \end{cases}$$

- Mostrare che si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale. Esistono valori di α per cui la soluzione è globale?
- Se possibile calcolare i limiti per $x \to \pm\infty$ delle soluzioni. Ci sono soluzioni con asintoti orizzontali?
- Dimostrare che *se* $x^2 - y^3$ *ha limite per* $x \to +\infty$ (finito o infinito), allora il limite è 0.
- [**Facoltativo**] Dimostrare che il limite suddetto esiste (e quindi è 0).

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Calcolare, se ciò ha senso, l'integrale

$$\iint_{\mathcal{A}} \frac{y}{x^2}\,dx\,dy,$$

dove

$$\mathcal{A} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq xy \leq 2,\ x^2 \leq y \leq 4x^2\right\}$$

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - IV Appello

L'Aquila, 18 Settembre 1995 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+e^{-x^2}}.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Sia data la funzione di due variabili definita come

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Dimostrare che esiste un valore α_0 di α per cui f è continua su $\mathbb{R}^2$.

Sia ora $\alpha = \alpha_0$:

- Trovare l'insieme di $\mathbb{R}^2$ su cui f è derivabile;
- Trovare l'insieme di $\mathbb{R}^2$ su cui f è differenziabile.

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y\log(x+y) \\ y(1) = \alpha, & \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- Trovare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- La soluzione è globale per $\alpha < 0$?
- La soluzione è globale per $\alpha > 0$ ed $x > 0$?
- La soluzione è globale per $\alpha > 0$ ed $x < 0$?

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Sia data la forma differenziale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^4}\,dx + \frac{a(y)}{x^2+y^4}\,dy.$$

- Dimostrare che esistono funzioni $a(y)$ per cui tale forma è chiusa.

Supponiamo d'ora in avanti che $a(y)$ sia una delle funzioni per cui ω è chiusa.

- La forma differnziale è anche esatta?
- Nel caso in cui la risposta alla precedente domanda sia affermativa, calcolare una primitiva per la forma differnziale ω.

Corso di Laurea in Matematica

Prova scritta di Analisi Matematica II - V Appello

L'Aquila, 7 Ottobre 1995 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{x^{2n}}\right)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne gli intervalli di convergenza uniforme.
- Determinarne gli intervalli di convergenza totale.

Esercizio 2

Sia data la funzione di due variabili definita come

$$f(x,y)=e^{-(x+y)}\left(x^2+y^2\right)^{1/2}.$$

Dimostrare che esistono $\min\limits_{\mathcal{A}} f$ e $\max\limits_{\mathcal{A}} f$, dove

$$\mathcal{A}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geq 0,\ y\geq 0\right\}$$

e calcolarli.

Esercizio 3

Poniamo

$$f(y)=\begin{cases}1-\frac{\sin y}{y} & \text{per } y\neq 0\\ 0 & \text{per } y=0.\end{cases}$$

- Dimostrare che f è derivabile.

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases}y'=f(y)\\ y(0)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

- Mostrare che si ha esistenza ed unicità di una soluzione locale.
- Esistono valori di α per cui la soluzione è globale?

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Sia dato

$$\mathcal{C}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\tan x+\sin(y+z-x)+\cos(xyz)-1=0,\right.$$
$$\left.\log(1+4xyz)+\arcsin(x+y)=0\right\}.$$

- Dimostrare che in un intorno di $(0,0)$ si possono esplicitare su $\mathcal{C}$ due coordinate in funzione della terza, in particolare

$$\begin{cases}x=x(y)\\ z=z(y)\end{cases}$$

- **[Facoltativo]** Trovare tale parametrizzazione con un errore $o\left(y^2\right)$.

119

Corso di Laurea in Matematica
Prova scritta di Analisi Matematica II - VI Appello

L'Aquila, 15 Gennaio 1996 (Prof. Piero D'Ancona)

Esercizio 1

Sia data la serie di funzioni

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n}{n^2+\sin x}$$

- Determinarne l'insieme di convergenza puntuale.
- Determinarne l'insieme di convergenza totale.
- Determinarne l'insieme di convergenza uniforme.

Esercizio 2

Sia data la funzione di due variabili definita come

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+2y^2)^\alpha & \text{per } x>0,\\ x^2+2y^2 & \text{per } x\leq 0.\end{cases}$$

Determinare per quali valori di $\alpha\in\mathbf{R}$ la funzione è continua in $(0,0)$, derivabile in $(0,0)$, differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 3

Sia dato il Problema di Cauchy

$$\begin{cases}y'=y\cdot\arctan(xy)\\ y(0)=\alpha, & \alpha\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

- Per quali valori di α si ha esistenza locale? E per quali valori la soluzione è globale?
- Se ciò ha senso, calcolare i limiti per $x\to\pm\infty$ delle soluzioni.
- Determinare eventuali simmetrie delle soluzioni.

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni al variare di α.

Esercizio 4

Calcolare, giustificando la risposta, il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^2}\frac{nx}{n+x}e^{-x^2}\,dx.$$

(113)

Recupero del Parziale n. 4

Si fissi $a > 0$ e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2y^2}{y^2+t^2} \\ y(a) = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Dimostrare che la soluzione y_a è definita per ogni $t > 0$ e soddisfa le disegua-glianze

$$0 < y_a(t) < t \quad \text{per ogni } t > 0.$$

Recupero del Parziale n. 5

Sia dato il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} \dot{x} = -\arctan(y) \\ \dot{y} = \arctan(x). \end{cases} \tag{1}$$

- Si studi il sistema lineare associato a (1) nell'intorno dell'origine.
- Dopo aver indagato sull'esistenza di un integrale primo, disegnare approssimativamente le orbite del sistema (1).

Recupero del Parziale n. 6

Verificare l'uguaglianza stabilita dal Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$ per il campo vettoriale

$$F = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$$

e la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 + y^2, \ 1 \le z \le 4\right\}.$$

Corso di Laurea in Matematica – A.A. 1997/98
Analisi Matematica II (dott. Bruno Rubino)

L'Aquila, 16 Settembre 1998 **Recupero parziali**

Durata della prova: **30 minuti per parziale da recuperare**

Recupero del Parziale n. 1

Si consideri la funzione $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(t,x,y) = \begin{cases} \frac{\sin[t(x^2+y^2)]}{t} & \text{per } t \neq 0 \\ x^2 + y^2 & \text{per } t = 0 \end{cases}$$

e si ponga

$$F(x,y) = \int_0^1 f(t,x,y)dt$$

Provare che $f \in C^1$.

Recupero del Parziale n. 2

Sia data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x - y$$

Calcolare, se esistono, $\max_{\mathcal{A}} f$ e $\min_{\mathcal{A}} f$, dove $\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + 9y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$.

Recupero del Parziale n. 3

Trovare tutte le soluzioni del seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} 2u' + v' = u + 2v \\ u' + v' = v - u. \end{cases}$$

CdL in MATEMATICA – A.A. 97/98 – ANALISI MATEMATICA II

16/9/98 RECUPERO PARZIALI

N° 1

Perchè F sia C^1 deve almeno essere continua

Poichè

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}\left(t(x^2+y^2)\right)}{t} = x^2+y^2,$$

$f \in C(\mathbb{R}^3)$, per cui $F \in C(\mathbb{R}^2)$

Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x\cancel{t}\cos\left(t(x^2+y^2)\right)}{\cancel{t}} = 2x\cos\left(t(x^2+y^2)\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos\left(t(x^2+y^2)\right)$$

continue su $\mathbb{R}^3$ (il raccordo con il caso $t=0$ è continuo)

Per il teorema di ~~passaggio al limite~~ derivazione sotto il segno di integrale

F è dunque $C^1(\mathbb{R}^2)$.

N-2

$$\nabla f(x,y) = (1,-1) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

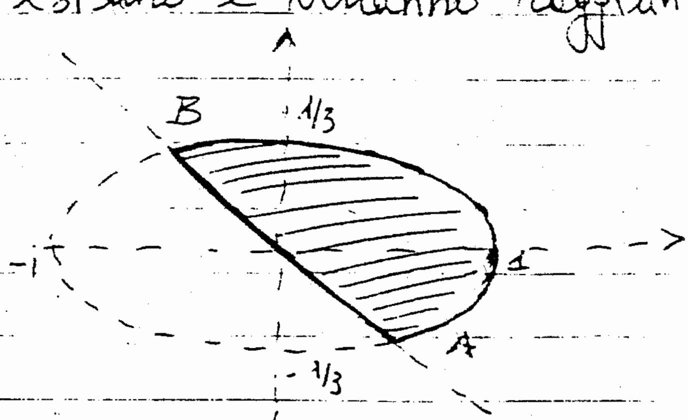
Poichè A è una semi~~ellisse~~ chiusa (~~ellisse~~ dunque un compatto) il max ed il min esistono e verranno raggiunti sulla frontiera.

Si ha

$f(x,-x) = x + x = 2x$

e gli estremali saranno in

e in B.



Per la frontiera relativa all'ellisse, passando alla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cos\vartheta \\ y = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$$

si ha

$$\alpha(\vartheta) = f(x(\vartheta), y(\vartheta)) = \cos\vartheta - \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\alpha'(\vartheta) = -\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \frac{1}{3}\cos\vartheta = 0 \iff$$

$$\mathrm{tg}\,\vartheta = -\frac{1}{3} \implies \vartheta_0 = -\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) \implies \begin{cases} \mathrm{sen}\,\vartheta_0 = \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \cos\vartheta_0 = +\frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Le coordinate dei punti A e B sono date da

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x^2 + 9y^2 = 1 \end{cases} \qquad 10x^2 = 1, \quad \begin{cases} x = \mp\frac{1}{\sqrt{10}} \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$A = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right), \quad B = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Il punto corrispondente al valore ϑ_0 prima trovato è tale che

$$\alpha(\vartheta_0) = \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{3},$$

mentre

$$f(A) = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad f(B) = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

Poiché $f(A) < f(x(\vartheta_0), y(\vartheta_0))$, si ha

$$\max f = \frac{\sqrt{10}}{3}, \quad \min f = -\frac{2}{\sqrt{10}}$$

RECUPERO N° 3 del 16/9/98

$$\begin{cases} u' = 2u + v \\ v' = -3u \end{cases}$$

Su $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$,

allora possiamo riscriverlo nella forma

$$\mathcal{U}' = A\mathcal{U}$$

Gli autovalori di A sono dati da

$\lambda^2 - 2\lambda \mp 3 = 0$

$$\lambda_{\mp} = 1 \mp \sqrt{1-3} = 1 \mp i\sqrt{2}$$

per cui la forma di Jordan associata è data da

$\mathrm{Re}\,\lambda_{\mp} = 1$, $\quad \mathrm{Im}\,\lambda_{+} = \sqrt{2}$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Allora la soluzione ~~[illegible]~~ rispetto alla nuova base è data da

$$\tilde{\mathcal{U}}(t) = e^{t} \begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t & \mathrm{sen}\sqrt{2}t \\ -\mathrm{sen}\sqrt{2}t & \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

al variare di $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$.

Si tratta di trovare la matrice del cambio di variabile.

L'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_+ = 1 + i\sqrt{2}$ è dato da

$v = (1 + i\sqrt{2}, -3)$, da cui

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perciò ~~una~~ le soluzioni per il sistema originario sono date da

$$\mathcal{U}(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\sqrt{2}t & \operatorname{sen}\sqrt{2}t \\ -\operatorname{sen}\sqrt{2}t & \cos\sqrt{2}t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{t}(\cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}\operatorname{sen}\sqrt{2}t)\eta_1 + e^{t}(\operatorname{sen}\sqrt{2}t + \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t)\eta_2 \\ -3e^{t}\cos\sqrt{2}t\,\eta_1 - 3e^{t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t\,\eta_2 \end{pmatrix}$$

al variare di $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

RECUPERO N° 4 del 16/9/98

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2y^2}{y^2+t^2} \\ y(a) = \dfrac{a}{2}, \quad a>0 \end{cases}$$

Si osservi che la soluzione è inizialmente positiva e che $0 \le y' \le 2$.
Perciò il denominatore, finchè $t>0$, non può mai annullarsi.
Inoltre, $\forall \varepsilon>0$ $f(t,y) = \frac{2y^2}{y^2+t^2}$ è di classe $C^1(A_\varepsilon)$, dove

$$A_\varepsilon = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 \mid t>\varepsilon\}.$$

Poichè $y(t) \equiv 0$ è soluzione di $y' = f(t,y)$, per il teorema di Cauchy la soluzione del nostro problema di Cauchy resta sempre nel semipiano $y>0$ visto che lo è il punto in cui si fissa il dato iniziale.
Inoltre $y(t) = t$ è sempre soluzione di $y' = f(t,y)$ per $t>0$, per cui la nostra soluzione resta sempre nel semipiano $y<t$ per ogni $t>0$, visto che lo è all'istante iniziale.
Perciò si ha:

— esiste per ogni $t>0$ visto che verifica il teorema di

esistenza ed unicità globale finchè $t > \varepsilon > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, dato che
$$0 \le f(t,y) < 2$$

- soddisfa le diseguaglianze $0 < y_a(t) < t \quad \forall t > 0$

RECUPERO N° 5 del 16/9/98

$$\begin{cases} \dot{x} = -\operatorname{arctg} y \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} x \end{cases}$$

Sono punti critici tutte le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} \operatorname{arctg} y = 0 \\ \operatorname{arctg} x = 0, \end{cases}$$
cioè il solo punto $(0,0)$.

Linearizzando si ha:
$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui l'origine è un centro. Nulla si può dire al momento sulla natura dell'origine per il sistema originario.
Si ha poi che
$$E(x,y) = -\int_0^y \operatorname{arctg} t \, dt - \int_0^x \operatorname{arctg} t \, dt$$

è un integrale primo, da cui

$$x \operatorname{arctg} x + y \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2} \log(1+x^2) - \frac{1}{2} \log(1+y^2) = K$$

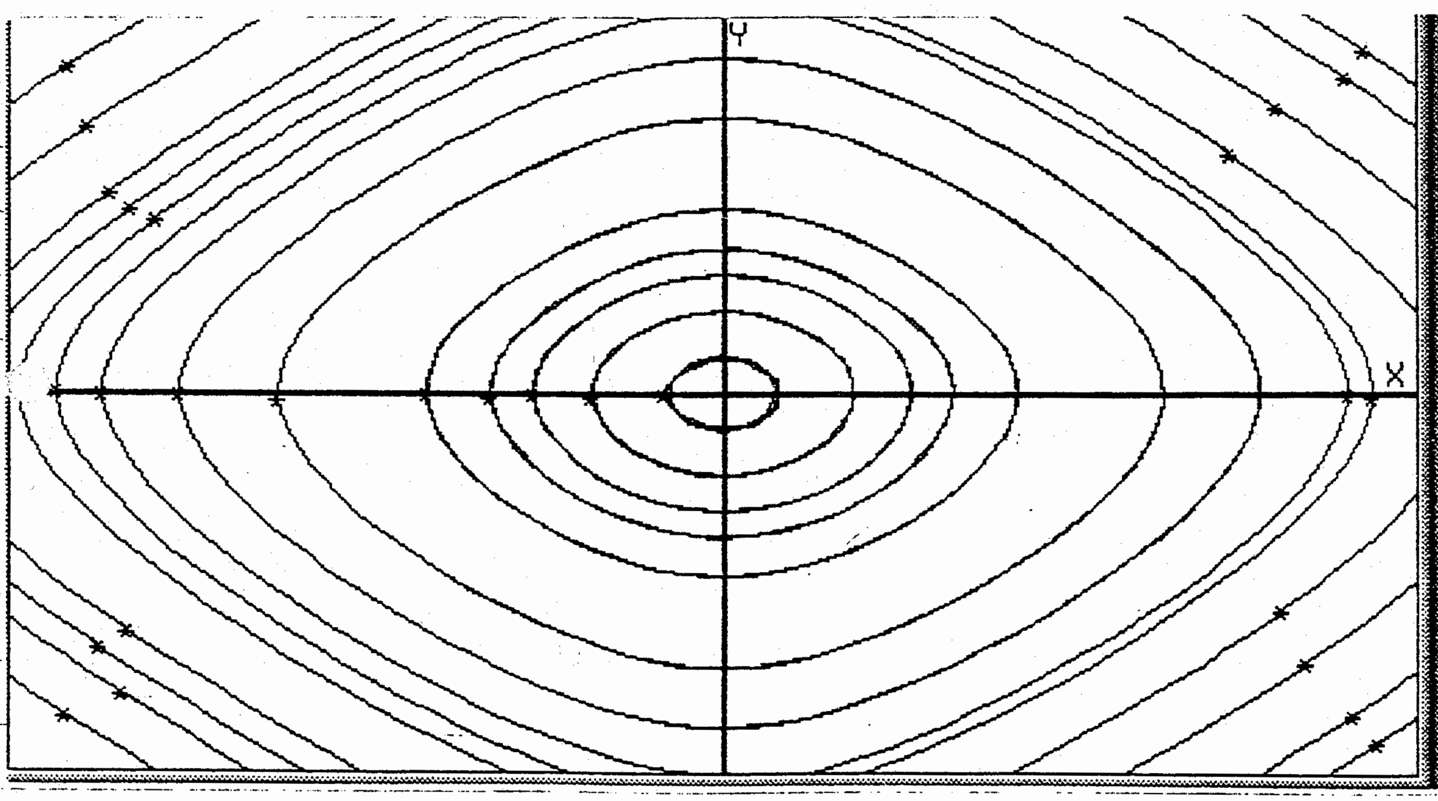
sono curve di livello al variare di $K \geq 0$ (infatti $\varphi(t) = t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \log(1+t^2)$ è sempre non negativa)
Si ha poi che la funzione $F(x,y)$ del primo membro

~~F~~ è pari in x e in y, per cui basta studiare le curve di livello ~~...~~ nel primo quadrante. Poichè poi ~~la~~ ~~...~~ ogni curva della famiglia (cioè $\forall k > 0$) è esplicitabile come funzione $y = y(x)$ e risulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} y} < 0 \quad \text{per } x, y > 0$$

e $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0, y) = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, 0) = 0$,

Il grafico è quello riportato in figura.
Per le simmetrie di F prima segnalate si ha in particolare che l'origine è un centro anche per il sistema non lineare.

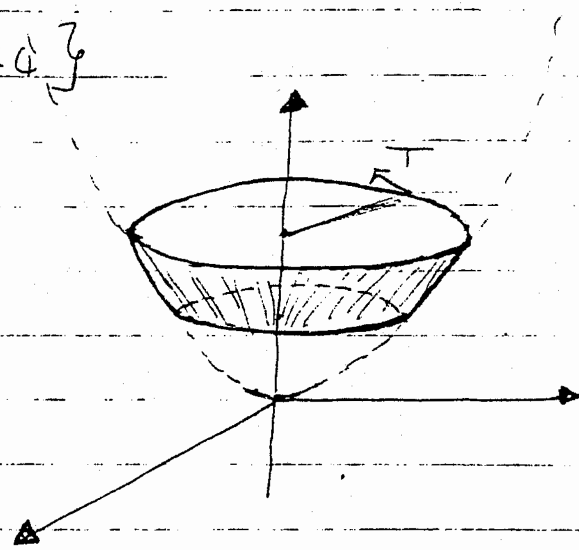


RECUPERO N°6 del 16/9/98.

$$F(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2} , - \frac{x}{x^2+y^2} , 0 \right)$$

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2, \ 1 \leq z \leq 4 \}$$

Possiamo parametrizzare S come



$$\begin{cases} x(s,t) = t \cos s & 0 \leq s \leq 2\pi \\ y(s,t) = t \operatorname{sen} s & \\ z(s,t) = t^2 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{rot } F = (0, 0, 0)$$

Il vettore normale tangente al bordo è dato da

$T_1 = (\operatorname{sen} \cancel{\theta} s, \ -\cos s, \ 0)$ sul bordo superiore B_1

$T_2 = (-\operatorname{sen} s, \ \cos s, \ 0)$ sul bordo inferiore. B_2

Dunque

1) $$\langle F, T_1 \rangle = \left\langle \left(\frac{\operatorname{sen} s}{2}, -\frac{\cos s}{2}, 0 \right), (\operatorname{sen} s, -\cos s, 0) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2}$$

2) $$\langle F, T_2 \rangle = \langle (\operatorname{sen} s, -\cos s, 0), (-\operatorname{sen} s, +\cos s, 0) \rangle =$$

$$= -1$$

Perciò

$$\int_{B_1} \langle F, T_1 \rangle = \frac{1}{\cancel{2}} 2\pi \cdot \cancel{2} = 2\pi, \qquad \int_{B_2} \langle F, T_2 \rangle = -1 \ 2\pi \cdot 1 = -2\pi$$

per cui la somma fa ancora $2\pi - 2\pi = 0$.

Il teorema di Stokes è dunque verificato: se ν è il campo normale ad S e T è il campo tangente al bordo $\partial^+ S$ orientato nel verso positivo, si ha

$$0 = \int_S \langle \operatorname{rot} F, \nu \rangle \, d\sigma = \int_{\partial^+ S} \langle F, T \rangle \, ds = 0.$$