Esercizi di
Analisi Matematica 3

per le Facoltà di Ingegneria

Prima parte

Corrado Lattanzio e Bruno Rubino

Versione preliminare

L'Aquila, ottobre 2005

Indice

1 Curve, superfici e campi vettoriali

1.1 Curve e superfici

Esercizio 1.1 *Stabilire se la curva di supporto γ e parametrizzazione*

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ \\ y(t) = t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) \end{cases} \qquad 0 < t \leq 1$$

è rettificabile.

Risoluzione. La curva in esame è rettificabile. Non essendo la parametrizzazione C^1 in $t = 0$, per dimostrare l'asserto proviamo che

$$\int_\gamma ds < +\infty.$$

Il vettore tangente alla curva in esame è dato da

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = 2t \\ \\ \dot{y}(t) = 2t\cos\left(\frac{1}{t}\right) - \sin\left(\frac{1}{t}\right) \end{cases} \qquad 0 < t \leq 1$$

e pertanto

$$ds = \|T(t)\|dt = \sqrt{4t^2 + 4t^2\cos^2\left(\frac{1}{t}\right) - 4t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}\, dt.$$

In definitiva

$$\int_\gamma ds = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 4t^2\cos^2\left(\frac{1}{t}\right) - 4t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\cos\left(\frac{1}{t}\right) + \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)}\, dt.$$

Poichè la funzione all'interno dell'integrale appena scritto è continua per ogni $0 < t \leq 1$ ed è limitata per $t \to 0^+$, tale integrale è convergente (limitato superiormente ad esempio dalla quantità $\int_0^1 \sqrt{4+4+4}\, dt$), il che implica la rettificabilità della curva data. ■

Esercizio 1.2 *Stabilire se la curva di supporto γ e parametrizzazione*

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \qquad\qquad 0 < t \leq 1 \\ z(t) = t \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) \end{cases}$$

è rettificabile.

Risoluzione. La curva data non è rettificabile. Dimostriamo l'asserto costruendo una spezzata con vertici sulla curva la cui lunghezza diverge al tendere del numero dei vertici a più infinito. A tal scopo, consideriamo i punti sull'intervallo $(0, 1]$ della forma $\frac{2}{(2j+1)}$, $j = 1, \dots, n$. Siano P_j, $j = 1, \dots, n$ i corrispondenti punti su γ, vale a dire i punti di coordinate

$$\left(\frac{8}{(2j+1)^3}, \frac{4}{(2j+1)^2}, (-1)^j \frac{2}{(2j+1)} \right).$$

Allora il segmento $\|P_j - P_{j-1}\|$ ha sicuramente lunghezza maggiore del modulo della differenza delle componenti dei punti P_j e P_{j-1}. Quindi in particolare si ha per ogni $j = 1, \dots, n$:

$$\|P_j - P_{j-1}\| \geq \left| (-1)^j \frac{2}{2j+1} - (-1)^{j-1} \frac{2}{2j-1} \right| = \frac{4j}{4j^2 - 1} \geq \frac{1}{j}.$$

Pertanto

$$\sum_{j=1}^{n} \|P_{j+1} - P_j\| \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } n \to +\infty,$$

poichè la serie $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$ è divergente. In definitiva, essendo la lunghezza di una curva definita come *l'estremo superiore* delle lunghezze delle spezzate costruite con vertici sulla curva stessa e avendo costruito nel caso in oggetto una successione di spezzate con lunghezze divergenti a più infinito, la curva in esame non è rettificabile. ∎

Esercizio 1.3 *Calcolare l'area della superficie*

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ z = x^2 + y^2\right\}.$$

Risoluzione. La superficie $\mathcal{S}$ è la porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$ delimitata dal cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, cioè dalle relazioni $0 \leq z \leq 1$. L'area di tale superficie è data dall'integrale di superficie

$$\int_{\mathcal{S}} d\sigma.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}$ come segue:

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta) \\ z(\rho, \theta) = \rho^2. \end{cases} \qquad \rho \in [0, 1], \ \theta \in [0, 2\pi]$$

L'elemento d'area $d\sigma$ è dato da $d\sigma = \|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| d\rho d\theta$, dove

$$\Phi_\rho(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho, \theta) = \cos(\theta) \\ y_\rho(\rho, \theta) = \sin(\theta) \\ z_\rho(\rho, \theta) = 2\rho \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho, \theta) = -\rho \sin(\theta) \\ y_\theta(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ z_\theta(\rho, \theta) = 0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2\rho \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} = (-2\rho^2 \cos(\theta), -2\rho^2 \sin(\theta), \rho)$$

e quindi $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| = \rho\sqrt{4\rho^2 + 1}$. Allora l'area cercata è data da

$$\int_{\mathcal{S}} d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{4\rho^2 + 1} \ d\rho \, d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{3}\pi \left((4\rho^2+1)^{3/2} \Big|_0^1 \right) \\
&= \frac{2}{3}\pi \left(5\sqrt{5} - 1 \right).
\end{aligned}
$$

■

Esercizio 1.4 *Calcolare il flusso del campo vettoriale* $F(x,y,z) = (x^2, xy, xz)$ *attraverso la superficie*

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le 1, \; z = x^2 + y^2 \right\}.$$

Risoluzione. La superficie Ω è la porzione di paraboloide $z = x^2 + y^2$ delimitata dal cilindro di asse z e raggio uno, cioè dalle relazioni $0 \le z \le 1$. Il flusso in oggetto è dato dall'integrale di superficie

$$\int_\Omega \langle F, n \rangle d\sigma,$$

orientando ad esempio la normale n alla superficie verso il basso. Parametrizziamo la superficie Ω come segue:

$$\Phi(\rho,\theta) = \begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta) \\ z(\rho,\theta) = \rho^2. \end{cases} \qquad \rho \in [0,1], \; \theta \in [0, 2\pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta$, dove

$$\Phi_\rho(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho,\theta) = \cos(\theta) \\ y_\rho(\rho,\theta) = \sin(\theta) \\ z_\rho(\rho,\theta) = 2\rho \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho,\theta) = -\rho\sin(\theta) \\ y_\theta(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ z_\theta(\rho,\theta) = 0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 2\rho \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} = (-2\rho^2\cos(\theta), -2\rho^2\sin(\theta), \rho).$$

Avendo scelto di orientare la superficie verso il basso, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|}(2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\sin(\theta), -\rho).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| d\rho d\theta$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare il flusso cercato). In definitiva, il flusso è dato da

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle F, n\rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2(\theta), \rho^2\sin(\theta)\cos(\theta), \rho^2\cos(\theta))\cdot \\ &\quad \cdot (2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\sin(\theta), -\rho) d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^3\cos(\theta)(2\rho\cos^2(\theta) + 2\rho\sin^2(\theta) - 1) d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \rho^3(2\rho - 1) d\rho \int_0^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = 0.\end{aligned}$$

■

1.2 Campi vettoriali

Esercizio 1.5 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = \left(\frac{zx}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}} + \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^3$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*

- *Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $x^2+y^2>0$ e $z>0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \neq (0,0),\ z>0\}.$$

Si tratta quindi del semispazio delle z strettamente positive a cui è tolta la retta $x=0$ e $y=0$, cioè l'asse delle z. Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 e F_3 le tre componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{xyz}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F, è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F

lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = 1. \end{cases}$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -\sin(t) \\ \dot{y}(t) = \cos(t) \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \oint_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t), y(t), z(t)), T(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin(t)\cos(t) + \sin(t)\cos(t) + 2 \cdot 0) dt = 0, \end{aligned}$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = F_3, \tag{1.1}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x, si ha

$$\Phi(x, y, z) = z\sqrt{x^2 + y^2} + f(y, z),$$

dove f è una generica funzione regolare di due variabili. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.1) si ottiene

$$\frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = \frac{zy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

vale a dire

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = 0,$$

cioè $f(y,z) = g(z)$ (g generica funzione regolare di una variabile) e quindi $\Phi(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}+g(z)$. Infine, sostituendo tale espressione nella terza delle (1.1) si ha

$$\sqrt{x^2+y^2} + g'(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}} + \sqrt{x^2+y^2},$$

vale a dire

$$g'(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{z^3}},$$

da cui integrando $g(z) = 4\sqrt[4]{z} + k$, $k \in \mathbb{R}$. Quindi l'espressione generale per il potenziale $\Phi(x,y,z)$ del campo conservativo F in D_F è data da

$$\Phi(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} + 4\sqrt[4]{z} + k, \ \ k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. ■

Esercizio 1.6 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{y(x^2+y^2)^2}, \frac{x^2+3y^2}{y^2(x^2+y^2)^2} \right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $x^2+y^2 \neq 0$ e $y \neq 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

Si tratta quindi del piano (x, y) a cui è tolta la retta $y = 0$, cioè l'asse delle x. Tale dominio non è connesso, ma è l'unione di due semipiani, cioè di due domini semplicemente connessi.

Indicate con F_1, F_2 le due componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{2x(x^2 + 5y^2)}{y^2(x^2 + y^2)^3} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale e D_F l'unione dei due domini semplicemente connessi $y > 0$ e $y < 0$ (o, equivalentemente, essendo tutte le curve chiuse $\gamma \subset D_F$ deformabili con continuità ad un punto), il campo F è conservativo nei due semipiani $y > 0$ e $y < 0$. Esiste pertato per F il potenziale Φ_1 nel dominio $y > 0$ e il potenziale Φ_2 in $y < 0$, e Φ_1 e Φ_2 differiscono per una costante.

Per calcolare un potenziale Φ_1 del campo conservativo F in $y > 0$ osserviamo che valgono le relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \ y > 0 \tag{1.2}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x si ha

$$\begin{aligned}\Phi_1(x, y) &= \frac{1}{y}\int 2x(x^2 + y^2)^{-2}dx = \frac{1}{y}\int (x^2 + y^2)^{-2}d(x^2 + y^2) \\ &= -\frac{1}{y(x^2 + y^2)} + f(y), \quad y > 0\end{aligned}$$

ed f generica funzione regolare di una variabile. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.1) si ottiene

$$\frac{x^2 + 3y^2}{y^2(x^2 + y^2)^2} + f'(y) = \frac{x^2 + 3y^2}{y^2(x^2 + y^2)^2}, \quad y > 0,$$

vale a dire

$$f'(y) = 0, \ y > 0,$$

cioè $f(y) = k_1$, $y > 0$, $k_1 \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\Phi_1(x, y) = -\frac{1}{y(x^2 + y^2)} + k_1, \quad y > 0, \ k_1 \in \mathbb{R}.$$

Analogamente si ottiene

$$\Phi_2(x, y) = -\frac{1}{y(x^2 + y^2)} + k_2, \quad y < 0, \ k_2 \in \mathbb{R}$$

e un potenziale in $y > 0$ o $y < 0$ rispettivamente si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k_1 o k_2 rispettivamente. ■

Esercizio 1.7 *Sia dato il campo vettoriale $F(x, y, z)$ di componenti*

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{6x \log(y+1)}{3x^2+(y-1)^4+2z^2}, \\ \\ \frac{\log(3x^2+(y-1)^4+2z^2)}{y+1} + \frac{4(y-1)^3 \log(y+1)}{3x^2+(y-1)^4+2z^2}, \\ \\ \frac{4z \log(y+1)}{3x^2+(y-1)^4+2z^2} \end{pmatrix}^T$$

- *Determinare il dominio di $\mathbb{R}^3$ in cui F è definito e C^1.*
- *Verificare che F è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $y > -1$ e $3x^2 + (y-1)^4 + 2z^2 \neq 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (0, 1, 0), \ y > -1\}.$$

Si tratta quindi della regione delle y strettamente maggiori di -1 a cui è tolto il punto $(0, 1, 0)$. Tale dominio è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 e F_3 le tre componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{4z}{(y+1)(3x^2+(y-1)^4+2z^2)} - \frac{16z(y-1)^3\log(y-1)}{(3x^2+(y-1)^4+2z^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = -\frac{24xz\log(y-1)}{(3x^2+(y-1)^4+2z^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{6x}{(y+1)(3x^2+(y-1)^4+2z^2)} - \frac{24x(y-1)^3\log(y-1)}{(3x^2+(y-1)^4+2z^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale e D_F semplicemente connesso, F risulta anche conservativo in D_F.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1,\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2,\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = F_3, \tag{1.3}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x si ha

$$\Phi(x,y,z) = \log(y+1)\log(3x^2+(y-1)^4+2z^2) + f(y,z),$$

dove f è una generica funzione regolare di due variabili. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.3) si ottiene

$$\frac{\log(3x^2+(y-1)^4+2z^2)}{y+1} + \frac{4(y-1)^3\log(y+1)}{3x^2+(y-1)^4+2z^2} + \frac{\partial f}{\partial y}(y,z)$$
$$= \frac{\log(3x^2+(y-1)^4+2z^2)}{y+1} + \frac{4(y-1)^3\log(y+1)}{3x^2+(y-1)^4+2z^2},$$

vale a dire

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,z) = 0,$$

cioè $f(y,z) = g(z)$ (g generica funzione regolare di una variabile) e quindi $\Phi(x,y,z) = \log(y+1)\log(3x^2+(y-1)^4+2z^2)+g(z)$. Infine, sostituendo tale espressione nella terza delle (1.3) si ha

$$\frac{4z\log(y+1)}{3x^2+(y-1)^4+2z^2}+g'(z)=\frac{4z\log(y+1)}{3x^2+(y-1)^4+2z^2},$$

vale a dire

$$g'(z)=0,$$

da cui si deduce $g(z) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Quindi l'espressione generale per il potenziale $\Phi(x,y,z)$ del campo conservativo F in D_F è data da

$$\Phi(x,y,z)=\log(y+1)\log(3x^2+(y-1)^4+2z^2)+k,\ \ k\in\mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. ■

Esercizio 1.8 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y)=\left(\frac{6x\sqrt{y}}{3x^2+5(y+2)^2}+2x, \frac{10(y+2)\sqrt{y}}{3x^2+5(y+2)^2}+\frac{\log(3x^2+5(y+2)^2)}{2\sqrt{y}}\right).$$

- *Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.*
- *Verificare che F è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $3x^2+5(y+2)^2 \neq 0$ e $y > 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}.$$

Si tratta quindi del semipiano delle y strettamente positive. Tale dominio è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 le due componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{6x}{2\sqrt{y}(3x^2+5(y+2)^2)} - \frac{60x(y+2)\sqrt{y}}{3x^2+5(y+2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale e D_F semplicemente connesso, F risulta anche conservativo in D_F.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \tag{1.4}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x si ha

$$\Phi(x,y) = \sqrt{y}\log(3x^2+5(y+2)^2) + x^2 + f(y),$$

dove f è una generica funzione regolare di una variabile. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.4) si ottiene

$$\frac{10(y+2)\sqrt{y}}{3x^2+5(y+2)^2} + \frac{\log(3x^2+5(y+2)^2)}{2\sqrt{y}} + f'(y) = \\ \frac{10(y+2)\sqrt{y}}{3x^2+5(y+2)^2} + \frac{\log(3x^2+5(y+2)^2)}{2\sqrt{y}},$$

vale a dire

$$f'(y) = 0,$$

cioè $f(y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\Phi(x,y) = \sqrt{y}\log(3x^2+5(y+2)^2) + x^2 + k, \ k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k.

■

Esercizio 1.9 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{18x}{9x^2 + (y - \frac{1}{2})^2}, \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{2(y - \frac{1}{2})}{9x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} \right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1*.*

- *Verificare che* F *è irrotazionale.*

- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $9x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$ e $y > 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq \left(0, \frac{1}{2}\right),\ y > 0 \right\}.$$

Si tratta quindi del semipiano delle y strettamente positive a cui è tolto il punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 le due componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{36x\left(y - \frac{1}{2}\right)}{\left(9x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} 3x(t) = \frac{1}{4}\cos(t) \\ y(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\sin(t). \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{12}\sin(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{4}\cos(t) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \oint_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t), y(t)), T(t)\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-2\sin(t)\cos(t) + \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(t)}} + 8\sin(t) \right) \frac{1}{4}\cos(t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t)}{4\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(t)}} dt = 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin(t)}\Bigg|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \tag{1.5}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x, si ha

$$\Phi(x, y) = \log\left(9x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right) + f(y),$$

dove f è una generica funzione regolare di una variabile. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.5) si ottiene

$$\frac{2(y - \frac{1}{2})}{9x^2 + (y - \frac{1}{2})^2} + f'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{2(y - \frac{1}{2})}{9x^2 + (y - \frac{1}{2})^2},$$

vale a dire

$$f'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}},$$

cioè $f(y) = 2\sqrt{y} + k$, $k \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\Phi(x, y) = \log\left(9x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right) + 2\sqrt{y} + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. $\blacksquare$

Esercizio 1.10 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left(\frac{8(x+1)}{4(x+1)^2 + 2(y-2)^2} + 2x, \frac{4(y-2)}{4(x+1)^2 + 2(y-2)^2} + 2y\right).$$

- *Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.*
- *Verificare che F è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito per $4(x+1)^2 + 2(y-2)^2 \neq 0$ ed è C^1, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (-1, 2)\}.$$

Si tratta quindi del piano a cui è tolto il punto $(-1, 2)$. Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 le due componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{32(x+1)(y-2)}{(4(x+1)^2 + 2(y-2)^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F, è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} 2(x(t)+1) = \cos(t) \\ \sqrt{2}(y(t)-2) = \sin(t). \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{2}\sin(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \oint_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t), y(t)), T(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Bigg(-(4\cos(t) + \cos(t) - 2)\frac{1}{2}\sin(t) \\ &+ \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\sin(t) + 4 + \sqrt{2}\sin(t) \right) \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t) \Bigg) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \sin(t) + \frac{4}{\sqrt{2}}\cos(t) \right) dt = 0, \end{aligned}$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \tag{1.6}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x si ha

$$\Phi(x, y) = \log(4(x+1)^2 + 2(y-2)^2) + x^2 + f(y).$$

dove f è una generica funzione regolare di una variabile. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.6) si ottiene

$$\frac{4(y-2)}{4(x+1)^2 + 2(y-2)^2} + f'(y) = \frac{4(y-2)}{4(x+1)^2 + 2(y-2)^2} + 2y,$$

vale a dire

$$f'(y) = 2y,$$

cioè $f(y) = y^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\Phi(x, y) = \log(4(x+1)^2 + 2(y-2)^2) + x^2 + y^2 + k, \;\; k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. ■

Esercizio 1.11 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}} - yz \\ \\ \frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}} - xz \\ \\ \frac{3z^5}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}} - xy + z \end{pmatrix}^T$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^3$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $x^2 + y^4 + z^6 > 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}.$$

Si tratta quindi dell'intero spazio (x, y, z) a cui è tolto il punto $(0, 0, 0)$. Tale dominio è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 e F_3 le tre componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -\frac{6y^3 z^5}{(x^2 + y^4 + z^6)^{3/2}} - x = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = -\frac{3xz^5}{(x^2 + y^4 + z^6)^{3/2}} - y = \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{2xy^3}{(x^2 + y^4 + z^6)^{3/2}} - z = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale e D_F semplicemente connesso, F risulta anche conservativo in D_F.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = F_3, \tag{1.7}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x, si ha

$$\Phi(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 + z^6} - xyz + f(y, z),$$

dove f è una generica funzione regolare di due variabili. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.7) si ottiene

$$\frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^6}} - xz + \frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4 + z^6}} - xz,$$

vale a dire

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,z)=0,$$

cioè $f(y,z)=g(z)$ (g generica funzione regolare di una variabile) e quindi $\Phi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^4+z^6}-xyz+g(z)$. Infine, sostituendo tale espressione nella terza delle (1.7) si ha

$$\frac{3z^5}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}}-xy+g'(z)=\frac{3z^5}{\sqrt{x^2+y^4+z^6}}-xy+z,$$

vale a dire

$$g'(z)=z,$$

da cui si deduce $g(z)=\frac{1}{2}z^2+k$, $k\in\mathbb{R}$. Quindi l'espressione generale per il potenziale $\Phi(x,y,z)$ del campo conservativo F in D_F è data da

$$\Phi(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^4+z^6}-xyz+\frac{1}{2}z^2+k,\ \ k\in\mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. ■

Esercizio 1.12 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix}\frac{12\log((x-1)^2+(z-1)^2)(x-1)}{(x-1)^2+(z-1)^2}\\ \\ y^3\\ \\ \frac{12\log((x-1)^2+(z-1)^2)(z-1)}{(x-1)^2+(z-1)^2}\end{pmatrix}^T$$

- *Determinare il dominio di $\mathbb{R}^3$ in cui F è definito e C^1.*
- *Verificare che F è irrotazionale.*

- *Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $(x-1)^2+(z-1)^2 > 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, z) \neq (1, 1)\}.$$

Si tratta quindi dello spazio (x, y, z) a cui è tolta la retta $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1. \end{cases}$ Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 e F_3 le tre componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{24(x-1)(z-1) - 24(x-1)(z-1)\log((x-1)^2 + (z-1)^2)}{((x-1)^2 + (z-1)^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} x(t) - 1 = \cos(t) \\ y(t) - 1 = \sin(t) \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -\sin(t) \\ \dot{y}(t) = \cos(t) \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t), y(t), z(t)), T(t) \rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-0 \cdot \sin(t) + (1 + \sin(t))^3 \cos(t) + 0 \cdot 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\cos t + 3 \sin t \cos t + 3 \sin^2 t \cos t + \sin^3 t \cos t \right) dt \\
&= \left(\sin t + \frac{3}{2} \sin^2 t + \sin^3 t + \frac{1}{4} \sin^4 t \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \ \frac{\partial \Phi}{\partial z} = F_3. \tag{1.8}$$

Mediante la sostituzione $\log((x-1)^2 + (z-1)^2) = \xi$, possiamo integrare la prima rispetto ad x ottenendo

$$\Phi(x, y, z) = 3 \log((x-1)^2 + (z-1)^2)^2 + f(y, z),$$

dove f è una generica funzione regolare di due variabili. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.8) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y, z) = y^3,$$

vale a dire

$$f(y, z) = \frac{1}{4} y^4 + g(z)$$

(g generica funzione regolare di una variabile) e quindi $\Phi(x,y,z) = 3\log((x-1)^2+(z-1)^2)^2 + \frac{1}{4}y^4 + g(z)$. Infine, sostituendo tale espressione nella terza delle (1.8) si ha

$$\frac{12\log((x-1)^2+(z-1)^2)(z-1)}{(x-1)^2+(z-1)^2} + g'(z) = \frac{12\log((x-1)^2+(z-1)^2)(z-1)}{(x-1)^2+(z-1)^2},$$

vale a dire

$$g'(z) = 0,$$

da cui si deduce $g(z) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Quindi l'espressione generale per il potenziale $\Phi(x,y,z)$ del campo conservativo F in D_F è data da

$$\Phi(x,y,z) = 3\log((x-1)^2+(z-1)^2)^2 + \frac{1}{4}y^4 + k,\ \ k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. ■

Esercizio 1.13 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x(x-1)}{3\sqrt[3]{((x-1)^2+3(y-2)^2)^2}} + \sqrt[3]{(x-1)^2+3(y-2)^2} \\ \\ \frac{6x(y-2)}{3\sqrt[3]{((x-1)^2+3(y-2)^2)^2}} \end{pmatrix}^T$$

- *Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.*
- *Verificare che F è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito per $(x-1)^2+3(y-2)^2 \neq 0$ ed è C^1, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (1,2)\}.$$

Si tratta quindi del piano a cui è tolto il punto $(1,2)$. Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 le due componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{6x(x-1)(y-2)}{((x-1)^2+3(y-2)^2)^{5/6}} + \frac{6(y-2)}{3\sqrt[3]{((x-1)^2+3(y-2)^2)^2}} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} (x(t)-1) = \cos(t) \\ \sqrt{3}(y(t)-2) = \sin(t). \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -\sin(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos(t) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \oint_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t), y(t)), T(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(-((2\cos(t)+2)\frac{1}{3}\cos(t)+1)\sin(t) \end{aligned}$$

$$
= +(2\cos(t)+2)\frac{1}{3}\sin(t)\cos(t)\Big)\,dt
$$

$$
= \int_0^{2\pi} -\sin(t)dt = 0,
$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$
\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \tag{1.9}
$$

per cui, integrando (per parti e con la sostituzione $(x-1)^2+3(y-2)^2=\xi$) la prima rispetto ad x si ha

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,y) &= \int \frac{2x(x-1)}{3\sqrt[3]{((x-1)^2+3(y-2)^2)^2}}dx + \int \sqrt[3]{(x-1)^2+3(y-2)^2}dx \\
&= x\sqrt[3]{(x-1)^2+3(y-2)^2} - \int \sqrt[3]{(x-1)^2+3(y-2)^2}dx \\
&\quad + \int \sqrt[3]{(x-1)^2+3(y-2)^2}dx + f(y),
\end{aligned}
$$

cioè

$$
\Phi(x,y) = x\sqrt[3]{(x-1)^2+3(y-2)^2} + f(y),
$$

dove f è una generica funzione regolare di una variabile. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.9) si ottiene

$$
\frac{6x(y-2)}{3\sqrt[3]{((x-1)^2+3(y-2)^2)^2}} + f'(y) = \frac{6x(y-2)}{3\sqrt[3]{((x-1)^2+3(y-2)^2)^2}},
$$

vale a dire

$$
f'(y) = 0,
$$

cioè $f(y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\Phi(x,y) = x\sqrt[3]{(x-1)^2 + 3(y-2)^2} + k, \;\; k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. ■

Esercizio 1.14 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left(\frac{6x}{3x^2 + 7y^2}, \frac{14y}{3x^2 + 7y^2} \right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^2$ *in cui* F *è definito e* C^1*.*
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale. Calcolare poi il lavoro per andare da* $A = (1,0)$ *a* $B = (1,1)$*.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $3x^2 + 7y^2 \neq 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Si tratta quindi del piano a cui è tolto il punto $(0,0)$. Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 le due componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{84xy}{(3x^2 + 7y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} \sqrt{3}x(t) = \cos(t) \\ \sqrt{7}y(t) = \sin(t). \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{\sqrt{7}} \cos(t) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \oint_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t), y(t)), T(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2\cos(t)\sin(t) + 2\sin(t)\cos(t))dt = 0, \end{aligned}$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \tag{1.10}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x si ha

$$\Phi(x, y) = \log(3x^2 + 7y^2) + f(y),$$

dove f è una generica funzione regolare di una variabile. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.10) si ottiene

$$\frac{14y}{3x^2+7y^2}+f'(y)=\frac{14y}{3x^2+7y^2},$$

vale a dire

$$f'(y)=0,$$

cioè $f(y)=k$, $k\in\mathbb{R}$ e quindi

$$\Phi(x,y)=\log(3x^2+7y^2)+k,\ \ k\in\mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. Infine, essendo F conservativo, il lavoro per andare da $A=(1,0)$ a $B=(1,1)$ è indipendente dal cammino percorso ed è dato dalla differenza di potenziale tra i due punti, cioè $\Phi(B)-\Phi(A)=\log(10)-\log(3)$. ■

Esercizio 1.15 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x,y,z)=\left(\log x,\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}\right).$$

- *Determinare il dominio di* $\mathbb{R}^3$ *in cui* F *è definito e* C^1.
- *Verificare che* F *è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se* F *è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $y^2+z^2>0$ e $x>0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(y,z)\neq(0,0),\ \ x>0\}.$$

Si tratta quindi del semispazio delle x strettamente positive a cui è tolta la retta $y = 0$ e $z = 0$, ossia l'asse delle x. Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 e F_3 le tre componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -\frac{2zy}{y^2 + z^2} = \frac{\partial F_2}{\partial z},$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_1}{\partial z},$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 0 = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = \cos(t) \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z(t) = \sin(t). \end{cases}$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -\sin(t) \\ \dot{z}(t) = \cos(t) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\oint_\gamma F\cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t),y(t),z(t)), T(t)\rangle dt\\ &= \int_0^{2\pi} (0\cdot 0-\cos(t)\sin(t)+\sin(t)\cos(t))dt = 0,\end{aligned}$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = F_1,\ \frac{\partial\Phi}{\partial y} = F_2,\ \frac{\partial\Phi}{\partial z} = F_3, \tag{1.11}$$

per cui, integrando (per parti) la prima rispetto ad x, si ha

$$\Phi(x,y,z) = (x-1)\log(x) + f(y,z),$$

dove f è una generica funzione regolare di due variabili. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.11) si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(y,z) = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

vale a dire

$$f(y,z) = \sqrt{y^2+z^2} + g(z)$$

(g generica funzione regolare di una variabile), e quindi $\Phi(x,y,z) = (x-1)\log(x) + \sqrt{y^2+z^2} + g(z)$. Infine, sostituendo tale espressione nella terza delle (1.11) si ha

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} + g'(z) = \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},$$

vale a dire

$$g'(z) = 0,$$

da cui si deduce $g(z) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Quindi l'espressione generale per il potenziale $\Phi(x, y, z)$ del campo conservativo F in D_F è data da

$$\Phi(x, y, z) = \Phi(x, y, z) = (x - 1)\log(x) + \sqrt{y^2 + z^2} + k, \ k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. ■

Esercizio 1.16 *Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + 4y^2}, \frac{4y}{x^2 + 4y^2}\right).$$

- *Determinare il dominio di $\mathbb{R}^2$ in cui F è definito e C^1.*
- *Verificare che F è irrotazionale.*
- *Stabilire a priori se F è conservativo e, in caso affermativo, determinare un suo potenziale. Calcolare poi il lavoro per andare da $A = (-1, 0)$ a $B = (0, 1)$.*

Risoluzione. Il campo vettoriale è definito ed è C^1 per $x^2 + 4y^2 \neq 0$, per cui il dominio cercato è

$$D_F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

Si tratta quindi del piano a cui è tolto il punto $(0, 0)$. Tale dominio non è semplicemente connesso.

Indicate con F_1, F_2 le due componenti del campo vettoriale in esame, si ha:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{8xy}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x},$$

per cui il campo è irrotazionale.

Essendo F irrotazionale, ma D_F non semplicemente connesso, per stabilire a priori se il campo è conservativo in D_F, dobbiamo verificare se la circuitazione di F lungo una qualsiasi curva chiusa $\gamma \subset D_F$ è nulla. Osserviamo che, stante l'irrotazionalità del campo, il valore della sua circuitazione lungo una curva chiusa non cambia per deformazioni continue della curva stessa. Pertanto la circuitazione di F lungo una generica curva chiusa $\gamma \subset D_F$ che si deforma con continuità ad un punto (la curva chiusa costante), rimanendo sempre contenuta in D_F è nulla. Basta allora calcolare la circuitazione di F lungo la curva γ di parametrizzazione

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ 2y(t) = \sin(t). \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Si ha:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = -\sin(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{1}{2}\cos(t) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \oint_\gamma F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(t), y(t)), T(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)\sin(t) + \sin(t)\cos(t))dt = 0, \end{aligned}$$

cioè il campo è conservativo.

Un potenziale Φ del campo conservativo F in D_F è definito dalle relazioni

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2, \tag{1.12}$$

per cui, integrando la prima rispetto ad x si ha

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + 4y^2) + f(y),$$

dove f è una generica funzione regolare di una variabile. Sostituendo tale espressione nella seconda delle (1.12) si ottiene

$$\frac{4y}{x^2+4y^2} + f'(y) = \frac{4y}{x^2+4y^2},$$

vale a dire

$$f'(y) = 0,$$

cioè $f(y) = k$, $k \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+4y^2) + k, \ \ k \in \mathbb{R}$$

e un potenziale si ottiene assegnando un arbitrario valore reale alla costante k. Infine, essendo F conservativo, il lavoro per andare da $A = (-1,0)$ a $B = (0,1)$ è indipendente dal cammino percorso ed è dato dalla differenza di potenziale tra i due punti, cioè $\Phi(B) - \Phi(A) = \log(4) - \log(1) = \log(4)$. ■

Esercizio 1.17 *Si consideri in* $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 1 < x^2+y^2 < 4, \ |z| \leq 2\}$ *la forma differenziale chiusa*

$$\omega = \frac{3x}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)}\ dx + \frac{3y}{(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)}\ dy + \frac{z}{(z^2-4)}\ dz.$$

Stabilire a priori *se è esatta e, in caso affermativo, calcolarne una primitiva.*

Risoluzione. Il dominio Ω non è semplicemente connesso: in esso tutte le curve sono omotope alla curva chiusa $\gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 = 2, \ z = 0\}$. Per verificare che ω, forma differenziale chiusa, è anche esatta, basta verificare che è nulla la sua circuitazione su γ. Parametrizzando γ in coordinate polari,

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

risulta

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\sqrt{2}\cos\theta(-\sqrt{2}\sin\theta}{-2} + \frac{3\sqrt{2}\sin\theta(\sqrt{2}\cos\theta}{-2} \right) d\theta = 0$$

e la verifica è compiuta.

Resta da determinarne una primitiva: integrando si ha

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+y^2-1}{-x^2-y^2+4}\right)\frac{1}{2}\log|z^2-1| + c \\ &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{(x^2+y^2-1)(z^2-1)}{-x^2-y^2+4}\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

1.3 Teorema di Stokes

Esercizio 1.18 *Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = (0,0,z)$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \leq 0, \ x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n\rangle d\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.13}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+\mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è la semisfera delle z negative di centro l'origine e raggio uno, orientata ad esempio verso il basso, e $\partial^+\mathcal{S}$ è la circonferenza $x^2+y^2=1$ sul piano $z=0$ *percorsa in senso orario.*

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.13). Essendo

$$rot\, F = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = (0, 0, 0),$$

l'integrale di superficie nella (1.13) è nullo.

Per calcolare l'integrale curvilineo a destra nella (1.13), parametrizziamo la curva $\partial^+\mathcal{S}$ come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = 0. \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = \cos(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 0 \end{cases}$$

e, stante l'orientazione della superficie $\mathcal{S}$ e il relativo verso di percorrenza del suo bordo $\partial^+\mathcal{S}$, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds &= -\int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta) \rangle d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi} (-0 \cdot \sin(\theta) + 0 \cdot \cos(\theta) + 0 \cdot 0) d\theta = 0 \end{aligned}$$

e pertanto la formula (1.13) del teorema di Stokes è verificata. ■

Esercizio 1.19 *Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = \left(x^3, y^3, 1\right)$$

e la regione

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1, \ |z| \leq 1\right\}.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n \rangle d\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.14}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+\mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è la superficie laterale del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ compresa tra i piani $z = -1$ e $z = 1$, orientata ad esempio verso l'esterno, e $\partial^+\mathcal{S}$ è formato dalle circonferenze $x^2 + y^2 = 1$ sul piano $z = -1$ *percorsa in senso antiorario* e $x^2 + y^2 = 1$ sul piano $z = 1$ *percorsa in senso orario.*

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.14). Essendo

$$rot\, F = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^3 & y^3 & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0),$$

l'integrale di superficie nella (1.14) è nullo.

Per calcolare il termine a destra nella (1.14), osserviamo che

$$\int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds, \tag{1.15}$$

dove γ_1 è la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = -1$ e γ_2 è la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$, avendo scelto il verso di percorrenza del bordo $\partial^+\mathcal{S}$ della superficie $\mathcal{S}$ in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Parametrizziamo la curva γ_1 come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) & \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = -1. \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = \cos(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta) \rangle d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos^3(\theta)\sin(\theta) + \sin^3(\theta)\cos(\theta) - 1 \cdot 0) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\cos^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Parametrizziamo la curva γ_2 come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \\ z(\theta) = 1. \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = \cos(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta) \rangle d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos^3(\theta)\sin(\theta) + \sin^3(\theta)\cos(\theta) + 1 \cdot 0) d\theta \\
&= \frac{1}{4}\cos^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4}\sin^4(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

Sostituendo i due valori trovati nella (1.15) si ha

$$\int_{\partial^+ \mathcal{S}} F \cdot ds = 0 - 0 = 0$$

e pertanto la formula (1.14) del teorema di Stokes è verificata. ■

Esercizio 1.20 *Verificare il teorema di Stokes per la regione*

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ -\sqrt{3} \le z \le \sqrt{3}\right\}$$

orientata verso l'esterno e il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(zx, zy, z^2\right).$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n\rangle d\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.16}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+\mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è la superficie sferica $x^2+y^2+z^2=4$ compresa tra i piani $z=-\sqrt{3}$ e $z=\sqrt{3}$, orientata verso l'esterno, e $\partial^+\mathcal{S}$ è formato dalle circonferenze $x^2+y^2=1$ sul piano $z=-\sqrt{3}$ *percorsa in senso antiorario* e $x^2+y^2=1$ sul piano $z=\sqrt{3}$ *percorsa in senso orario.*

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.16). Il rotore del campo in esame è dato da

$$rot\, F = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix} = (-y, x, 0).$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}$ come segue:

$$\Phi(\theta,\varphi) = \begin{cases} x(\theta,\varphi) = 2\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta,\varphi) = 2\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\theta,\varphi) = 2\cos(\varphi). \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$, dove

$$\Phi_\theta(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\theta(\theta,\varphi) = -2\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ y_\theta(\theta,\varphi) = 2\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z_\theta(\theta,\varphi) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_\varphi(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\varphi(\theta,\varphi) = 2\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y_\varphi(\theta,\varphi) = 2\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z_\varphi(\theta,\varphi) = -2\sin(\varphi). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -2\sin(\theta)\sin(\varphi) & 2\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ 2\cos(\theta)\cos(\varphi) & 2\sin(\theta)\cos(\varphi) & -2\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= (-4\cos(\theta)\sin^2(\varphi), -4\sin(\theta)\sin^2(\varphi), -4\sin(\phi)\cos(\varphi)). \end{aligned}$$

Poiché la superficie è orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|}(4\cos(\theta)\sin^2(\varphi), 4\sin(\theta)\sin^2(\varphi), 4\sin(\varphi)\cos(\varphi)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\| d\theta d\varphi$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che il versore normale uscente da una superficie sferica è dato in ogni punto (x, y, z) proprio dal vettore (x, y, z), eventualmente da normalizzare. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n\rangle d\sigma &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \int_0^{2\pi} (-2\sin(\theta)\sin(\varphi), 2\cos(\theta)\sin(\varphi), 0) \cdot \\ &\cdot (4\cos(\theta)\sin^2(\varphi), 4\sin(\theta)\sin^2(\varphi), 4\sin(\varphi)\cos(\varphi)) d\theta d\varphi \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5}{6}\pi} \int_0^{2\pi} (-8\sin(\theta)\cos(\theta)\sin^3(\varphi) + 8\sin(\theta)\cos(\theta)\sin^3(\varphi) \\ &+ 0 \cdot 4\sin(\varphi)\cos(\varphi)) d\theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Per calcolare il termine a destra nella (1.16), osserviamo che

$$\int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds, \tag{1.17}$$

dove γ_1 è la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = -\sqrt{3}$ e γ_2 è la curva $x^2 + y^2 = 1$, $z = \sqrt{3}$, avendo scelto il verso di percorrenza del bordo $\partial^+\mathcal{S}$ della superficie $\mathcal{S}$ in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Parametrizziamo la curva γ_1 come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = \cos(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)\cos(\theta) + 3 \cdot 0) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Parametrizziamo la curva γ_2 come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = \cos(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\int_{\gamma_2} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta) \rangle d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta) + \sqrt{3}\sin(\theta)\cos(\theta) + 3 \cdot 0) d\theta = 0.$$

Sostituendo i due valori trovati nella (1.17) si ha

$$\int_{\partial^+ \mathcal{S}} F \cdot ds = 0 - 0 = 0$$

e pertanto la formula (1.16) del teorema di Stokes è verificata. ■

Esercizio 1.21 *Verificare il teorema di Stokes per la regione*

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ |x| \le 1, \ |y| \le 1; \ 2x + z = 2\right\}$$

orientata verso l'alto e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(x, x, x^2\right).$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n \rangle d\sigma = \int_{\partial^+ \mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.18}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+ \mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è il parallelogramma sul piano obliquo $z = 2 - 2x$ definito dalle relazioni $-1 \le x \le 1$ e $-1 \le y \le 1$, orientato verso l'alto, e $\partial^+ \mathcal{S}$ è formato dai quattro lati di tale parallelogramma, definiti rispettivamente dalle quattro relazioni

$$\begin{array}{lll} x = 1, & z = 0, & -1 \le y \le 1; \\ y = 1, & z = 2 - 2x, & -1 \le x \le 1; \\ x = -1, & z = 4, & -1 \le y \le 1; \\ y = -1, & z = 2 - 2x, & -1 \le x \le 1. \end{array} \tag{1.19}$$

La linea chiusa ottenuta dall'unione dei quattro segmenti sopra definiti deve essere *percorsa in senso antiorario.*

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.18). Il rotore del campo in esame è dato da

$$rot\, F = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & x & x^2 \end{pmatrix} = (0, -2x, 1).$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}$ come segue:

$$\Phi(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = 2 - 2u. \end{cases} \qquad u \in [-1,1],\ v \in [-1,1]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_u \wedge \Phi_v$, dove

$$\Phi_u(u,v) = \begin{cases} x_u(u,v) = 1 \\ y_u(u,v) = 0 \\ z_u(u,v) = -2 \end{cases}$$

e

$$\Phi_v(u,v) = \begin{cases} x_v(u,v) = 0 \\ y_v(u,v) = 1 \\ z_v(u,v) = 0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_u \wedge \Phi_v &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-2, 0, 1). \end{aligned}$$

Poiché la superficie è orientata verso l'alto, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}(-2, 0, 1).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che la direzione normale ad una superficie piana, cioè tutta contenuta in un piano, è data in ogni punto (x, y, z) dal vettore (costante!!) perpendicolare al piano. Quindi, essendo nel nostro caso la superficie contenuta nel piano $2x + z - 2 = 0$, la direzione normale è data dal vettore perpendicolare a tale piano, cioè il vettore $(-2, 0, 1)$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n \rangle d\sigma &= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (0, -2u, 1) \cdot (-2, 0, 1) du dv \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (-0 \cdot 2 - 2u \cdot 0 + 1) du dv = 4.\end{aligned}$$

Per calcolare il termine a destra nella (1.18), osserviamo che

$$\int_{\partial^+ \mathcal{S}} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds - \int_{\gamma_3} F \cdot ds + \int_{\gamma_4} F \cdot ds, \qquad (1.20)$$

dove le curve γ_i, $i = 1, \ldots, 4$ sono i quattro segmenti definiti dalle (1.19), avendo scelto il verso di percorrenza del bordo $\partial^+ \mathcal{S}$ della superficie $\mathcal{S}$ in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Parametrizziamo la curva γ_1 come segue:

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \qquad t \in [-1, 1] \\ z(t) = 0. \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 1 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int_{-1}^{1} \langle F(x(t), y(t), z(t)), T(t) \rangle dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (1 \cdot 0 + 1 + 1 \cdot 0) dt = 2.$$

Parametrizziamo la curva γ_2 come segue:

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \\ z(t) = 2 - 2t. \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -2 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F \cdot ds &= \int_{-1}^{1} \langle F(x(t), y(t), z(t)), T(t) \rangle dt \\ &= \int_{-1}^{1} (t + t \cdot 0 - 2t^2) dt = \frac{1}{2} t^2 - \frac{2}{3} t^3 \Big|_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Parametrizziamo la curva γ_3 come segue:

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = -1 \\ y(t) = t \\ z(t) = 4. \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = 1 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\int_{\gamma_1} F \cdot ds = \int_{-1}^{1} \langle F(x(t), y(t), z(t)), T(t) \rangle dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (-1 \cdot 0 - 1 + 1 \cdot 0) dt = -2.$$

Parametrizziamo la curva γ_4 come segue:

$$r(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -1 \\ z(t) = 2 - 2t. \end{cases} \qquad t \in [-1, 1]$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) = 1 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = -2 \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_4} F \cdot ds &= \int_{-1}^{1} \langle F(x(t), y(t), z(t)), T(t) \rangle dt \\ &= \int_{-1}^{1} (t + t \cdot 0 - 2t^2) dt = \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 \Big|_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Sostituendo i quattro valori trovati nella (1.20) si ha

$$\int_{\partial^+ \mathcal{S}} F \cdot ds = 2 + \frac{4}{3} + 2 - \frac{4}{3} = 4$$

e pertanto la formula (1.18) del teorema di Stokes è verificata. ∎

Esercizio 1.22 *Verificare il teorema di Stokes per la regione*

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2 + z^2 = 4, \; -1 \leq x \leq z + 1 \right\}$$

orientata verso l'esterno e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(x^2, z^2, y^2 \right).$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n \rangle d\sigma = \int_{\partial^+ \mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.21}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+\mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è la superficie laterale del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ compresa tra i piani $x = -1$ e $x = z + 1$, orientata ad esempio verso l'esterno, e $\partial^+\mathcal{S}$ è formato dalla circonferenza $y^2 + z^2 = 4$ sul piano $x = -1$ *percorsa in senso antiorario* e dalla curva sul piano $x = z + 1$ definita da $y^2 + z^2 = 4$ *percorsa in senso orario*.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.21). Il rotore del campo in esame è dato da

$$rot\, F = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 & z^2 & y^2 \end{pmatrix} = (2y - 2z, 0, 0).$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}$ come segue:

$$\Phi(t, \theta) = \begin{cases} x(t, \theta) = t \\ y(t, \theta) = 2\cos(\theta) \\ z(t, \theta) = 2\sin(\theta). \end{cases} \qquad t \in [-1, 2\sin(\theta) + 1],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_t \wedge \Phi_\theta$, dove

$$\Phi_t(t, \theta) = \begin{cases} x_t(t, \theta) = 1 \\ y_t(t, \theta) = 0 \\ z_t(t, \theta) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(t, \theta) = \begin{cases} x_\theta(t, \theta) = 0 \\ y_\theta(t, \theta) = -2\sin(\theta) \\ z_\theta(t, \theta) = 2\cos(\theta). \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_t \wedge \Phi_\theta = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sin(\theta) & 2\cos(\theta) \end{pmatrix} = (0, -2\cos(\theta), -2\sin(\theta)).$$

Avendo scelto di orientare la superficie verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_t \wedge \Phi_\theta\|}(0, 2\cos(\theta), 2\sin(\theta)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_t \wedge \Phi_\theta\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_t \wedge \Phi_\theta\| dt d\theta$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n \rangle d\sigma = & \int_{-1}^{2\sin(\theta)+1} \int_0^{2\pi} (4\cos(\theta) - 4\sin(\theta), 0, 0) \cdot \\ & \cdot (0, 2\cos(\theta), 2\sin(\theta)) d\theta dt \\ = & \int_{-1}^{2\sin(\theta)+1} \int_0^{2\pi} ((4\cos(\theta) - 4\sin(\theta)) \cdot 0 \\ & + 0 \cdot 2\cos(\theta) + 0 \cdot 2\sin(\theta)) d\theta dt = 0. \end{aligned}$$

Per calcolare il termine a destra nella (1.21), osserviamo che

$$\int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds = \int_{\gamma_1} F \cdot ds - \int_{\gamma_2} F \cdot ds, \tag{1.22}$$

dove γ_1 è la curva $y^2 + z^2 = 4$, $x = -1$ e γ_2 è la curva $y^2 + z^2 = 4$, $x = z + 1$, avendo scelto il verso di percorrenza del bordo $\partial^+\mathcal{S}$ della superficie $\mathcal{S}$ in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Parametrizziamo la curva γ_1 come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = -1 \\ y(\theta) = 2\cos(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = 2\sin(\theta). \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = 0 \\ \dot{y}(\theta) = -2\sin(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 2\cos(\theta) \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 \cdot 0 - 8\sin^3(\theta) + 8\cos^3(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-8(1-\cos^2(\theta))\sin(\theta) + 8(1-\sin^2(\theta))\cos(\theta)) d\theta \\ &= -\frac{8}{3}\cos^3(\theta)\Big|_0^{2\pi} - \frac{8}{3}\sin^3(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Parametrizziamo la curva γ_2 come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = 2\sin(\theta) + 1 \\ y(\theta) = 2\cos(\theta) \\ z(\theta) = 2\sin(\theta). \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = 2\cos(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = -2\sin(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 2\cos(\theta) \end{cases}$$

e quindi si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta) \rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} ((2\sin(\theta)+1)^2 2\cos(\theta) - 8\sin^3(\theta) + 8\cos^3(\theta)) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} ((2\sin(\theta)+1)^2 2\cos(\theta) - 8(1-\cos^2(\theta))\sin(\theta) \end{aligned}$$

$$+ 8(1-\sin^2(\theta))\cos(\theta))d\theta$$
$$= \frac{1}{3}(2\sin(\theta)+1)^3\Big|_0^{2\pi} - \frac{8}{3}\cos^3(\theta)\Big|_0^{2\pi} - \frac{8}{3}\sin^3(\theta)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Sostituendo i due valori trovati nella (1.22) si ha

$$\int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds = 0 - 0 = 0$$

e pertanto la formula (1.21) del teorema di Stokes è verificata. ■

Esercizio 1.23 *Verificare il teorema di Stokes per la regione*

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 = x^2 + 4z^2,\ 0 \le y \le 1\right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = (zy, x, z)\,.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n\rangle d\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.23}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+\mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è la superficie laterale del cono $y^2 = x^2 + 4z^2$ compresa tra i piani $y = 0$ e $y = 1$, orientata ad esempio verso l'esterno, e $\partial^+\mathcal{S}$ è l'ellisse $x^2 + 4z^2 = 1$ sul piano $y = 1$ *percorsa in senso orario.*

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.23). Il rotore del campo in esame è dato da

$$rot\, F = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ zy & x & z \end{pmatrix} = (0, y, 1-z).$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}$ come segue:

$$\Phi(t,\theta) = \begin{cases} x(t,\theta) = t\cos(\theta) \\ y(t,\theta) = t \\ z(t,\theta) = \frac{1}{2}t\sin(\theta). \end{cases} \qquad t \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_t \wedge \Phi_\theta$, dove

$$\Phi_t(t,\theta) = \begin{cases} x_t(t,\theta) = \cos(\theta) \\ y_t(t,\theta) = 1 \\ z_t(t,\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta) \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(t,\theta) = \begin{cases} x_\theta(t,\theta) = -t\sin(\theta) \\ y_\theta(t,\theta) = 0 \\ z_\theta(t,\theta) = \frac{1}{2}t\cos(\theta). \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_t \wedge \Phi_\theta = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & 1 & \frac{1}{2}\sin(\theta) \\ -t\sin(\theta) & 0 & \frac{1}{2}t\cos(\theta) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}t\cos(\theta), -\frac{1}{2}t, t\sin(\theta)\right).$$

Avendo scelto di orientare la superficie verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_t \wedge \Phi_\theta\|}\left(\frac{1}{2}t\cos(\theta), -\frac{1}{2}t, t\sin(\theta)\right).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_t \wedge \Phi_\theta\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_t \wedge \Phi_\theta\| dtd\theta$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n\rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(0, t, 1 - \frac{1}{2}t\sin(\theta)\right) \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{1}{2}t\cos(\theta), -\frac{1}{2}t, t\sin(\theta)\right) d\theta dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(0 \cdot \frac{1}{2} t\cos(\theta) - \frac{1}{2}t^2 + t\sin(\theta) - \frac{1}{2}t^2 \sin^2(\theta)\right) d\theta dt \\
&= -\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}\pi.
\end{aligned}
$$

Per calcolare l'integrale curvilineo a destra nella (1.23), parametrizziamo la curva $\partial^+\mathcal{S}$ come segue:

$$
r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = 1 \\ z(\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta). \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]
$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$
T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = 0 \\ \dot{z}(\theta) = \frac{1}{2}\cos(\theta) \end{cases}
$$

e, stante l'orientazione della superficie $\mathcal{S}$ e il relativo verso di percorrenza del suo bordo $\partial^+\mathcal{S}$, si ha:

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta)\rangle d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2}\sin^2(\theta) + \cos(\theta)\cdot 0 + \frac{1}{4}\sin(\theta)\cos(\theta)) d\theta = -\frac{1}{2}\pi
\end{aligned}
$$

e pertanto la formula (1.23) del teorema di Stokes è verificata. ■

Esercizio 1.24 *Verificare il teorema di Stokes per la regione*

$$
\mathcal{S} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2;\ 2 \leq z \leq 4\right\}
$$

orientata verso l'alto e il campo vettoriale

$$
F(x, y, z) = (z, x, y)\,.
$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n \rangle d\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.24}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+\mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è la superficie laterale del paraboliode $z = 4 - x^2 - y^2$ compresa tra i piani $z = 2$ e $z = 4$, orientata verso l'alto, e $\partial^+\mathcal{S}$ è la circonferenza $x^2 + y^2 = 2$ sul piano $z = 2$ *percorsa in senso antiorario.*

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.24). Il rotore del campo in esame è dato da

$$rot\, F = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{pmatrix} = (1, 1, 1).$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}$ come segue:

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin(\theta) \\ z(\rho, \theta) = 4 - \rho^2. \end{cases} \qquad \rho \in [0, \sqrt{2}],\ \theta \in [0, 2\pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta$, dove

$$\Phi_\rho(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho, \theta) = \cos(\theta) \\ y_\rho(\rho, \theta) = \sin(\theta) \\ z_\rho(\rho, \theta) = -2\rho \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho, \theta) = -\rho \sin(\theta) \\ y_\theta(\rho, \theta) = \rho \cos(\theta) \\ z_\theta(\rho, \theta) = 0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -2\rho \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} = (2\rho^2 \cos(\theta), 2\rho^2 \sin(\theta), \rho).$$

Essendo la superficie orientata verso l'alto, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|}(2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\sin(\theta), \rho).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| d\rho d\theta$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n\rangle d\sigma &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(1,1,1)\cdot(2\rho^2\cos(\theta), 2\rho^2\sin(\theta), \rho) d\theta d\rho \\ &= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}(2\rho^2\cos(\theta) + 2\rho^2\sin(\theta) + \rho) d\theta d\rho = 2\pi.\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale curvilineo a destra nella (1.24), parametrizziamo la curva $\partial^+\mathcal{S}$ come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta) \\ y(\theta) = \sqrt{2}\sin(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = 2. \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sqrt{2}\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 0 \end{cases}$$

e, stante l'orientazione della superficie $\mathcal{S}$ e il relativo verso di percorrenza del suo bordo $\partial^+\mathcal{S}$, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+\mathcal{S}} F\cdot ds &= \int_0^{2\pi}\langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta)\rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(-2\sqrt{2}\sin(\theta) + 2\cos^2(\theta) + \sqrt{2}\sin(\theta)\cdot 0) d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

e pertanto la formula (1.24) del teorema di Stokes è verificata. ■

Esercizio 1.25 *Verificare il teorema di Stokes per il campo vettoriale*

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 1, \ x^2+y^2 \leq 1\right\}$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Stokes

$$\int_{\mathcal{S}} \langle rot\, F, n\rangle d\sigma = \int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds, \tag{1.25}$$

dove F è un campo vettoriale, $\mathcal{S}$ è una superficie di $\mathbb{R}^3$ e $\partial^+\mathcal{S}$ è il suo bordo percorso in accordo con l'orientazione della superficie stessa. Nel caso in esame, $\mathcal{S}$ è la superficie (piana!!) data dal cerchio $x^2+y^2 \leq 1$ sul piano $z=1$, orientata ad esempio verso l'alto, e $\partial^+\mathcal{S}$ è la circonferenza $x^2+y^2=1$ sul piano $z=1$ *percorsa in senso antiorario.*

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.25). Essendo

$$rot\, F = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{x^2+y^2+z^2} & \frac{y}{x^2+y^2+z^2} & \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \end{pmatrix} = (0,0,0),$$

l'integrale di superficie nella (1.25) è nullo.

Per calcolare l'integrale curvilineo a destra nella (1.25), parametrizziamo la curva $\partial^+\mathcal{S}$ come segue:

$$r(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = \cos(\theta) \\ y(\theta) = \sin(\theta) \qquad \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\theta) = 1. \end{cases}$$

Il vettore tangente a tale curva è dato da:

$$T(\theta) = \begin{cases} \dot{x}(\theta) = -\sin(\theta) \\ \dot{y}(\theta) = \cos(\theta) \\ \dot{z}(\theta) = 0 \end{cases}$$

e, stante l'orientazione della superficie $\mathcal{S}$ e il relativo verso di percorrenza del suo bordo $\partial^+\mathcal{S}$, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+\mathcal{S}} F \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \langle F(x(\theta), y(\theta), z(\theta)), T(\theta)\rangle d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\cos(\theta)\sin(\theta) + \frac{1}{2}\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{1}{2}\cdot 0\right) d\theta = 0\end{aligned}$$

e pertanto la formula (1.25) del teorema di Stokes è verificata. ■

Esercizio 1.26 *Facendo opportunamente uso del teorema di Stokes in $\mathbb{R}^2$, calcolare l'integrale curvilineo*

$$\int\limits_{+\partial A} \{(x\log(1+xy) + x + 3y)\ \ dx + (y\log(1+xy) + x + 3y)\ \ dy\}$$

dove $+\partial A$ è la frontiera dell'insieme

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x + y \leq 5\right\}$$

orientata in verso antiorario.

Risoluzione. In base al teorema di Stokes l'integrale curvilineo proposto è uguale a

$$\begin{aligned}&\int\limits_{+\partial A} \{(x\log(1+xy) + x + 3y)\ \ dx + (y\log(1+xy) + x + 3y)\ \ dy\} = \\ &\iint\limits_A \partial_x\{y\log(1+xy) + x + 3y\} - \partial_y\{x\log(1+xy) + x + 3y\} dx\ dy = \\ &\iint\limits_A \left[\left(y\frac{y}{1+xy} + 1\right) - \left(x\frac{x}{1+xy} + 3\right)\right] dx\ dy = \\ &\iint\limits_A \left(\frac{y^2 - x^2}{1+xy} - 2\right) dx\ dy = -2\iint\limits_A dx\ dy = -25.\end{aligned}$$

■

Esercizio 1.27 *Verificare l'uguaglianza stabilita dal teorema di Stokes in* $\mathbb{R}^3$ *per il campo vettoriale*

$$F = (2y + z, 2x + z, 2x + 2y)$$

e la superficie

$$\mathcal{S} = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 = 1, \; z \geq 0\Big\}\,.$$

Risoluzione. Si tratta di verificare che

$$\iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } F, n\rangle d\sigma = \int_{\gamma} \langle F, T\rangle ds \tag{1.26}$$

dove n è il versore normale esterno ad $\mathcal{S}$, γ il bordo della superficie $\mathcal{S}$, T il versore tangente a γ.
Si ha

$$\begin{aligned}
\gamma &= \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1, \; z = 0\Big\} \\
n &= (x, y, z) \;\; \text{con } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\
T &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}, 0\right).
\end{aligned}$$

Risulta poi

$$\text{rot } F = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2y + z & 2x + z & 2x + 2y \end{pmatrix} = (2-1, -2+1, 2-2) = (1, -1, 0),$$

per cui

$$\langle \text{rot } F, n\rangle = x - y.$$

Utilizzando le coordinate polari di $\mathbb{R}^3$ possiamo parametrizzare $\mathcal{S}$ come

$$\mathcal{S} : \begin{cases} x = \cos\phi \cos\theta \\ y = \sin\phi \cos\theta \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ z = \sin\theta. \end{cases}$$

Risulta allora

$$\begin{cases} \partial_\theta x = -\cos\phi\sin\theta \\ \partial_\theta y = -\sin\phi\sin\theta \\ \partial_\theta z = \cos\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_\phi x = -\sin\phi\cos\theta \\ \partial_\phi y = \cos\phi\cos\theta \\ \partial_\phi z = 0, \end{cases}$$

per cui

$$\begin{aligned}(\partial_\theta x, \partial_\theta y, \partial_\theta z) \wedge (\partial_\phi x, \partial_\phi y, \partial_\phi z) =& \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\cos\phi\sin\theta & -\sin\phi\sin\theta & \cos\theta \\ -\sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \\ =&(-\cos\phi\cos^2\theta, -\sin\phi\cos^2\theta, \sin\theta\cos\theta)\end{aligned}$$

e quindi $|(\partial_\theta x, \partial_\theta y, \partial_\theta z) \wedge (\partial_\phi x, \partial_\phi y, \partial_\phi z)| = |\cos\theta|$.
Risulta

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{S}} \langle \text{rot } F, n\rangle d\Sigma &= \iint_{\mathcal{S}} (x-y) d\Sigma \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} (\cos\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi)\cos\theta \; d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos\phi - \sin\phi) d\phi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \; d\theta = 0,\end{aligned}$$

risultato che si poteva prevedere anche prima del passaggio in coordinate polari utlizzando la simmetria. Inoltre, parametrizzando la circonferenza γ,

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

abbiamo

$$\int_\gamma \langle F, T\rangle ds = \int_0^{2\pi} (2\sin\theta(-\sin\theta) + 2\cos\theta(\cos\theta))$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) d\theta = 0,$$

per cui l'uguaglianza (1.26) è verificata. ■

1.4 Teorema di Gauss

Esercizio 1.28 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, 0, z)\,.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_\Omega div\, F \; dx\, dy\, dz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e\rangle \; d\sigma, \tag{1.27}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è la sfera di centro l'origine e raggio uno e $\partial\Omega$ è la superficie esterna di tale sfera, definita quindi dalla relazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.27). Essendo

$$div\, F = \partial_x x + \partial_y 0 + \partial_z z = 2,$$

l'integrale triplo nella (1.27) è pari a due volte il volume della sfera unitaria, quindi è pari a $\frac{8}{3}\pi$. (Alternativamente, si può ottenere lo stesso risultato integrando la funzione costante 2 nella regione Ω utilizzando le coordinate sferiche.)

Per calcolare l'integrale di superficie a destra nella (1.27), parametrizziamo la superficie $\partial\Omega$ come segue:

$$\Phi(\theta,\varphi) = \begin{cases} x(\theta,\varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta,\varphi) = \sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\pi] \\ z(\theta,\varphi) = \cos(\varphi). \end{cases}$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$, dove

$$\Phi_\theta(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\theta(\theta,\varphi) = -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ y_\theta(\theta,\varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z_\theta(\theta,\varphi) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_\varphi(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\varphi(\theta,\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y_\varphi(\theta,\varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z_\varphi(\theta,\varphi) = -\sin(\varphi). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= (-\cos(\theta)\sin^2(\varphi), -\sin(\theta)\sin^2(\varphi), -\sin(\phi)\cos(\varphi)). \end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|}(\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\varphi)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\| d\theta d\varphi$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che il versore normale uscente da una superficie sferica è dato in ogni punto (x, y, z) proprio dal vettore (x, y, z), eventualmente da normalizzare. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(\theta)\sin(\varphi), 0, \cos(\varphi)) \cdot \\
&\quad \cdot (\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\varphi)) d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta)\sin^3(\varphi) + \sin(\varphi)\cos^2(\varphi)) d\theta d\varphi \\
&= \pi \int_0^{\pi} \sin(\varphi)(1 - \cos^2(\varphi)) d\varphi + 2\pi \int_0^{\pi} \sin(\varphi)\cos^2(\varphi) d\varphi \\
&= \pi \Big(-\cos(\varphi)\Big|_0^{\pi} \Big) + \pi \Big(-\frac{1}{3}\cos^3(\varphi)\Big|_0^{\pi} \Big) \\
&= 2\pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi
\end{aligned}$$

e pertanto la formula (1.27) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.29 *Verificare il teorema di Gauss per il campo vettoriale*

$$F(x, y, z) = \big(x^3, y^3, 1\big)$$

e la regione

$$\Omega = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ |z| \leq 1\big\}.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_{\Omega} div\, F dxdydz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.28}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è il cilindro definito da $x^2 + y^2 \leq 1$ delimitato dai piani $z = -1$ e $z = 1$ e $\partial\Omega$ è formato dalla superficie laterale del cilindro, definita da $x^2 + y^2 = 1$, $-1 \leq z \leq 1$ e dalle due superfici di base, cioè il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ sul piano $z = -1$ e il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$ sul piano $z = 1$.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.28). La divergenza del campo in esame è data da

$$div\,F = \partial_x x^3 + \partial_y y^3 + \partial_z 1 = 3x^2 + 3y^2.$$

Per calcolare tale integrale, utilizziamo le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x(\rho, \theta, t) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho, \theta, t) = \rho\sin(\theta) \\ z(\rho, \theta, t) = t. \end{cases}$$

Lo jacobiano di tale cambio di coordinate è dato da:

$$J(\rho, \theta, t) = \left| det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \rho$$

e la regione Ω nelle nuove coordinate è descritta dalle relazioni $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in [-1, 1]$. Pertanto, l'integrale triplo cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_\Omega div\,F dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (3\rho^2\cos^2(\theta) + 3\rho^2\sin^2(\theta))\rho dt d\theta d\rho \\ &= 6\pi \left(\frac{1}{4}\rho^4 \Big|_0^1 \right) = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Per calcolare il termine a destra nella (1.28), osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = \int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1} \rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_3} \langle F, n_{e,3} \rangle d\sigma, \quad (1.29)$$

dove $n_{e,i}$ sono i versori normali uscenti alle superfici $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2, 3$, superfici definite rispettivamente da:

$$x^2 + y^2 = 1, \ -1 \leq z \leq 1;$$

$$x^2 + y^2 \leq 1, \ z = -1;$$

$$x^2 + y^2 \leq 1, \ z = 1.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_1$ come segue:

$$\Phi(\theta,t)=\begin{cases} x(\theta,t)=\cos(\theta) \\ y(\theta,t)=\sin(\theta) \\ z(\theta,t)=t. \end{cases} \qquad \theta\in[0,2\pi],\ t\in[-1,1]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_t$, dove

$$\Phi_\theta(\theta,t)=\begin{cases} x_\theta(\theta,t)=-\sin(\theta) \\ y_\theta(\theta,t)=\cos(\theta) \\ z_\theta(\theta,t)=0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_t(\theta,t)=\begin{cases} x_t(\theta,t)=0 \\ y_t(\theta,t)=0 \\ z_t(\theta,t)=1. \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\Phi_\theta \wedge \Phi_t &= det\begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\theta),\sin(\theta),0).\end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|}(\cos(\theta),\sin(\theta),0).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| d\theta dt$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1}\rangle d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} (\cos^3(\theta),\sin^3(\theta),1)\cdot(\cos(\theta),\sin(\theta),0) d\theta dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta) + 1 \cdot 0) d\theta dt \\
&= \frac{3}{2}\pi,
\end{aligned}
$$

avendo calcolato (per parti) gli integrali

$$
\int_0^{2\pi} \cos^4(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta = \frac{3}{4}\pi.
$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_2$ come segue:

$$
\Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \rho\sin(\theta) \\ z(\rho, \theta) = -1. \end{cases} \qquad \rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi]
$$

Il versore normale uscente da tale superficie è $(0, 0, -1)$. Calcoliamo ora il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$ necessario per determinare l'elemento d'area $d\sigma$. Si ha:

$$
\Phi_\rho(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho, \theta) = \cos(\theta) \\ y_\rho(\rho, \theta) = \sin(\theta) \\ z_\rho(\rho, \theta) = 0 \end{cases}
$$

e

$$
\Phi_\theta(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho, \theta) = -\rho\sin(\theta) \\ y_\theta(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta) \\ z_\theta(\rho, \theta) = 0. \end{cases}
$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\
&= (0, 0, \rho)
\end{aligned}
$$

e pertanto $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| = \rho$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$
\int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2}\rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^3\cos^3(\theta), \rho^3\sin^3(\theta), 1) \cdot (0, 0, -1) \rho d\theta d\rho
$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\rho d\theta d\rho = -\pi.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_3$ come segue:

$$\Phi(\rho,\theta) = \begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta) \qquad \rho \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi] \\ z(\rho,\theta) = 1. \end{cases}$$

Il versore normale uscente da tale superficie è $(0,0,1)$. Calcoliamo ora il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$ necessario per determinare l'elemento d'area $d\sigma$. Si ha:

$$\Phi_\rho(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho,\theta) = \cos(\theta) \\ y_\rho(\rho,\theta) = \sin(\theta) \\ z_\rho(\rho,\theta) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho,\theta) = -\rho\sin(\theta) \\ y_\theta(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ z_\theta(\rho,\theta) = 0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_\rho \wedge \Phi_\theta &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \\ &= (0,0,\rho) \end{aligned}$$

e pertanto $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| = \rho$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_3} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^3\cos^3(\theta), \rho^3\sin^3(\theta), 1) \cdot (0,0,1)\rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \, d\rho = \pi. \end{aligned}$$

Sostituendo i tre valori trovati nella (1.29) si ha

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = \frac{3}{2}\pi - \pi + \pi = \frac{3}{2}\pi$$

e pertanto la formula (1.28) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.30 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < y < 2,\ 0 < z < 3\big\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, z)\,.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_\Omega div\, F\ dx\, dy\, dz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e\rangle d\sigma, \tag{1.30}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è il parallelepipedo definito dalle relazioni $0 < x < 1$, $0 < y < 2$, $0 < z < 3$ e $\partial\Omega$ è formato da sei rettangoli definiti dalle relazioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} x = 0, & 0 < y < 2, & 0 < z < 3; \\ x = 1, & 0 < y < 2, & 0 < z < 3; \\ y = 0, & 0 < x < 1, & 0 < z < 3; \\ y = 2, & 0 < x < 1, & 0 < z < 3; \\ z = 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < 2; \\ z = 3, & 0 < x < 1, & 0 < y < 2. \end{array} \tag{1.31}$$

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.30). Essendo

$$div\, F = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3,$$

l'integrale triplo nella (1.30) è pari a tre volte il volume del parallelepipedo che ha spigoli di lunghezze uno, due e tre, quindi è pari a 18. (Alternativamente, si può ottenere lo stesso risultato integrando la funzione costante 3 nella regione Ω.)

Per calcolare il termine a destra nella (1.30), osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e\rangle d\sigma = \sum_{i=1}^{6} \int_{\mathcal{S}_i} \langle F, n_{e,i}\rangle d\sigma, \tag{1.32}$$

dove $n_{e,i}$ sono i versori normali uscenti alle superfici $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, 6$, superfici definite dalle (1.31). Osserviamo che si tratta di superfici piane contenute in piani paralleli agli assi coordinati, per cui gli integrali di superficie nella (1.32) sono in realtà integrali doppi (se pensiamo di parametrizzare le superfici con le variabili u, v, l'elemento di superficie $d\sigma$ è dato da $dudv$). In più, i versori normali uscenti a tali superfici sono paralleli agli assi coordinati e, più precisamente,

$$\begin{aligned} &n_{e,1} = (-1,0,0); \qquad && n_{e,2} = (1,0,0); \qquad && n_{e,3} = (0,-1,0); \\ &n_{e,4} = (0,1,0); && n_{e,5} = (0,0,-1); && n_{e,6} = (0,0,1). \end{aligned}$$

. Pertanto, i sei integrali nella (1.32) sono dati da:

$$\int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1} \rangle d\sigma = \int_0^2 \int_0^3 (0,y,z) \cdot (-1,0,0) dydz = 0;$$
$$\int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma = \int_0^2 \int_0^3 (1,y,z,) \cdot (1,0,0) dydz = 6;$$
$$\int_{\mathcal{S}_3} \langle F, n_{e,3} \rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^3 (x,0,z) \cdot (0,-1,0) dxdz = 0;$$
$$\int_{\mathcal{S}_4} \langle F, n_{e,4} \rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^3 (x,2,z,) \cdot (0,1,0) dxdz = 6;$$
$$\int_{\mathcal{S}_5} \langle F, n_{e,5} \rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^2 (x,y,0) \cdot (0,0,-1) dxdy = 0;$$
$$\int_{\mathcal{S}_6} \langle F, n_{e,6} \rangle d\sigma = \int_0^1 \int_0^2 (x,y,3) \cdot (0,0,1) dxdy = 6.$$

Sostituendo i sei valori trovati nella (1.32) si ha

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = 0 + 6 + 0 + 6 + 0 + 6 = 18$$

e pertanto la formula (1.30) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.31 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq |x|,\ 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (2x, 3y, 0)\,.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_\Omega div\, F\ dx\, dy\, dz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.33}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è la porzione di cilindro $x^2+y^2 \leq 1$ delimitato dai piani orizzontali $z = 0$ e $z = 1$ e dai piani verticali $y = x$ e $y = -x$, mentre $\partial\Omega$ è formato dalle cinque superfici definite dalle relazioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} x^2 + y^2 = 1, & y \geq |x|, & 0 \leq z \leq 1; \\ y = x, & 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, & 0 \leq z \leq 1; \\ y = -x, & -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 0, & 0 \leq z \leq 1; \\ z = 0, & x^2 + y^2 \leq 1, & y \geq |x|; \\ z = 1, & x^2 + y^2 \leq 1, & y \geq |x|. \end{array} \tag{1.34}$$

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.33). Essendo

$$div\, F = \partial_x 2x + \partial_y 3y + \partial_z 0 = 5,$$

l'integrale triplo nella (1.33) è pari a cinque volte il volume di Ω, che è un quarto del cilindro di base $x^2+y^2 \leq 1$ e altezza uno, vale a dire $\frac{5}{4}\pi$. (Alternativamente, si può ottenere lo stesso risultato integrando la funzione costante 6 nella regione Ω e utilizzando opportunamente le coordinate cilindriche.)

Per calcolare il termine a destra nella (1.33), osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = \sum_{i=1}^{5} \int_{\mathcal{S}_i} \langle F, n_{e,i} \rangle d\sigma, \tag{1.35}$$

dove $n_{e,i}$ sono i versori normali uscenti alle superfici $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, 5$, superfici definite dalle (1.34). Cominciamo con l'osservare che i versori normali $n_{e,4}$ e

$n_{e,5}$ sono date rispettivamente da $(0,0,-1)$ e $(0,0,1)$, per cui, essendo nulla l'ultima componente del campo F, si ha $\langle F, n_{e,4}\rangle = \langle F, n_{e,5}\rangle = 0$ e quindi

$$\int_{\mathcal{S}_4} \langle F, n_{e,4}\rangle d\sigma = \int_{\mathcal{S}_5} \langle F, n_{e,5}\rangle d\sigma = 0.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_1$ come segue:

$$\Phi(\theta, t) = \begin{cases} x(\theta, t) = \cos(\theta) \\ y(\theta, t) = \sin(\theta) \\ z(\theta, t) = t. \end{cases} \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right],\ t \in [0,1]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_t$, dove

$$\Phi_\theta(\theta, t) = \begin{cases} x_\theta(\theta, t) = -\sin(\theta) \\ y_\theta(\theta, t) = \cos(\theta) \\ z_\theta(\theta, t) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_t(\theta, t) = \begin{cases} x_t(\theta, t) = 0 \\ y_t(\theta, t) = 0 \\ z_t(\theta, t) = 1. \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_\theta \wedge \Phi_t = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0).$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| d\theta dt$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1}\rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (2\cos(\theta), 3\sin(\theta), 0) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) d\theta dt \\ &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} (2\cos^2(\theta) + 3\sin^2(\theta) + 0 \cdot 0) d\theta dt \\ &= 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_2$ come segue:

$$\Phi(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = u \\ z(u,v) = v. \end{cases} \qquad u \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right],\ v \in [0,1]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_u \wedge \Phi_v$, dove

$$\Phi_u(u,v) = \begin{cases} x_u(u,v) = 1 \\ y_u(u,v) = 1 \\ z_u(u,v) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_v(u,v) = \begin{cases} x_v(u,v) = 0 \\ y_v(u,v) = 0 \\ z_v(u,v) = 1. \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, -1, 0).$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}(1, -1, 0).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| du dv$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che la direzione normale ad una superficie piana, cioè tutta contenuta in un piano, è data in ogni punto (x, y, z) dal vettore (costante!!) perpendicolare al piano. Quindi, essendo nel nostro caso la superficie contenuta nel piano $y - x = 0$, la direzione normale è data dal vettore perpendicolare a tale piano, cioè il vettore $(1, -1, 0)$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}_2} \langle rot\, F, n_{e,2} \rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2u, 3u, 0) \cdot (1, -1, 0)\; du\, dv \\ &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (2u - 3u + 0 \cdot 0)\; du\, dv = -\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_3$ come segue:

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = -u \\ z(u, v) = v. \end{cases} \qquad u \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right],\; v \in [0, 1]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_u \wedge \Phi_v$, dove

$$\Phi_u(u, v) = \begin{cases} x_u(u, v) = 1 \\ y_u(u, v) = -1 \\ z_u(u, v) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_v(u, v) = \begin{cases} x_v(u, v) = 0 \\ y_v(u, v) = 0 \\ z_v(u, v) = 1. \end{cases}$$

Pertanto

$$\Phi_u \wedge \Phi_v = det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1, -1, 0).$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|}(-1, -1, 0).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_u \wedge \Phi_v\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_u \wedge \Phi_v\| dudv$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che la direzione normale ad una superficie piana, cioè tutta contenuta in un piano, è data in ogni punto (x, y, z) dal vettore (costante!!) perpendicolare al piano. Quindi, essendo nel nostro caso la superficie contenuta nel piano $y + x = 0$, la direzione normale è data dal vettore perpendicolare a tale piano, cioè il vettore $(-1, -1, 0)$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_2} \langle rot\, F, n_{e,2} \rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 (2u, -3u, 0) \cdot (-1, -1, 0)\; du\, dv \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (-2u + 3u + 0 \cdot 0)\; du\, dv = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Sostituendo i cinque valori trovati nella (1.35) si ha

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = \frac{5}{4}\pi + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 0 + 0 = \frac{5}{4}\pi$$

e pertanto la formula (1.33) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.32 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ y \geq x\right\},$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x, y, z)\,.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_{\Omega} div\, F dxdydz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.36}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è la metà sfera di centro l'origine e raggio tre nel semispazio $y \geq x$ e $\partial\Omega$ è formato dalla superficie esterna di tale semisfera, definita quindi dalle relazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $y \geq x$ e dalla superficie ottenuta tra la sezione della sfera col piano $y = x$, definita quindi dalle relazioni $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, $y = x$.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.36). Essendo

$$div\, F = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 3,$$

l'integrale triplo nella (1.36) è pari a tre volte il volume della semisfera di raggio tre, quindi è pari a 54π. (Alternativamente, si può ottenere lo stesso risultato integrando la funzione costante 3 nella regione Ω utilizzando opportunamente le coordinate sferiche.)

Per calcolare il termine a destra nella (1.36), osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = \int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1} \rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma, \tag{1.37}$$

dove $n_{e,i}$ sono i versori normali uscenti alle superfici $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2$, superfici definite rispettivamente da:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ y \geq x;$$
$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\ y = x.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_1$ come segue:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) = 3\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta, \varphi) = 3\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\theta, \varphi) = 3\cos(\varphi). \end{cases} \qquad \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right],\ \varphi \in [0, \pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$, dove

$$\Phi_\theta(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\theta(\theta,\varphi) = -3\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ y_\theta(\theta,\varphi) = 3\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z_\theta(\theta,\varphi) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_\varphi(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\varphi(\theta,\varphi) = 3\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y_\varphi(\theta,\varphi) = 3\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z_\varphi(\theta,\varphi) = -3\sin(\varphi). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -3\sin(\theta)\sin(\varphi) & 3\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ 3\cos(\theta)\cos(\varphi) & 3\sin(\theta)\cos(\varphi) & -3\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= (-9\cos(\theta)\sin^2(\varphi), -9\sin(\theta)\sin^2(\varphi), -9\sin(\phi)\cos(\varphi)). \end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|}(9\cos(\theta)\sin^2(\varphi), 9\sin(\theta)\sin^2(\varphi), 9\sin(\varphi)\cos(\varphi)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\| d\theta d\varphi$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che il versore normale uscente da una superficie sferica è dato in ogni punto (x,y,z) proprio dal vettore (x,y,z), eventualmente da normalizzare. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1}\rangle d\sigma &= \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (3\cos(\theta)\sin(\varphi), 3\sin(\theta)\sin(\varphi), 3\cos(\varphi))\cdot \\ &\cdot (9\cos(\theta)\sin^2(\varphi), 9\sin(\theta)\sin^2(\varphi), 9\sin(\varphi)\cos(\varphi)) d\theta d\varphi \\ &= \int_0^\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (27\sin^3(\varphi) + 27\sin(\varphi)\cos^2(\varphi)) d\theta d\varphi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \int_0^{\pi} 27\sin(\varphi)d\varphi \\
&= 27\pi \left(-\cos(\varphi)\Big|_0^{\pi} \right) = 54\pi.
\end{aligned}
$$

La superficie $\mathcal{S}_2$ è data da $2x^2 + z^2 \leq 9$ e quindi può essere parametrizzata come segue:

$$
\Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos(\theta) \\ y(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\cos(\theta) \\ z(\rho, \theta) = \rho\sin(\theta). \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ \rho \in [0, 3]
$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta$, dove

$$
\Phi_\rho(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) \\ y_\rho(\rho, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) \\ z_\rho(\rho, \theta) = \sin(\theta) \end{cases}
$$

e

$$
\Phi_\theta(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin(\theta) \\ y_\theta(\rho, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin(\theta) \\ z_\theta(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta). \end{cases}
$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin(\theta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho, 0 \right).
\end{aligned}
$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$
\frac{1}{\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\rho, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rho, 0 \right).
$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| d\rho d\theta$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che la direzione normale ad una superficie piana, cioè tutta contenuta in un piano, è data in ogni punto (x, y, z) dal vettore (costante!!) perpendicolare al piano. Quindi, essendo nel nostro caso la superficie contenuta nel piano $y - x = 0$, la direzione normale è data dal vettore perpendicolare a tale piano, cioè il vettore $(1, -1, 0)$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \rho \cos(\theta), \frac{1}{\sqrt{2}} \rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta) \right) \cdot \\ \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \rho, -\frac{1}{\sqrt{2}} \rho, 0 \right) d\theta d\rho = 0.$$

Sostituendo i due valori trovati nella (1.37) si ha

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = 54\pi + 0 = 54\pi$$

e pertanto la formula (1.36) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.33 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1;\ \frac{1}{2} y - 1 \leq z \leq -\frac{1}{2} y + 1 \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (0, 0, x)\,.$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_\Omega div\, F dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.38}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è il cilindro definito da $x^2+y^2 \leq 1$ delimitato dai piani $z = \frac{1}{2}y-1$ e $z = -\frac{1}{2}y+1$ e $\partial\Omega$ è formato dalla superficie laterale del cilindro, definita da $x^2+y^2 = 1$, $\frac{1}{2}y-1 \leq z \leq -\frac{1}{2}y+1$ e dalle due superfici definite da $x^2+y^2 \leq 1$, $z = \frac{1}{2}y-1$ e $x^2+y^2 \leq 1$, $z = -\frac{1}{2}y+1$.

Essendo

$$div\, F = \partial_x 0 + \partial_y 0 + \partial_z x = 0,$$

l'integrale di volume nella (1.38) è nullo.

Per calcolare il termine a destra nella (1.38), osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = \int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1} \rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_3} \langle F, n_{e,3} \rangle d\sigma, \quad (1.39)$$

dove $n_{e,i}$ sono i versori normali uscenti alle superfici $\mathcal{S}_i$, $i = 1,2,3$, superfici definite rispettivamente da:

$$x^2+y^2 = 1,\ \frac{1}{2}y-1 \leq z \leq -\frac{1}{2}y+1;$$
$$x^2+y^2 \leq 1,\ z = \frac{1}{2}y-1;$$
$$x^2+y^2 \leq 1,\ z = -\frac{1}{2}y+1.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_1$ come segue:

$$\Phi(\theta,t) = \begin{cases} x(\theta,t) = \cos(\theta) \\ y(\theta,t) = \sin(\theta) \\ z(\theta,t) = t. \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi],\ t \in \left[\frac{1}{2}\sin(\theta)-1, -\frac{1}{2}\sin(\theta)+1\right]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_t$, dove

$$\Phi_\theta(\theta,t) = \begin{cases} x_\theta(\theta,t) = -\sin(\theta) \\ y_\theta(\theta,t) = \cos(\theta) \\ z_\theta(\theta,t) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_t(\theta,t) = \begin{cases} x_t(\theta,t) = 0 \\ y_t(\theta,t) = 0 \\ z_t(\theta,t) = 1. \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\Phi_\theta \wedge \Phi_t &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (\cos(\theta), \sin(\theta), 0).\end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|}(\cos(\theta), \sin(\theta), 0).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| d\theta dt$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1} \rangle d\sigma = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} (0,0,\cos(\theta)) \cdot (\cos(\theta), \sin(\theta), 0) d\theta dt = 0.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_2$ come segue:

$$\Phi(\rho,\theta) = \begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta) \\ z(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\rho\sin(\theta) - 1. \end{cases} \qquad \rho \in [0,1], \;\; \theta \in [0, 2\pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta$, dove

$$\Phi_\rho(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho,\theta) = \cos(\theta) \\ y_\rho(\rho,\theta) = \sin(\theta) \\ z_\rho(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta) \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho,\theta) = -\rho\sin(\theta) \\ y_\theta(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ z_\theta(\rho,\theta) = \frac{1}{2}\rho\cos(\theta). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_\rho \wedge \Phi_\theta &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & \frac{1}{2}\sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & \frac{1}{2}\rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}\rho, \rho\right). \end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|}\left(0, \frac{1}{2}\rho, -\rho\right).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| d\rho d\theta$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che la direzione normale ad una superficie piana, cioè tutta contenuta in un piano, è data in ogni punto (x, y, z) dal vettore (costante!!) perpendicolare al piano. Quindi, essendo nel nostro caso la superficie contenuta nel piano $\frac{1}{2}y - z - 1 = 0$, la direzione normale è data dal vettore perpendicolare a tale piano, cioè il vettore $\left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2}\rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0, 0, \rho\cos(\theta)) \cdot \left(0, \frac{1}{2}\rho, -\rho\right) d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\rho^2 \cos(\theta) d\theta d\rho = 0. \end{aligned}$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_3$ come segue:

$$\Phi(\rho,\theta) = \begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta) \\ z(\rho,\theta) = -\frac{1}{2}\rho\sin(\theta) + 1. \end{cases} \qquad \rho \in [0,1],\ \ \theta \in [0,2\pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta$, dove

$$\Phi_\rho(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho,\theta) = \cos(\theta) \\ y_\rho(\rho,\theta) = \sin(\theta) \\ z_\rho(\rho,\theta) = -\frac{1}{2}\sin(\theta) \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho,\theta) = -\rho\sin(\theta) \\ y_\theta(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ z_\theta(\rho,\theta) = -\frac{1}{2}\rho\cos(\theta). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_\rho \wedge \Phi_\theta &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) & -\frac{1}{2}\sin(\theta) \\ -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) & -\frac{1}{2}\rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \left(0, \frac{1}{2}\rho, \rho\right). \end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|}\left(0, \frac{1}{2}\rho, \rho\right).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| d\rho d\theta$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che la direzione normale ad una superficie piana, cioè tutta contenuta in un piano, è data in ogni punto (x,y,z) dal vettore (costante!!)

perpendicolare al piano. Quindi, essendo nel nostro caso la superficie contenuta nel piano $-\frac{1}{2}y - z + 1 = 0$, la direzione normale è data dal vettore perpendicolare a tale piano, cioè il vettore $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}_3} \langle F, n_{e,3} \rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (0, 0, \rho\cos(\theta)) \cdot \left(0, \frac{1}{2}\rho, \rho\right) d\theta d\rho \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos(\theta) d\theta d\rho = 0.\end{aligned}$$

Sostituendo i tre valori trovati nella (1.39) si ha

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = 0 + 0 + 0 = 0$$

e pertanto la formula (1.38) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.34 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (xy, \ yz, \ xz).$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_{\Omega} div\, F \ dx\, dy\, dz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.40}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è la sfera di centro l'origine e raggio uno e $\partial\Omega$ è la superficie esterna di tale sfera, definita quindi dalla relazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.40). La divergenza del campo in esame è data da

$$div\, F = \partial_x xy + \partial_y yz + \partial_z xz = y + z + x.$$

Per calcolare tale integrale, utilizziamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\varphi). \end{cases}$$

Lo jacobiano di tale cambio di coordinate è dato da:

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \left| det \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \end{pmatrix} \right| = \rho^2\sin(\varphi)$$

e la regione Ω nelle nuove coordinate è descritta dalle relazioni $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$. Pertanto, l'integrale triplo cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_\Omega div\, F dxdydz = & \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\rho\cos(\theta)\sin(\varphi) + \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ & + \rho\cos(\varphi))\rho^2\sin(\varphi) d\varphi d\theta d\rho \\ = & \pi \int_0^1 \int_0^\pi \rho^3 \sin(2\varphi) d\varphi d\rho = 0. \end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale di superficie a destra nella (1.40), parametrizziamo la superficie $\partial\Omega$ come segue:

$$\Phi(\theta,\varphi) = \begin{cases} x(\theta,\varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta,\varphi) = \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\theta,\varphi) = \cos(\varphi). \end{cases} \qquad \theta \in [0,2\pi],\ \varphi \in [0,\pi]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$, dove

$$\Phi_\theta(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\theta(\theta,\varphi) = -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ y_\theta(\theta,\varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z_\theta(\theta,\varphi) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_\varphi(\theta,\varphi) = \begin{cases} x_\varphi(\theta,\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y_\varphi(\theta,\varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z_\varphi(\theta,\varphi) = -\sin(\varphi). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= (-\cos(\theta)\sin^2(\varphi), -\sin(\theta)\sin^2(\varphi), -\sin(\phi)\cos(\varphi)).
\end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|}(\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\varphi)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\| d\theta d\varphi$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che il versore normale uscente da una superficie sferica è dato in ogni punto (x, y, z) proprio dal vettore (x, y, z), eventualmente da normalizzare. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \big(\cos(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi), \cos(\theta)\sin(\varphi)\cos(\varphi)\big) \cdot \\
&\quad \cdot \big(\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\varphi)\big)\, d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^\pi \sin^4(\varphi) d\varphi \left(-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\Big|_0^{2\pi} \right) d\varphi + 2\pi \left(\frac{1}{4}\sin^4(\varphi)\Big|_0^\pi \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

e pertanto la formula (1.40) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.35 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(z^3, z^2, z\right).$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_{\Omega} div\, F dxdydz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.41}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è la sfera di centro l'origine e raggio uno e $\partial\Omega$ è la superficie esterna di tale sfera, definita quindi dalla relazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.41). Essendo

$$div\, F = \partial_x z^3 + \partial_y z^2 + \partial_z z = 1,$$

l'integrale triplo nella (1.41) è pari al volume della sfera unitaria, cioè $\frac{4}{3}\pi$. (Alternativamente, si può ottenere lo stesso risultato integrando la funzione costante 2 nella regione Ω utilizzando le coordinate sferiche.)

Per calcolare l'integrale di superficie a destra nella (1.41), parametrizziamo la superficie $\partial\Omega$ come segue:

$$\Phi(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\theta, \varphi) = \sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ \varphi \in [0, \pi] \\ z(\theta, \varphi) = \cos(\varphi). \end{cases}$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi$, dove

$$\Phi_\theta(\theta, \varphi) = \begin{cases} x_\theta(\theta, \varphi) = -\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ y_\theta(\theta, \varphi) = \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z_\theta(\theta, \varphi) = 0 \end{cases}$$

e

$$\Phi_\varphi(\theta, \varphi) = \begin{cases} x_\varphi(\theta, \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y_\varphi(\theta, \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z_\varphi(\theta, \varphi) = -\sin(\varphi). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= (-\cos(\theta)\sin^2(\varphi), -\sin(\theta)\sin^2(\varphi), -\sin(\phi)\cos(\varphi)).\end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|}(\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\varphi)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_\varphi\| d\theta d\varphi$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che il versore normale uscente da una superficie sferica è dato in ogni punto (x, y, z) proprio dal vettore (x, y, z), eventualmente da normalizzare. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = &\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\cos^3(\varphi), \cos^2(\varphi), \cos(\varphi)) \cdot \\ &\cdot (\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\varphi)) d\theta\, d\varphi \\ = &\, 2\pi \int_0^\pi \sin(\varphi)\cos^2(\varphi) d\varphi \\ = &\, 2\pi \left(-\frac{1}{3}\cos^3(\varphi)\Big|_0^\pi \right) = \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

e pertanto la formula (1.41) del teorema di Gauss è verificata. ∎

Esercizio 1.36 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 \geq y^2 + z^2, \ 1 \leq x \leq 4\right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x + z, x, x + y).$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_\Omega div\, F dxdydz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.42}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è la porzione di cono $x^2 \geq y^2+z^2$ delimitata dai piani $x = 1$ e $x = 4$ e $\partial\Omega$ è formato dalla superficie laterale del cono, definita da $x^2 = y^2 + z^2$, $1 \leq x \leq 4$ e dalle due circonferenze definite da $y^2 + z^2 \leq 1$, sul piano $x = 1$ e $y^2 + z^2 \leq 4$ sul piano $x = 4$.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.42). La divergenza del campo in esame è data da

$$div\, F = \partial_x(x + z) + \partial_y x + \partial_z(x + y) = 1.$$

Per calcolare tale integrale, utilizziamo le coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x(\rho, \theta, t) = t \\ y(\rho, \theta, t) = \rho \cos(\theta) \\ z(\rho, \theta, t) = \rho \sin(\theta). \end{cases}$$

Lo jacobiano di tale cambio di coordinate è dato da:

$$J(\rho, \theta, t) = \left| det \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = \rho$$

e la regione Ω nelle nuove coordinate è descritta dalle relazioni $\rho \in [0, t]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $t \in [1, 4]$. Pertanto, l'integrale triplo cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_\Omega div\, F dxdydz &= \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_1^4 \rho dt d\theta d\rho \\ &= \pi \int_1^4 t^2 dt = 21\pi. \end{aligned}$$

Per calcolare il termine a destra nella (1.42), osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = \int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1} \rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_3} \langle F, n_{e,3} \rangle d\sigma, \quad (1.43)$$

dove $n_{e,i}$ sono i versori normali uscenti alle superfici $\mathcal{S}_i$, $i = 1, 2, 3$, superfici definite rispettivamente da:

$$y^2 + z^2 = x^2, \; 1 \leq x \leq 4;$$
$$y^2 + z^2 = 1, \; x = 1;$$
$$y^2 + z^2 = 4, \; x = 4.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_1$ come segue:

$$\Phi(\theta, t) = \begin{cases} x(\theta, t) = t \\ y(\theta, t) = t\cos(\theta) \\ z(\theta, t) = t\sin(\theta). \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi], \; t \in [1, 4]$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta \wedge \Phi_t$, dove

$$\Phi_\theta(\theta, t) = \begin{cases} x_\theta(\theta, t) = 0 \\ y_\theta(\theta, t) = -t\sin(\theta) \\ z_\theta(\theta, t) = t\cos(\theta) \end{cases}$$

e

$$\Phi_t(\theta, t) = \begin{cases} x_t(\theta, t) = 1 \\ y_t(\theta, t) = \cos(\theta) \\ z_t(\theta, t) = \sin(\theta). \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \Phi_\theta \wedge \Phi_t &= det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & -t\sin(\theta) & t\cos(\theta) \\ 1 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \\ &= (-t, t\cos(\theta), t\sin(\theta)). \end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|}(-t, t\cos(\theta), t\sin(\theta)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\|$, poiché $d\sigma = \|\Phi_\theta \wedge \Phi_t\| d\theta dt$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1}\rangle d\sigma &= \int_1^4 \int_0^{2\pi} (t + t\sin(\theta), t, t + t\cos(\theta)) \cdot (-t, t\cos(\theta), t\sin(\theta)) d\theta dt \\
&= \int_1^4 \int_0^{2\pi} (-t(t + t\sin(\theta)) + t^2\cos(\theta) + t(t + t\cos(\theta))\sin(\theta)) d\theta dt \\
&= -42\pi.
\end{aligned}$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_2$ come segue:

$$\Phi(\rho, \theta) = \begin{cases} x(\rho, \theta) = 1 \\ y(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta) \qquad \rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, 2\pi] \\ z(\rho, \theta) = \rho\sin(\theta). \end{cases}$$

Il versore normale uscente da tale superficie è $(-1, 0, 0)$. Calcoliamo ora il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$ necessario per determinare l'elemento d'area $d\sigma$. Si ha:

$$\Phi_\rho(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho, \theta) = 0 \\ y_\rho(\rho, \theta) = \cos(\theta) \\ z_\rho(\rho, \theta) = \sin(\theta) \end{cases}$$

e

$$\Phi_\theta(\rho, \theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho, \theta) = 0 \\ y_\theta(\rho, \theta) = -\rho\sin(\theta) \\ z_\theta(\rho, \theta) = \rho\cos(\theta). \end{cases}$$

Pertanto

$$
\begin{aligned}
\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta &= det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix} \\
&= (\rho, 0, 0)
\end{aligned}
$$

e pertanto $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| = \rho$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2}\rangle d\sigma &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+\rho\sin(\theta), 1, 1+\rho\cos(\theta)) \cdot (-1,0,0)\rho d\theta d\rho \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-\rho - \rho^2\sin(\theta)) d\theta d\rho = -\pi.
\end{aligned}
$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_3$ come segue:

$$
\Phi(\rho,\theta) = \begin{cases} x(\rho,\theta) = 4 \\ y(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ z(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta). \end{cases} \qquad \rho \in [0,4],\ \theta \in [0,2\pi]
$$

Il versore normale uscente da tale superficie è $(1,0,0)$. Calcoliamo ora il modulo $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\|$ necessario per determinare l'elemento d'area $d\sigma$. Si ha:

$$
\Phi_\rho(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\rho(\rho,\theta) = 0 \\ y_\rho(\rho,\theta) = \cos(\theta) \\ z_\rho(\rho,\theta) = \sin(\theta) \end{cases}
$$

e

$$
\Phi_\theta(\rho,\theta) = \begin{cases} x_\theta(\rho,\theta) = 0 \\ y_\theta(\rho,\theta) = -\rho\sin(\theta) \\ z_\theta(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta). \end{cases}
$$

Pertanto

$$
\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta = det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\rho\sin(\theta) & \rho\cos(\theta) \end{pmatrix}
$$

$$= (\rho, 0, 0)$$

e pertanto $\|\Phi_\rho \wedge \Phi_\theta\| = \rho$. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2} \rangle d\sigma &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} (4 + \rho \sin(\theta), 4, 4 + \rho \cos(\theta)) \cdot (1, 0, 0) \rho d\theta d\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4\rho + 4\rho^2 \sin(\theta)) d\theta d\rho = 64\pi.
\end{aligned}$$

Sostituendo i tre valori trovati nella (1.43) si ha

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma = -42\pi - \pi + 64\pi = 21\pi$$

e pertanto la formula (1.42) del teorema di Gauss è verificata. ∎

Esercizio 1.37 *Verificare il teorema di Gauss per la regione*

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \ z \geq 0 \right\}$$

e il campo vettoriale

$$F(x, y, z) = \left(0, x^2, z^2\right).$$

Risoluzione. Ricordiamo la formula del teorema di Gauss

$$\int_\Omega div\, F dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \langle F, n_e \rangle d\sigma, \tag{1.44}$$

dove F è un campo vettoriale, Ω è una regione di $\mathbb{R}^3$, $\partial\Omega$ è il suo bordo, cioè una superficie di $\mathbb{R}^3$, e n_e è il versore normale *uscente* di $\partial\Omega$. Nel caso in esame, Ω è la semisfera delle z non negative di centro l'origine e raggio uno e $\partial\Omega$ è formato dalla superficie esterna di tale semisfera, definita quindi dalle relazioni $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ e dalla circonferenza $x^2 + y^2 \leq 1$ sul piano $z = 0$.

Calcoliamo dapprima l'integrale a sinistra nella (1.44). La divergenza del campo in esame è data da

$$div\, F = \partial_x 0 + \partial_y x^2 + \partial_z z^2 = 2z.$$

Per calcolare tale integrale, utilizziamo le coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y(\rho,\theta,\varphi) = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\rho,\theta,\varphi) = \rho\cos(\varphi). \end{cases}$$

Lo jacobiano di tale cambio di coordinate è dato da:

$$J(\rho,\theta,\varphi) = \left| det \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\varphi) & \sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho\sin(\theta)\sin(\varphi) & \rho\cos(\theta)\sin(\varphi) & 0 \\ \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & \rho\sin(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) \end{pmatrix} \right| = \rho^2\sin(\varphi)$$

e la regione Ω nelle nuove coordinate è descritta dalle relazioni $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Pertanto, l'integrale triplo cercato è dato da

$$\begin{aligned} \int_\Omega div\, F dxdydz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\rho\cos(\varphi)\rho^2\sin(\varphi)d\varphi d\theta d\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi)d\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Per calcolare il termine a destra nella (1.44), osserviamo che

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e\rangle d\sigma = \int_{\mathcal{S}_1} \langle F, n_{e,1}\rangle d\sigma + \int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2}\rangle d\sigma, \tag{1.45}$$

dove $n_{e,i}$ sono i versori normali uscenti alle superfici $\mathcal{S}_i$, $i = 1,2$, superfici definite rispettivamente da:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0;$$

$$x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0.$$

Parametrizziamo la superficie $\mathcal{S}_1$ come segue:

$$\Phi(\theta,\varphi)=\begin{cases} x(\theta,\varphi)=\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ y(\theta,\varphi)=\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z(\theta,\varphi)=\cos(\varphi).\end{cases} \qquad \theta\in[0,2\pi]\,,\ \varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

La direzione normale a tale superficie è quella del vettore $\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi$, dove

$$\Phi_\theta(\theta,\varphi)=\begin{cases} x_\theta(\theta,\varphi)=-\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ y_\theta(\theta,\varphi)=\cos(\theta)\sin(\varphi)\\ z_\theta(\theta,\varphi)=0\end{cases}$$

e

$$\Phi_\varphi(\theta,\varphi)=\begin{cases} x_\varphi(\theta,\varphi)=\cos(\theta)\cos(\varphi)\\ y_\varphi(\theta,\varphi)=\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ z_\varphi(\theta,\varphi)=-\sin(\varphi).\end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi&=det\begin{pmatrix} i & j & k\\ -\sin(\theta)\sin(\varphi) & \cos(\theta)\sin(\varphi) & 0\\ \cos(\theta)\cos(\varphi) & \sin(\theta)\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\end{pmatrix}\\ &=(-\cos(\theta)\sin^2(\varphi),-\sin(\theta)\sin^2(\varphi),-\sin(\phi)\cos(\varphi)).\end{aligned}$$

Poiché la normale alla superficie deve essere orientata verso l'esterno, il versore normale cercato è dato da

$$\frac{1}{\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|}(\cos(\theta)\sin^2(\varphi),\sin(\theta)\sin^2(\varphi),\sin(\varphi)\cos(\varphi)).$$

(Si osservi che non è necessario calcolare esplicitamente il modulo $\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|$, poiché $d\sigma=\|\Phi_\theta\wedge\Phi_\varphi\|d\theta d\varphi$ e pertanto tale modulo verrà semplificato nel calcolare l'integrale cercato). A tale risultato si poteva arrivare immediatamente osservando che il versore normale uscente da una superficie sferica è dato in ogni punto (x,y,z) proprio dal vettore (x,y,z), eventualmente da normalizzare. Quindi, l'integrale di superficie cercato è dato da

$$\int_{\mathcal{S}_1}\langle F,n_{e,1}\rangle d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}(0,\cos^2(\theta)\sin^2(\varphi),\cos^2(\varphi))\cdot$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot (\cos(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\theta)\sin^2(\varphi), \sin(\varphi)\cos(\varphi))\ d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (0 \cdot \cos(\theta)\sin^2(\varphi) + \sin(\theta)\cos^2(\theta)\sin^4(\varphi) \\
&+ \sin(\varphi)\cos^3(\varphi))\ d\theta\, d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(\varphi) d\varphi \left(-\frac{1}{3}\cos^3(\theta)\Big|_0^{2\pi} \right) + 2\pi \left(-\frac{1}{4}\cos^4(\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

La superficie $\mathcal{S}_2$ è definita parametricamente dalle relazioni:

$$
\Phi(\rho,\theta) = \begin{cases} x(\rho,\theta) = \rho\cos(\theta) \\ y(\rho,\theta) = \rho\sin(\theta) \qquad \rho \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi] \\ z(\rho,\theta) = 0 \end{cases}
$$

e il suo versore normale uscente $n_{e,2}$ è dato da $(0,0,-1)$. Poiché $\langle F, n_{e,2}\rangle = z^2$ e $z=0$ su $\mathcal{S}_2$, si ha

$$
\int_{\mathcal{S}_2} \langle F, n_{e,2}\rangle d\sigma = 0.
$$

Sostituendo i due valori trovati nella (1.45) si ha

$$
\int_{\partial\Omega} \langle F, n_e\rangle d\sigma = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}
$$

e pertanto la formula (1.44) del teorema di Gauss è verificata. ■

Esercizio 1.38 *Verificare il teorema della divergenza in* $\mathbb{R}^3$ *per il campo vettoriale*

$$
F = (xy, -yz, 0)
$$

e la regione

$$
\mathcal{G} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - y \le 0,\ x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}.
$$

Risoluzione. Si tratta di verificare che

$$\iiint\limits_{\mathcal{G}} \text{div } F d\mathcal{G} = \iint\limits_{\partial\mathcal{G}} F \cdot n \; d\sigma, \tag{1.46}$$

dove n è il versore normale esterno al bordo $\partial\mathcal{G}$. Si ha div $F = y - x \geq 0$. La regione $\mathcal{G}$ è metà sfera che si può parametrizzare in coordinate polari come

$$\mathcal{G} : \begin{cases} x = \rho\cos\phi\sin\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases} \qquad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{5}{4}\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Risulta

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\mathcal{G}} \text{div } F d\mathcal{G} &= \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \int_0^{2\pi} \rho\sin\theta(\sin\phi - \cos\phi)\rho^2 \sin\theta \; d\phi \; d\theta \; d\rho \\
&= \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin\phi - \cos\phi) d\phi = \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}(\sin\phi + \cos\phi)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}} = \frac{\pi}{8}(\sqrt{2} + \sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Per calcolare l'integrale a sinistra della (1.46) si osservi che possiamo scrivere $\partial G = \partial G_1 \cup \partial G_2 \cup \partial G_3$, dove

$$\begin{aligned}
\partial G_1 =& \{0 \leq \rho \leq 1, \; \phi = \frac{\pi}{4}, \; 0 \leq \theta \leq \pi\} \\
\partial G_2 =& \{0 \leq \rho \leq 1, \; \phi = \frac{5}{4}\pi, \; 0 \leq \theta \leq \pi\} \\
\partial G_3 =& \{\rho = 1, \; \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{5}{4}\pi, \; 0 \leq \theta \leq \pi\}
\end{aligned}$$

e i versori normali relativi sono

$$n_1 = n_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$n_3 = (x, y, z), \quad \text{con } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Risulta

$$\begin{aligned} F \cdot n_1 =& F \cdot n_2 = \sqrt{2}xy = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho^2 \sin^2\theta, \\ F \cdot n_3 =& x^2y - xy^2 = xy(x-y). \end{aligned}$$

Per ∂G_1 si ha la parametrizzazione

$$\phi = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta, \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta, \rho\cos\theta\right),$$

per cui

$$\begin{aligned} \phi_\rho \wedge \phi_\theta =& \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta & \cos\theta \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta & \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta & -\rho\sin\theta \end{pmatrix} \\ =& (-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho, \frac{\sqrt{2}}{2}\rho, 0) = \rho(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \end{aligned}$$

e di conseguenza $|\phi_\rho \wedge \phi_\theta| = \rho$ per cui

$$\begin{aligned} \iint_{\partial G_1} F \cdot n_1 d\sigma =& \int_0^1 \int_0^\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\rho^2 \sin^2\theta\right) \rho d\theta \; d\rho \\ =& \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin^2\theta d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

e analogamente

$$\iint_{\partial G_2} F \cdot n_1 d\sigma = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Per ∂G_3 si ha la parametrizzazione

$$\psi = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta),$$

per cui

$$
\begin{aligned}
\psi_\theta \wedge \psi_\phi = & \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & 0 \end{pmatrix} \\
= & (\sin^2\theta\cos\phi, -\sin^2\theta\sin\phi, \sin\theta\cos\theta)
\end{aligned}
$$

e di conseguenza $|\psi_\theta \wedge \psi_\phi| = |\sin\theta|$ per cui

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{\partial G_3} F \cdot n_3 d\sigma = & \int\limits_0^\pi \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \big(\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi\big)\sin\theta(\cos\phi - \sin\phi)|\sin\theta| d\phi\ d\theta \\
= & \int\limits_0^\pi \sin^4\theta d\theta \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sin\phi\cos\phi(\cos\phi - \sin\phi) d\phi \\
= & -\frac{1}{3}(\cos^3\phi + \sin^3\phi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \int\limits_0^\pi \left(\sin^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2(2\theta)\right) d\theta \\
= & \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\int\limits_0^{2\pi} \sin^2\alpha d\alpha\right)\frac{\sqrt{2}}{3} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}
$$

Abbiamo allora trovato che

$$
\iint\limits_{\partial G} F \cdot n d\sigma = 2\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}
$$

e la formula di Gauss (1.46) è verificata. ∎

Esercizio 1.39 *Verificare il teorema della divergenza in* $\mathbb{R}^3$ *per il campo vettoriale* $F = (x, y, 0)$ *e la regione*

$$
\mathcal{G} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z^2 = x^2 + y^2 \ 0 \leq z \leq 1\right\}.
$$

Risoluzione. Si tratta di verificare che

$$
\iiint\limits_{\mathcal{G}} \operatorname{div} F d\mathcal{G} = \iint\limits_{\partial\mathcal{G}} F \cdot n\ d\sigma, \tag{1.47}
$$

dove n è il versore normale esterno al bordo $\partial\mathcal{G}$. Si ha div $F = 1+1 = 2 > 0$. La regione $\mathcal{G}$ è un cono il cui volume è $\pi/3$. Per il termine a sinistra si ha allora

$$\iiint_{\mathcal{G}} \text{div } F d\mathcal{G} = \frac{2}{3}\pi.$$

La frontiera di $\mathcal{G}$ può essere suddivisa nella superficie di base $\partial\mathcal{G}_1$ e nella superficie laterale $\partial\mathcal{G}_2$. D'altra parte, parametrizzata la superficie laterale di $\partial\mathcal{G}_2$ come

$$\partial\mathcal{G}_2 : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ z = \rho, \end{cases}$$

si ottiene

$$\begin{cases} \partial_\rho x = \cos\theta \\ \partial_\rho y = \sin\theta \\ \partial_\rho z = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial_\theta x = -\rho\sin\theta \\ \partial_\theta y = \rho\cos\theta \\ \partial_\theta z = 0, \end{cases}$$

per cui

$$\begin{aligned} (\partial_\theta x, \partial_\theta y, \partial_\theta z) \wedge (\partial_\rho x, \partial_\rho y, \partial_\rho z) =& \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{pmatrix} \\ =&(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, -\rho) \end{aligned}$$

e risulta

$$\iint_{\partial\mathcal{G}_2} F \cdot n \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta\right) d\rho \; d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 d\rho \; d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Il teorema della divergenza (formula (1.47)) è perciò dimostrato notando che F è ortogonale (e quindi non dà contributo) alla superficie di base $\partial\mathcal{G}_1$. ∎

2 Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

2.1 Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico

Esercizio 2.1 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 1 \\ u\,(x, 0) = 0 & 0 < x < \pi \\ u\,(x, 1) = 3 \sin(3x) & 0 < x < \pi \\ u\,(0, y) = u\,(\pi, y) = 0 & 0 < y < 1. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{2.1}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi''(x)\psi(y) = -\varphi(x)\psi''(y)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' - \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.1) nelle condizioni al bordo

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0,$$

otteniamo:

$$\varphi(0)\psi(y) = \varphi(\pi)\psi(y) = 0 \ \text{ per ogni } y \in (0, 1),$$

da cui $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Abbiamo perciò trovato, per $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \sin(nx).$$

Passiamo ora all'equazione differenziale

$$\psi'' + n^2\psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(y) = \tilde{\alpha}_n e^{ny} + \tilde{\beta}_n e^{-ny},$$

per $n > 0$, per cui mettendo insieme (cambiando nome ai coefficienti)

$$u_n(x, y) = \left(\alpha_n e^{ny} + \beta_n e^{-ny}\right) \sin(nx) \quad \text{per } n > 0.$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n e^{ny} + \beta_n e^{-ny}\right) \sin(nx).$$

La funzione u è quindi *dispari* rispetto alla x. I dati al bordo $u(x,0)=0$ e $u(x,1)=3\sin(3x)$ sono già dispari di periodo 2π. Imponendo perciò tali condizioni

$$\begin{cases} 0 = u(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)\sin(nx), \\ 3\sin(3x) = u(x,1) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n e^n+\beta_n e^{-n})\sin(nx), \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha_n+\beta_n = 0 & \text{per ogni } n \\ e^n\alpha_n + e^{-n}\beta_n = 0 & \text{per ogni } n\neq 3 \\ e^3\alpha_3 + e^{-3}\beta_3 = 3. \end{cases}$$

Risulta quindi $\alpha_n=\beta_n=0$ per $n\neq 3$ e

$$\begin{cases} \beta_3 = -\alpha_3 \\ e^3\alpha_3 + e^{-3}\beta_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_3 = \frac{3}{e^3-e^{-3}} \\ \beta_3 = -\alpha_3. \end{cases}$$

Abbiamo allora trovato

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \left(\frac{3}{e^3-e^{-3}}e^{3y} - \frac{3}{e^3-e^{-3}}e^{-3y}\right)\sin(3x) \\ &= 3\frac{e^{3y}-e^{-3y}}{e^3-e^{-3}}\sin(3x) = 3\frac{\sinh(3y)}{\sinh 3}\sin(3x) \end{aligned}$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u=u(x,y)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.2 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \textit{per } \rho < 1 \\ u = 3\sin(5\vartheta) & \textit{per } \rho = 1, \end{cases}$$

dove $u=u(\rho,\vartheta)$, $\triangle u = u_{\rho\rho} + \dfrac{1}{\rho}u_\rho + \dfrac{1}{\rho^2}u_{\vartheta\vartheta}$.

Risoluzione. Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace nel cerchio unitario. Il problema è ben posto. Come richiesto dal testo dell'esercizio, lo risolviamo mediante l'uso della separazione delle variabili. Il problema è già scritto rispetto alle coordinate polari e la funzione $\varphi(\vartheta) = 3\sin(5\vartheta)$ è 2π-periodica.

Cerchiamo una soluzione dell'equazione alle derivate parziali della forma:

$$u(\rho, \vartheta) = \varphi(\rho)\psi(\vartheta), \tag{2.2}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi''(\rho)\psi(\vartheta) + \frac{1}{\rho}\varphi'(\rho)\psi(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2}\varphi(\rho)\psi''(\vartheta) = 0$$

e moltiplicata per $\frac{\rho^2}{\varphi(\rho)\psi(\vartheta)}$

$$\rho^2\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi(\rho)} + \rho\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} + \frac{\psi''(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} = 0$$

da cui esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\rho^2\frac{\varphi''(\rho)}{\varphi(\rho)} + \rho\frac{\varphi'(\rho)}{\varphi(\rho)} = -\frac{\psi''(\vartheta)}{\psi(\vartheta)} = \lambda.$$

Abbiamo quindi ottenuto le equazioni

$$\rho^2\varphi'' + \rho\varphi' - \lambda\varphi = 0 \qquad \text{rispetto alla variabile } \rho \tag{2.3}$$

$$\psi'' + \lambda\psi = 0 \qquad \text{rispetto alla variabile } \vartheta. \tag{2.4}$$

Tenuto conto della periodicità e della regolarità del dato al bordo si ha $\psi(-\pi) = \psi(\pi)$, $\psi'(-\pi) = \psi'(\pi)$.

Associando tali dati ai limiti con l'equazione (2.4), si tratta perciò di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi = 0 & \\ & -\pi < \vartheta < \pi \\ \psi(-\pi) = \psi(\pi) & \\ \psi'(-\pi) = \psi'(\pi). & \end{cases}$$

Tale problema ammette autosoluzioni se e solo se $\lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ date da

$$\psi(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\vartheta) + \beta_n \sin(n\vartheta).$$

Per i valori di λ trovati l'equazione (2.3) diviene

$$\rho^2\varphi'' + \rho\varphi' - n^2\varphi = 0. \tag{2.5}$$

Tale equazione differenziale è di tipo Eulero del second'ordine. Ne cerchiamo una soluzione del tipo $\varphi(\rho) = \rho^\gamma$, da cui sostituendo nell'equazione si ottiene

$$\gamma(\gamma - 1) + \gamma - n^2 = 0$$

che ha per soluzioni $\gamma = \mp n$ per $n \neq 0$, mentre nel caso $n = 0$ $\gamma = 0$ come radice doppia. L'integrale generale della (2.5) è dato da

$$\varphi(\rho) = \begin{cases} \alpha_1\rho^n + \beta_1\rho^{-n} & \text{per} \quad n \neq 0 \\ \alpha_1 + \beta_1 \log\rho & \text{per} \quad n = 0. \end{cases}$$

Poiché cerchiamo soluzioni definite e limitate per $\rho \in [0, 1]$, deve essere $\beta_k = 0,\ k = 0,\ 1$.

Mettendo assieme quanto trovato abbiamo perciò la soluzione a variabili separabili

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\rho^n \cos(n\vartheta) + b_n\rho^n \sin(n\vartheta)\right).$$

Rimane da imporre la condizione al bordo:

$$3\sin(5\vartheta) = u(1, \vartheta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta)\right),$$

da cui $b_5 = 3$ mentre $a_n = 0$ per ogni n e $b_n = 0$ per ogni $n \neq 5$. Abbiamo quindi ottenuto la soluzione del problema:

$$u(\rho, \vartheta) = 3\rho^5 \sin(5\vartheta).$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(\rho, \vartheta)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.3 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi \\ u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0 & -\pi < y < \pi \\ u(x, -\pi) = u(x, \pi) = 0 & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace con dato al bordo nullo. Il problema è ben posto e, di conseguenza, la soluzione sarà identicamente nulla. D'altra parte il testo richiede l'utilizzo del metodo di separazione di variabili, per cui cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{2.6}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi''(x)\psi(y) = -\varphi(x)\psi''(y)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' - \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.6) nelle condizioni al bordo $u(x, -\pi) = u(x, \pi) = 0$, otteniamo:

$$\varphi(x)\psi(-\pi) = \varphi(x)\psi(\pi) = 0 \ \text{ per ogni } x \in (-\pi, \pi),$$

da cui $\psi(-\pi) = \psi(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \psi'' + \lambda\psi = 0 \\ & 0 < x < \pi \\ \psi(-\pi) = \psi(\pi) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\psi(y) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda} y) + \beta \sin(\sqrt{\lambda} y)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \alpha \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \\ \alpha \cos(\sqrt{\lambda}\pi) - \beta \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \cos(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \\ \beta \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \end{cases}$$

per cui sono soluzioni

1) $\alpha = 0$ e $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ che implica $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$, da cui otteniamo la soluzione $\psi_n(y) = \beta_n \sin(ny)$;

2) $\beta = 0$ e $\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi$ che implica $\lambda_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, da cui otteniamo la soluzione $\psi_n(y) = \alpha_n \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right) y\right)$.

In corrispondenza a tali autovalori λ_n si ha

1) nel caso $\lambda_n = n^2$, l'equazione $\varphi'' - n^2\varphi = 0$ ammette l'integrale generale $\varphi_n(x) = \gamma_n e^{nx} + \delta_n e^{-nx}$;

2) nel caso $\lambda_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)^2$, l'equazione $\varphi'' - \left(\frac{1}{2} + n\right)^2 \varphi = 0$ ammette l'integrale generale $\varphi_n(x) = \varepsilon_n e^{(n+\frac{1}{2})x} + \eta_n e^{-(n+\frac{1}{2})x}$.

Tenendo conto che la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti, mettendo insieme si ha

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n e^{nx} + b_n e^{-nx}\right) \sin\left(2n\frac{y}{2}\right) +$$

$$\left(c_n e^{(n+\frac{1}{2})x} + d_n e^{-(n+\frac{1}{2})x}\right) \cos\left((2n+1)\frac{y}{2}\right).$$

Resta solo da imporre i dati al bordo $u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0$:

$$\begin{cases} a_n e^{n\pi} + b_n e^{-n\pi} = 0 & n \in \mathbb{N}^* \\ a_n e^{-n\pi} + b_n e^{n\pi} = 0 & n \in \mathbb{N}^* \\ c_n e^{(n+\frac{1}{2})\pi} + d_n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} = 0 & n \in \mathbb{N} \\ c_n e^{-(n+\frac{1}{2})\pi} + d_n e^{(n+\frac{1}{2})\pi} = 0 & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

da cui $a_n = b_n = c_n = d_n = 0$ per cui l'unica soluzione del problema è quella nulla, come concluso sin dall'inizio per altra via. ■

Esercizio 2.4 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} 4u_{xx} + 9u_{yy} = 0 & -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi \\ u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0 & -\pi < y < \pi \\ u(x, -\pi) = u(x, \pi) = \sin x & -\pi < x < \pi. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace. Il problema è ben posto. Come richiesto dal testo, l'unica soluzione la cerchiamo mediante il metodo di separazione di variabili, per cui cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \tag{2.7}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$4\varphi''(x)\psi(y) = -9\varphi(x)\psi''(y)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$4\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -9\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = 36\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni differenziali $\varphi'' + 9\lambda\varphi = 0$, $\psi'' - 4\lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.7) nelle condizioni al bordo omogenee

$$u(-\pi, y) = u(\pi, y) = 0,$$

otteniamo:

$$\varphi(-\pi)\psi(y) = \varphi(\pi)\psi(y) = 0 \quad \text{per ogni } y \in (-\pi, \pi),$$

da cui $\varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + 9\lambda\varphi = 0 & \\ & -\pi < x < \pi \\ \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) = 0. & \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$\varphi(x) = \alpha \cos(3\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(3\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \alpha \cos(3\sqrt{\lambda}\pi) - \beta \sin(3\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \\ \alpha \cos(3\sqrt{\lambda}\pi) + \beta \sin(3\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha \cos(3\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \\ \beta \sin(3\sqrt{\lambda}\pi) = 0, \end{cases}$$

per cui sono soluzioni

1) $\alpha = 0$ e $3\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$ che implica $\lambda_n = \frac{n^2}{9}$, $n \in \mathbb{N}^*$ da cui otteniamo la soluzione $\varphi_n(x) = \beta_n \sin(nx)$;

2) $\beta = 0$ e $3\sqrt{\lambda}\pi = \frac{\pi}{2} + n\pi$ che implica $\lambda_n = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2} + n\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ da cui otteniamo la soluzione $\varphi_n(x) = \alpha_n \cos\left(\left(\frac{1}{2} + n\right)x\right)$.

In corrispondenza a tali autovalori λ_n si ha

1) nel caso $\lambda_n = \frac{n^2}{9}$, l'equazione $\psi'' - \frac{4}{9}n^2\psi = 0$ ammette l'integrale generale $\psi_n(y) = \gamma_n e^{\frac{2}{3}ny} + \delta_n e^{-\frac{2}{3}ny}$;

2) nel caso $\lambda_n = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}+n\right)^2$, l'equazione $\psi'' - \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}+n\right)^2\psi = 0$ ammette l'integrale generale

$$\psi_n(y) = \varepsilon_n e^{\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})y} + \eta_n e^{-\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})y}.$$

Tenendo conto che la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti, mettendo insieme si ha

$$\begin{aligned} u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} &\left(a_n e^{\frac{2}{3}ny} + b_n e^{-\frac{2}{3}ny}\right)\sin\left(2n\frac{x}{2}\right) + \\ &\left(c_n e^{\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})y} + d_n e^{-\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})y}\right)\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

Resta solo da imporre i dati al bordo $u(x,-\pi) = u(x,\pi) = \sin x$:

$$\begin{cases} \sin x = u(x,-\pi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{-\frac{2}{3}n\pi} + b_n e^{\frac{2}{3}n\pi}\right)\sin(2n\frac{x}{2}) + \\ \left(c_n e^{-\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})\pi} + d_n e^{\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})\pi}\right)\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) \\ \\ \sin x = u(x,\pi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n e^{\frac{2}{3}n\pi} + b_n e^{-\frac{2}{3}n\pi}\right)\sin(2n\frac{x}{2}) + \\ \left(c_n e^{\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})\pi} + d_n e^{-\frac{2}{3}(n+\frac{1}{2})\pi}\right)\cos\left((2n+1)\frac{x}{2}\right) \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} a_1 e^{-\frac{2}{3}\pi} + b_1 e^{\frac{2}{3}\pi} = 1 \\ a_1 e^{\frac{2}{3}\pi} + b_1 e^{-\frac{2}{3}\pi} = 1 \\ a_n = b_n = 0 & \text{per ogni } n \neq 1 \\ c_n = d_n = 0 & \text{per ogni } n \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} a_1 = b_1 = \frac{1}{e^{-\frac{2}{3}\pi} + e^{\frac{2}{3}\pi}} \\ a_n = b_n = 0 & \text{per ogni } n \neq 1 \\ c_n = d_n = 0 & \text{per ogni } n. \end{cases}$$

L'unica soluzione del problema è quindi

$$u(x,y) = \frac{1}{e^{-\frac{2}{3}\pi} + e^{\frac{2}{3}\pi}} \left(e^{\frac{2}{3}y} + e^{-\frac{2}{3}y} \right) \sin x.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.5 *Sia dato il problema di Dirichlet sul cerchio unitario:*

$$\begin{cases} \triangle u = \cos\vartheta & \rho < 1 \\ \\ u = 0 & \rho = 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

dove (ρ, ϑ) *sono le coordinate polari del piano.*

Facendo uso del metodo di separazione delle variabili, trovare la soluzione del problema.

Risoluzione. Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson. Il problema è ben posto.

Ricordiamo che per l'equazione omogenea associata

$$\triangle w = 0, \quad \rho < 1,$$

l'integrale generale è dato da

$$w(\rho, \vartheta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n \cos(n\vartheta) + b_n \sin(n\vartheta) \right).$$

Cerchiamo allora soluzioni di $\triangle u = \cos\vartheta$ della forma

$$u(\rho, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(\rho) \cos(n\vartheta) + b_n(\rho) \sin(n\vartheta) \right). \tag{2.9}$$

Ricordiamo inoltre che il laplaciano in coordinate polari è dato dall'espressione

$$\triangle u = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u_\rho + \frac{1}{\rho^2} u_{\vartheta\vartheta}.$$

Sostituendo la (2.9) in (2.8) si ha:

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \Big(a_n''(\rho)\cos(n\vartheta) + b_n''(\rho)\sin(n\vartheta) + \frac{1}{\rho}a_n'(\rho)\cos(n\vartheta) + \\ \frac{1}{\rho}b_n'(\rho)\sin(n\vartheta) - \frac{n^2}{\rho^2}a_n(\rho)\cos(n\vartheta) - \frac{n^2}{\rho^2}b_n(\rho)\sin(n\vartheta)\Big) = \cos\vartheta \\ \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n(1)\cos(n\vartheta) + b_n(1)\sin(n\vartheta)) = 0. \end{cases}$$

Tenuto conto che gli elementi dell'insieme

$$\{\cos(n\vartheta),\ \sin(n\vartheta)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sono tutti linearmente indipendenti, si ottiene

$$\begin{cases} a_1'' + \frac{1}{\rho}a_1' - \frac{1}{\rho^2}a_1 = 1 & \\ a_n'' + \frac{1}{\rho}a_n' - \frac{n^2}{\rho^2}a_n = 0 & \text{per ogni } n \neq 1, \\ b_n'' + \frac{1}{\rho}b_n' - \frac{n^2}{\rho^2}b_n = 0 & \text{per ogni } n \in \mathbb{N}, \\ a_n(1) = b_n(1) = 0 & \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si tratta allora di studiare i problemi

$$\begin{cases} \rho^2 z'' + \rho z' - n^2 z = 0 \\ z(1) = 0 \ \text{ e } z \text{ limitata su } [0,1], \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \rho^2 z'' + \rho z' - z = \rho^2 \\ z(1) = 0 \ \text{ e } z \text{ limitata su } [0,1]. \end{cases} \tag{2.11}$$

Risolviamo intanto il problema (2.10). L'equazione differenziale del problema è lineare del second'ordine omogenea. Cerchiamo una sua soluzione della forma $z(\rho) = \rho^\alpha$: sostituendo si ha $\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$, $\alpha^2 = n^2$, da cui $\alpha = \mp n$.

Sia $n \neq 0$. La soluzione generale dell'equazione differenziale del problema (2.10) è data da

$$z(\rho) = c_1\rho^n + c_2\rho^{-n}.$$

Per essere limitata in $[0,1]$ deve perciò essere $c_2 = 0$. Da $z(1) = 0$ si ha poi $z(\rho) \equiv 0$ per ogni ρ, ovvero l'unica soluzione di (2.10) è la soluzione nulla.

Sia $n = 0$. L'equazione differenziale del problema (2.10) diviene $\rho^2 z'' + \rho z' = 0$ e, detto $w = z'$, si ha $\rho w' + w = 0$, da cui $w(\rho) = c_1 \frac{1}{\rho}$ e quindi $z(\rho) = c_1 \log(\rho) + c_2$: per essere limitata su $[0,1]$ deve essere $c_1 = 0$ ovvero $z(\rho) \equiv c_2$ e da $z(1) = 0$, si ha ancora che l'unica soluzione è quella nulla.

Passiamo infine al problema (2.11). L'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato (facendo uso della stessa tecnica sopra descritta) da

$$\tilde{z}(\rho) = c_1 \rho + c_2 \rho^{-1}.$$

Una soluzione dell'equazione differenziale non omogenea la cerchiamo della forma $z(\rho) = k\rho^\alpha$, da cui si ha

$$k\alpha(\alpha - 1)\rho^\alpha + k\alpha\rho^\alpha - k\rho^\alpha = \rho^2,$$

da cui

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ k\alpha^2 - k = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 2 \\ k = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale non omogenea è perciò dato da

$$z(\rho) = c_1 \rho + c_2 \frac{1}{\rho} + \frac{1}{3}\rho^2.$$

Per essere limitata deve essere $c_2 = 0$ e da $z(1) = c_1 + \frac{1}{3} = 0$ si ha $c_1 = -\frac{1}{3}$ e quindi $z(\rho) = \frac{1}{3}(\rho^2 - \rho)$.

Abbiamo perciò trovato che l'unica soluzione del problema (2.8) è data da

$$u(\rho,\vartheta) = a_1(\rho)\cos(\vartheta) = \frac{1}{3}\rho(\rho-1)\cos(\vartheta).$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(\rho,\vartheta)$ risolve effettivamente il problema di Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.6 *Sia dato il problema di Dirichlet sul cerchio unitario del piano:*

$$\begin{cases} \triangle u = x & \textit{per } x^2+y^2<1 \\ \\ u = 0 & \textit{per } x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Facendo uso del metodo di separazione delle variabili, trovare la soluzione del problema.

Risoluzione. Si tratta di un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson. Il problema è ben posto e di conseguenza ha soluzione unica.

Introduciamo le coordinate polari (ρ,ϑ):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ & 0\le\rho<1, \quad 0\le\vartheta<2\pi \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

e indichiamo con $\tilde{u}(\rho,\vartheta) = u(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)$. Il problema in coordinate polari diviene

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\tilde{u}_\rho + \frac{1}{\rho^2}\tilde{u}_{\vartheta\vartheta} = \rho\cos\vartheta & 0\le\rho<1, \quad 0\le\vartheta<2\pi \\ \\ \tilde{u}(1,\vartheta) = 0 & 0\le\vartheta<2\pi. \end{cases} \tag{2.12}$$

Ricordiamo che per l'equazione omogenea associata

$$\triangle w = 0, \quad \rho < 1,$$

l'integrale generale è dato da

$$w(\rho,\vartheta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(a_n\cos(n\vartheta)+b_n\sin(n\vartheta)\right).$$

Cerchiamo allora soluzioni di (2.12) della forma

$$\tilde{u}(\rho,\vartheta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(\rho)\cos(n\vartheta)+b_n(\rho)\sin(n\vartheta)\right). \tag{2.13}$$

Sostituendo la (2.13) in (2.12) si ha:

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\Big(a_n''(\rho)\cos(n\vartheta)+b_n''(\rho)\sin(n\vartheta)+\frac{1}{\rho}a_n'(\rho)\cos(n\vartheta)+\\ \frac{1}{\rho}b_n'(\rho)\sin(n\vartheta)-\frac{n^2}{\rho^2}a_n(\rho)\cos(n\vartheta)-\frac{n^2}{\rho^2}b_n(\rho)\sin(n\vartheta)\Big)=\rho\cos\vartheta\\ \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(a_n(1)\cos(n\vartheta)+b_n(1)\sin(n\vartheta)\right)=0.\end{cases}$$

Tenuto conto che gli elementi dell'insieme

$$\{\cos(n\vartheta),\ \sin(n\vartheta)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

sono tutti linearmente indipendenti, si ottiene

$$\begin{cases}a_1''+\frac{1}{\rho}a_1'-\frac{1}{\rho^2}a_1=\rho\\ a_n''+\frac{1}{\rho}a_n'-\frac{n^2}{\rho^2}a_n=0 & \text{per ogni } n\neq 1,\\ b_n''+\frac{1}{\rho}b_n'-\frac{n^2}{\rho^2}b_n=0 & \text{per ogni } n\in\mathbb{N},\\ a_n(1)=b_n(1)=0 & \text{per ogni } n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Si tratta allora di studiare i problemi

$$\begin{cases}\rho^2z''+\rho z'-n^2z=0\\ z(1)=0\ \text{ e } z \text{ limitata su } [0,1],\end{cases} \tag{2.14}$$

per $n\neq 1$ e

$$\begin{cases}\rho^2z''+\rho z'-z=\rho^3\\ z(1)=0\ \text{ e } z \text{ limitata su } [0,1].\end{cases} \tag{2.15}$$

Risolviamo intanto il problema (2.14). Si tratta di un'equazione differenziale lineare del second'ordine omogenea. Cerchiamo una sua soluzione della forma $z(\rho) = \rho^\alpha$: sostituendo si ha $\alpha(\alpha-1) + \alpha - n^2 = 0$, $\alpha^2 = n^2$, da cui $\alpha = \mp n$.

Sia $n \neq 0$. La soluzione generale dell'equazione del problema (2.14) è perciò data da

$$z(\rho) = c_1\rho^n + c_2\rho^{-n}.$$

Per essere limitata in $[0, 1]$ deve perciò essere $c_2 = 0$. Da $z(1) = 0$ si ha poi $z(\rho) \equiv 0$ per ogni ρ, ovvero l'unica soluzione di (2.14) è la soluzione nulla.

Sia $n = 0$. L'equazione del problema (2.14) diviene $\rho^2 z'' + \rho z' = 0$ e, detto $w = z'$, si ha $\rho w' + w = 0$, da cui $w(\rho) = c_1 \frac{1}{\rho}$ e quindi $z(\rho) = c_1 \log(\rho) + c_2$: per essere limitata su $[0, 1]$ deve essere $c_1 = 0$ ovvero $z(\rho) \equiv c_2$ e da $z(1) = 0$, si ha ancora che l'unica soluzione è quella nulla.

Passiamo infine al problema (2.15). La soluzione generale dell'equazione omogenea associata è data (facendo uso della stessa tecnica sopra descritta) da

$$\tilde{z}(\rho) = c_1\rho + c_2\rho^{-1}.$$

Una soluzione della non omogenea la cerchiamo della forma $\bar{z}(\rho) = k\rho^\alpha$, da cui si ha

$$k\alpha(\alpha-1)\rho^\alpha + k\alpha\rho^\alpha - k\rho^\alpha = \rho^3,$$

ovvero

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ k\alpha^2 - k = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 3 \\ k = \frac{1}{8} \end{cases}$$

e la soluzione generale è data da

$$\bar{z}(\rho) = c_1\rho + c_2\frac{1}{\rho} + \frac{1}{8}\rho^3.$$

Per essere limitata deve essere $c_2 = 0$ e da $z(1) = c_1 + \frac{1}{8} = 0$ si ha $c_1 = -\frac{1}{8}$ e quindi $\bar{z}(\rho) = \frac{1}{8}(\rho^3 - \rho)$.

Per il problema (2.12) abbiamo perciò trovato una soluzione della forma (2.13)

$$\tilde{u}(\rho, \vartheta) = \frac{1}{8}(\rho^3 - \rho)\cos(\vartheta),$$

per cui, ritornando alle variabili cartesiane (x, y), la soluzione del problema di Dirichlet proposto è data da

$$u(x, y) = \frac{1}{8}x(x^2 + y^2 - 1), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x, y)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

2.2 Equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico

Esercizio 2.7 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u\,(x, 0) = 3\sin(2\pi x) - 2\sin(3\pi x) & 0 < x < 1 \\ u\,(0, t) = u\,(1, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore. Il problema è ben posto per $t > 0$ ed avrà quindi una sola soluzione.

Come previsto dal testo dell'esercizio, applichiamo il metodo di separazione delle variabili. Per prima cosa cerchiamo una soluzione dell'equazione del tipo

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.16}$$

da cui sostituendo nell'equazione del problema

$$\psi'(t)\varphi(x) - 9\psi(t)\varphi''(x) = 0$$

e separando le variabili esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 9\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -9\lambda,$$

per cui otteniamo le due equazioni $\psi' = -9\lambda\psi$, $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$. Utilizzando poi la (2.16) per i dati al bordo del problema si ottiene

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(1)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

da cui

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{2.17}$$

Le soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

possono essere non nulle se e solo se sono periodiche: ciò equivale a dire che non troveremo soluzioni per $\lambda \leq 0$ mentre per $\lambda > 0$ si ha

$$\varphi_n(x) = \beta_n \sin(n\pi x) \;\; \text{per} \;\; \lambda_n = \pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

In corrispondenza a tale λ_n per l'equazione differenziale $\psi' = -9\lambda_n\psi$ abbiamo la soluzione $\psi_n(t) = \alpha_n e^{-9\pi^2 n^2 t}$.

Posto $a_n = \alpha_n \beta_n$, abbiamo perciò trovato la famiglia di soluzioni

$$u_n(x,t) = a_n e^{-9\pi^2 n^2 t} \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Per linearità è anche soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-9\pi^2 n^2 t} \sin(n\pi x). \tag{2.18}$$

Per concludere si tratta ora di far uso del dato iniziale: sia la soluzione che il dato sono in serie di seni, per cui

$$3\sin(2\pi x) - 2\sin(3\pi x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x).$$

Perciò $a_2 = 3$, $a_3 = -2$ e $a_n = 0$ per ogni $n \neq 2,\ 3$, per cui sostituendo nella (2.18) la soluzione del problema può scriversi

$$u(x,t) = 3e^{-36\pi^2 t} \sin(2\pi x) - 2e^{-81\pi^2 t} \sin(3\pi x).$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.8 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 & 0 < x < 5, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3 + 5\cos(\pi x) & 0 < x < 5 \\ u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore. Il problema è ben posto per $t > 0$ ed avrà quindi una sola soluzione.

Come previsto dal testo dell'esercizio, applichiamo il metodo di separazione delle variabili. Per prima cosa cerchiamo una soluzione dell'equazione del tipo

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.19}$$

da cui sostituendo nell'equazione del problema si ha

$$\psi'(t)\varphi(x) = 5\psi(t)\varphi''(x)$$

e separando le variabili esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 5\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -5\lambda,$$

per cui otteniamo le due equazioni $\psi' + 5\lambda\psi = 0$, $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$. Utilizzando poi la (2.19) per i dati al bordo del problema si ottiene

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(5)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

da cui

$$\varphi'(0) = \varphi'(5) = 0. \tag{2.20}$$

Le soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(5) = 0 \end{cases}$$

possono essere non nulle se e solo se sono periodiche. Per $\lambda < 0$ non vi sono soluzioni non nulle, per $\lambda = 0$ sono soluzioni tutte le costanti mentre per $\lambda > 0$ la soluzione generale per l'equazione differenziale è

$$\varphi(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

da cui

$$\varphi'(x) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Usando i dati al bordo si ha $\beta = 0$ e $-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(5\sqrt{\lambda}) = 0$, da cui $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{25}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Perciò

$$\varphi_n(x) = \beta_n \cos\left(\frac{\pi}{5}nx\right) \quad \text{per} \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{25}.$$

Tale soluzione include per $n = 0$ anche il caso $\lambda = 0$. In corrispondenza a tali λ_n per l'equazione differenziale $\psi' = -5\lambda_n\psi$ abbiamo le soluzioni

$$\psi_n(t) = b_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}.$$

Abbiamo perciò trovato la famiglia di soluzioni della forma (2.19)

$$u_n(x,t) = a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\cos(n\frac{\pi}{5}x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per linearità è anche soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2\pi^2}{5}t}\cos\left(\frac{\pi}{5}nx\right). \tag{2.21}$$

La soluzione è perciò in serie di coseni rispetto alla x periodica di periodo $T = 10$. Anche il dato iniziale è pari e periodico di periodo 10: tale dato è già sviluppato in serie di coseni. Per confronto si ha quindi $\frac{a_0}{2} = 3$, $a_5 = 5$ e $a_n = 0$ per ogni $n \neq 0,\ 5$. Sostituendo nella (2.21) si ottiene

$$u(x,t) = 3 + 5e^{-5\pi^2 t}\cos(\pi x)$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Neumann proposto. ■

Esercizio 2.9 *Mediante il metodo di separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0 \ \textit{e}\ k > 0 \ \textit{costante assegnata}, \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore. Il problema è ben posto per $t > 0$ ed avrà quindi una sola soluzione.

Come previsto dal testo dell'esercizio, applichiamo il metodo di separazione delle variabili. Per prima cosa cerchiamo una soluzione dell'equazione del tipo

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.22}$$

da cui sostituendo nell'equazione del problema si ha

$$\psi'(t)\varphi(x) - k\psi(t)\varphi''(x) = 0$$

e separando le variabili esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = k\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

per cui otteniamo le due equazioni $\psi' = -\lambda\psi$, $\varphi'' = -\frac{\lambda}{k}\varphi$. Utilizzando poi la (2.22) per i dati al bordo del problema si ottiene

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(1)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

da cui

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \tag{2.23}$$

Le soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' = -\frac{\lambda}{k}\varphi & \qquad k > 0 \text{ costante assegnata} \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

possono essere non nulle se e solo se sono periodiche: ciò equivale a dire che non troveremo soluzioni per $\lambda \leq 0$ mentre per $\lambda > 0$ si ha

$$\varphi_n(x) = b_n \sin(n\pi x) \quad \text{per} \quad \lambda_n = kn^2\pi^2.$$

In corrispondenza a tale λ_n per l'equazione differenziale $\psi' = -\lambda_n \psi$ abbiamo la soluzione $\psi_n(t) = e^{-kn^2\pi^2 t}$.

Abbiamo perciò trovato la famiglia di soluzioni

$$u_n(x,t) = b_n e^{-kn^2\pi^2 t} \sin(n\pi x), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Per linearità è anche soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-kn^2\pi^2 t} \sin(n\pi x). \tag{2.24}$$

Per concludere si tratta ora di sviluppare il dato iniziale in serie di Fourier di periodo 2: poiché la soluzione è in serie di seni, stessa cosa dovrà avvenire per il dato. Bisognerà perciò estendere il dato $f(x) = x(1-x)$ dispari a $[-1, 1]$. Per quanto riguarda il coefficiente di Fourier di $\sin(n\pi x)$ si ha:

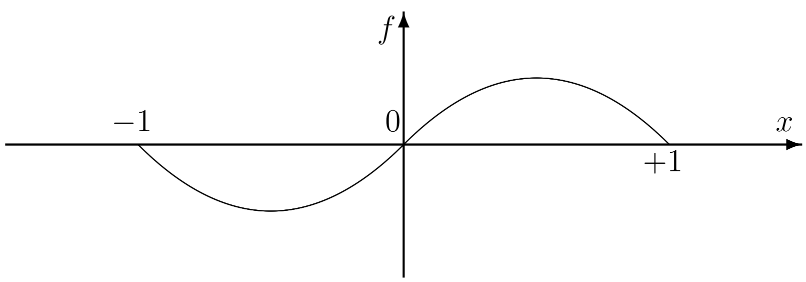

Figura 1: Grafico nel periodo del dato iniziale del problema dell'Esempio 2.9.

$$\begin{aligned}
\beta_n = \; & 2\int_0^1 f(\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi = 2\int_0^1 (\xi - \xi^2)\sin(n\pi\xi)d\xi = \\
& 2(\xi-\xi^2)\tfrac{-\cos(n\pi\xi)}{n\pi}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 (1-2\xi)\frac{\cos(n\pi\xi)}{n\pi}d\xi = \\
& 2(1-2\xi)\tfrac{\sin(n\pi\xi)}{(n\pi)^2}\Big|_0^1 - 2\int_0^1 -2\frac{\sin(n\pi\xi)}{(n\pi)^2}d\xi = \\
& \left[\tfrac{4}{(n\pi)^2}\left(-\tfrac{\cos(n\pi\xi)}{n\pi}\right)\right]\Big|_0^1 = \frac{4}{(n\pi)^3}\left(1-(-1)^n\right).
\end{aligned}$$

Perciò il dato iniziale $u(x,0) = f(x) = x(1-x)$ si scrive come

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{(n\pi)^3} \sin(n\pi x). \tag{2.25}$$

D'altra parte dalla (2.24) si ha

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)$$

e per confronto si ha $b_n = \frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}$ per cui sostituendo nella (2.24) si ottiene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{(n\pi)^3} e^{-kn^2\pi^2 t} \sin(n\pi x)$$

per cui la soluzione del problema può scriversi

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{((2n+1)\pi)^3} e^{-k\pi^2(2n+1)^2 t} \sin\left((2n+1)\pi x\right).$$

■

Esercizio 2.10 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u\left(x,0\right) = -2x & 0 < x < \pi \\ u_x\left(0,t\right) = u_x\left(\pi,t\right) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore. Il problema è ben posto per $t > 0$ ed avrà quindi una sola soluzione.

Come previsto dal testo dell'esercizio, applichiamo il metodo di separazione delle variabili. Per prima cosa cerchiamo una soluzione dell'equazione del tipo

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.26}$$

da cui sostituendo nell'equazione del problema

$$\psi'(t)\varphi(x) = 4\psi(t)\varphi''(x)$$

e separando le variabili esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 4\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -4\lambda,$$

per cui otteniamo le due equazioni $\psi' + 4\lambda\psi = 0$, $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$. Utilizzando poi la (2.26) per i dati al bordo del problema si ottiene

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(\pi)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

da cui

$$\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0. \tag{2.27}$$

Le soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0 \end{cases}$$

possono essere non nulle se e solo se sono periodiche. Per $\lambda < 0$ non vi sono soluzioni non nulle, per $\lambda = 0$ sono soluzioni tutte le costanti mentre per $\lambda > 0$ si ha (vedi esercizio 2.8)

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \cos(nx) \;\; \text{per} \;\; \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

In corrispondenza a tale λ_n per l'equazione differenziale $\psi' = -4\lambda_n\psi$ abbiamo le soluzioni $\psi_n(t) = b_n e^{-4n^2 t}$.

Abbiamo perciò trovato la famiglia di soluzioni (include anche il caso $n = 0$)

$$u_n(x,t) = a_n e^{-4n^2 t} \cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per linearità è anche soluzione

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-4n^2 t} \cos(nx). \tag{2.28}$$

Per concludere si tratta ora di sviluppare il dato iniziale in serie di Fourier di periodo 2π: poiché la soluzione è in serie di coseni rispetto alla x, stessa cosa dovrà avvenire per il dato. Bisognerà perciò estendere il dato $f(x) = -2x$ pari in $[-\pi, \pi]$. Si ha:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx),$$

dove $\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx$, e nel nostro caso

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -2x \; dx = \frac{2}{\pi} (-x^2) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi} (-\pi^2) = -2\pi,$$

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -2x \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} (-2x) \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi -2 \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ &= -\frac{4}{\pi} \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{4}{\pi n^2} \left((-1)^n - 1 \right). \end{aligned}$$

Per confronto si ha quindi $a_0 = \frac{\alpha_0}{2} = -\pi$, $a_n = \alpha_n = \frac{4}{\pi n^2} \left(1 + (-1)^{n+1}\right)$ per cui sostituendo nella (2.28) si ottiene

$$u(x,t) = -\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^2} \left(1 + (-1)^{n+1}\right) e^{-4n^2 t} \cos(nx)$$

per cui la soluzione del problema può scriversi

$$u(x,t) = -\pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi (2k+1)^2} e^{-4(2k+1)^2 t} \cos\left((2k+1)x\right).$$

■

Esercizio 2.11 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_t - 7u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3 + x & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy-Neumann per l'equazione del calore. Il problema è ben posto per $t > 0$ ed avrà quindi una sola soluzione.
Come previsto dal testo dell'esercizio, applichiamo il metodo di separazione delle variabili. Per prima cosa cerchiamo una soluzione dell'equazione del tipo

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.29}$$

da cui sostituendo nell'equazione del problema

$$\psi'(t)\varphi(x) = 7\psi(t)\varphi''(x)$$

e, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 7\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -7\lambda,$$

per cui otteniamo le due equazioni $\psi' + 7\lambda\psi = 0$, $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$. Utilizzando poi la (2.29) per i dati al bordo del problema si ottiene

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(\pi)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

da cui

$$\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0. \tag{2.30}$$

Le soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0 \end{cases}$$

possono essere non nulle se e solo se sono periodiche. Per $\lambda < 0$ non vi sono soluzioni non nulle, per $\lambda = 0$ sono soluzioni tutte le costanti mentre per $\lambda > 0$ si ha

$$\varphi(x) = \alpha\cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}x),$$

da cui

$$\varphi'(x) = -\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Usando i dati al bordo si ha $\beta = 0$ e $-\alpha\sqrt{\lambda}\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$, da cui $\lambda_n = n^2$. Perciò

$$\varphi_n(x) = \alpha_n\cos(nx) \quad \text{per} \quad \lambda_n = n^2.$$

Tale soluzione include per $n = 0$ anche il caso $\lambda = 0$. In corrispondenza a tali λ_n per l'equazione differenziale $\psi' = -7\lambda_n\psi$ abbiamo le soluzioni

$$\psi_n(t) = b_n e^{-7n^2t}.$$

Abbiamo perciò trovato la famiglia di soluzioni dell'equazione alle derivate parziali della forma (2.29)

$$u_n(x,t) = a_n e^{-7n^2t}\cos(nx), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Per linearità è anche soluzione dell'equazione

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-7n^2t}\cos(nx). \tag{2.31}$$

Per concludere si tratta ora di sviluppare il dato iniziale in serie di Fourier di periodo 2π: poiché la soluzione è in serie di coseni rispetto alla x, stessa cosa dovrà avvenire per il dato. Dobbiamo perciò sviluppare $f(x) = x$ pari in $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx),$$

dove $\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx$ e nel nostro caso

$$\alpha_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\ dx = \frac{1}{\pi}(x^2)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \pi,$$

$$\begin{aligned}\alpha_n =&\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}x\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n}dx = \\ &\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).\end{aligned}$$

Per confronto si ha quindi $a_0 = 3 + \alpha_0 = \pi$, $a_n = \alpha_n = \frac{4}{\pi n^2}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)$ per cui sostituendo nella (2.31) si ottiene

$$u(x,t) = 3 + \pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) e^{-7n^2 t}\cos(nx)$$

che può scriversi nella forma

$$u(x,t) = 3 + \pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} e^{-7(2k+1)^2 t}\cos\left((2k+1)x\right).$$

Tale $u = u(x,t)$ è l'unica soluzione del problema proposto. ■

Esercizio 2.12 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t \geq 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = x + \sin x & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione del calore. Il problema è ben posto per $t > 0$ ed avrà quindi una sola soluzione.

Come previsto dal testo dell'esercizio, applichiamo il metodo di separazione delle variabili. Per prima cosa cerchiamo una soluzione dell'equazione del tipo

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.32}$$

da cui sostituendo nell'equazione del problema

$$\psi'(t)\varphi(x) - 5\psi(t)\varphi''(x) = 0$$

e separando le variabili esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = 5\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -5\lambda,$$

per cui otteniamo le due equazioni $\psi' = -5\lambda\psi$, $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$. Utilizzando poi la (2.32) per i dati al bordo del problema si ottiene

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t > 0,$$

da cui

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \tag{2.33}$$

Le soluzioni del problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

possono essere non nulle se e solo se sono periodiche: ciò equivale a dire che non troveremo soluzioni per $\lambda \leq 0$ mentre per $\lambda > 0$ si ha

$$\varphi_n(x) = \beta_n \sin(nx) \quad \text{per} \quad \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

In corrispondenza a tale λ_n per l'equazione differenziale $\psi' = -5\lambda_n\psi$ abbiamo la soluzione $\psi_n(t) = \alpha_n e^{-5n^2t}$.

Abbiamo perciò trovato la famiglia di soluzioni della forma (2.32)

$$u_n(x,t) = a_n e^{-5n^2t}\sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Per linearità è anche soluzione dell'equazione alle derivate parziali

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-5n^2t}\sin(nx). \tag{2.34}$$

Per concludere si tratta ora di sviluppare il dato iniziale in serie di Fourier di periodo 2π: poiché la soluzione è in serie di seni, stessa cosa dovrà avvenire per il dato. Poiché $\sin x$ già lo è, si tratta di sviluppare $f(x) = x$ dispari a $[-\pi, \pi]$ in serie di Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx).$$

Si ha

$$\begin{aligned}\alpha_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)dx = \\ & \frac{2}{\pi}x\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n}dx = \\ & -\frac{2}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

Utilizzando perciò lo sviluppo appena calcolato nella condizione iniziale,

$$u(x,0) = \sin x + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\sin(nx),$$

si ha $a_1 = 1 + 2 = 3$, $a_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$ per $n \geq 2$, per cui sostituendo nella (2.34) la soluzione del problema può scriversi

$$u(x,t) = 3e^{-5t}\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin(nx).$$

∎

Esercizio 2.13 *Risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-t} \sin x & 0 < x < \pi, \ t > 0, \\ \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u\,(x,0) = 0 & 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{2.35}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy–Dirichlet relativo ad un'equazione parabolica lineare.
Il problema è ben posto ed avrà quindi una sola soluzione. Per determinarla, ricordiamo che il problema di Dirichlet relativo all'equazione del calore,

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ w\,(0,t) = w\,(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

ha tutte le sue soluzioni date da

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Cercheremo perciò soluzioni del problema (2.35) della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx).$$

In tal modo i dati al bordo $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ sono già verificati. Inoltre, poiché $u(x,0) = 0$, deve essere $b_n(0) = 0$ per ogni n. In più, sostituendo l'espressione di $u(x,t)$ in serie nell'equazione di (2.35), si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n'(t) + n^2 b_n(t)\right) \sin(nx) = e^t \sin(x),$$

da cui si ricavano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} b_n' + n^2 b_n = 0 \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$$

per ogni $n \neq 1$,

$$\begin{cases} b_1' + b_1 = e^{-t} \\ b_1(0) = 0. \end{cases}$$

Si ha $b_n(t) \equiv 0$ per ogni $n \neq 1$ e $b_1(t) = te^{-t}$. La soluzione del problema (2.35) è data perciò da

$$u(x,t) = b_1(t) \sin x = te^{-t} \sin x.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.14 *Risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = \sin(x) & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \pi. \end{cases} \tag{2.36}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy–Dirichlet relativo ad un'equazione parabolica lineare.
Il problema è ben posto ed avrà quindi una sola soluzione. Per determinarla, ricordiamo che il problema di Dirichlet relativo all'equazione del calore,

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

ha tutte le sue soluzioni date da

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Cercheremo soluzioni del nostro problema (2.36) della forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx).$$

In tal modo i dati al bordo $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ saranno automaticamente verificati. Inoltre, poiché $u(x,0) = 0$, deve essere $b_n(0) = 0$ per ogni n. In più, sostituendo l'espressione di $u(x,t)$ in serie nell'equazione data, si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(b_n'(t) + n^2 b_n(t)\big) \sin(nx) = \sin(x),$$

da cui si ricavano i seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} b_n' + n^2 b_n = 0 \\ b_n(0) = 0 \end{cases}$$

per ogni $n \neq 1$,

$$\begin{cases} b_1' + b_1 = 1 \\ b_1(0) = 0. \end{cases}$$

Per il primo dei due ($n \neq 1$) la soluzione generale dell'equazione è data da $b_n(t) = ke^{-n^2 t}$, per cui $0 = b_n(0) = k$ e l'unica soluzione è $b_n(t) \equiv 0$. Per il secondo, invece, una soluzione particolare dell'equazione è $\bar{b}_1 = 1$, per cui la soluzione generale è $b_1(t) = 1 + ke^{-t}$. Da $b_1(0) = 0$, si ha $1 + k = 0$, da cui $b_1(t) = 1 - e^{-t}$. La soluzione del problema proposto è dato perciò da

$$u(x,t) = \big(1 - e^{-t}\big) \sin x.$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

2.3 Equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico

Esercizio 2.15 *Si verifichi che il problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \\ u(x,x) = \sqrt{2}\cos(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} u(x,x) + \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

non è ben posto. Si trovi per quali φ esistono soluzioni e determinarle.

Risoluzione. Si tratta di un problema di Cauchy per l'equazione delle onde. Sono curve caratteristiche $x = \mp t + k$, $k \in \mathbb{R}$ per cui il dato è caratteristico e non è perciò garantita la buona positura.
Eseguiamo il cambio di variabili

$$\begin{cases} x + t = \xi \\ x - t = \eta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{\xi+\eta}{2} \\ t = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$

e indichiamo con w la soluzione rispetto alle nuove variabili, $u(x,t) = w(\xi,\eta)$.
Allora il problema proposto diviene

$$\begin{cases} w_{\xi\eta} = 0 \\ w(\xi,0) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ w_\xi(\xi,0) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\xi}{2}\right). \end{cases} \tag{2.37}$$

L'integrale generale dell'equazione $w_{\xi\eta} = 0$ è dato da

$$w(\xi,\eta) = a(\xi) + b(\eta), \tag{2.38}$$

con $a, b \in C^1$ generiche funzioni con $b(0) = 0$. Dalla (2.38) si ottiene $w_\xi(\xi,\eta) = a'(\xi)$, per cui le condizioni iniziali del problema (2.37) danno luogo alle relazioni

$$\begin{cases} a(\xi) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ a'(\xi) = \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\xi}{2}\right) \end{cases} \tag{2.39}$$

dalle quali si deduce $\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\varphi(\xi)$ e derivando

$$\varphi(\xi) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Riassumendo,

a) se $\varphi(\xi) = -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)$, allora dalla (2.38)

$$w(\xi,\eta) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\xi}{2}\right) + b(\eta) \quad \text{con } b(0) = 0,$$

per cui, al variare di $b = b(\eta)$, vi sono infinite soluzioni;

b) se $\varphi(\xi) \neq -\sqrt{2}\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)$, non vi sono soluzioni.

In entrambi i casi il problema non è ben posto, in quanto manca unicità, esistenza o dipendenza continua dai dati.

Nel caso a) per determinare le soluzioni basterà ora ritornare alle variabili (x, t) ottenendo

$$u(x,t) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{x+t}{2}\right) + b(x-t), \quad b \in C^1 \text{ con } b(0) = 0.$$

■

Esercizio 2.16 *Si determini l'integrale generale dell'equazione*

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 \cos(t), \quad c \in \mathbb{R}. \tag{2.40}$$

Risoluzione. Ricordiamo che l'integrale generale dell'equazione delle onde omogenea

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$

è data da

$$v(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

con $\varphi,\ \psi:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni generiche di classe C^2.

Si osservi ora che una soluzione particolare di (2.40) è data da $\bar{u}(x,t) = -c^2\cos(t)$: l'integrale generale è perciò dato da

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct) - c^2\cos t,$$

con $\varphi,\ \psi:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funzioni generiche di classe C^2. ■

Esercizio 2.17 *Risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ \\ u\,(x,0) = 3\sin(2x) + \sin(5x) & 0 < x < \pi \\ \\ u_t\,(x,0) = 2\sin(x) & 0 < x < \pi \\ \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Dirichlet al bordo. Il problema è ben posto. L'unica soluzione la possiamo cercare con il metodo di riflessione relativo al problema della corda vibrante ad estremi fissi, ovvero utilizzando la formula di d'Alembert: dette

$$\begin{cases} h(x) = 3\sin(2x) + \sin(5x) \\ k(x) = 2\sin(x), \end{cases}$$

dispari e 2π-periodiche, la soluzione cercata è data da

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}\left(h(x+t) + h(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} k(\tau)d\tau \\ =& \frac{1}{2}\big(3\sin(2(x+t)) + \sin(5(x+t)) + \\ & 3\sin(2(x-t)) + \sin(5(x-t))\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} 2\sin(\tau)d\tau \\ =& \frac{3}{2}\big(\sin(2(x+t)) + \sin(2(x-t))\big) + \\ & \frac{1}{2}\big(\sin(5(x+t)) + \sin(5(x-t))\big) - \cos(x+t) + \cos(x-t). \end{aligned}$$

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy-Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.18 *Risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1, \; t > 0 \\ u\,(x, 0) = 1 & 0 < x < 1 \\ u_t\,(x, 0) = \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u_x\,(0, t) = u_x\,(1, t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Neumann agli estremi. Il problema è ben posto. L'unica soluzione la cerchiamo per separazione di variabili. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.41}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.41) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(1)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$. Si tratta perciò di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ & 0 < x < 1 \\ \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda = 0$ si trova che sono soluzioni tutte le costanti. Infine, per $\lambda > 0$, l'integrale generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

da cui

$$\varphi'(x) = \alpha\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - \beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda_n = \pi^2 n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\beta}_n \cos(n\pi x).$$

Abbiamo perciò trovato, per $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n \in \mathbb{N}$ (include anche il caso particolare $n = 0$),

$$\varphi_n(x) = \beta_n \cos(n\pi x).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + \lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + \pi^2 n^2 \psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(n\pi t) + \tilde{\beta}_n \sin(n\pi t),$$

per $n \neq 0$ mentre per $n = 0$ sono soluzioni tutte le funzioni lineari, $\psi_0(t) = \alpha + \beta t$ per cui mettendo insieme,

$$u_n(x,t) = \begin{cases} (\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t))\cos(n\pi x) & \text{per } n \neq 0 \\ \alpha + \beta t & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \alpha + \beta t + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(n\pi t) + \beta_n \sin(n\pi t))\cos(n\pi x).$$

La funzione u è quindi *pari* rispetto alla x. Risulta poi

$$u_t(x,t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n\pi\alpha_n \sin(n\pi t) + n\pi\beta_n \cos(n\pi t)\right) \cos(n\pi x).$$

Il dato iniziale $\tilde{f}(x) = \sin(\pi x)$, una volta estesa la funzione pari 2-periodica, diviene $f(x) = |\sin(\pi x)|$. Si tratta di svilupparla con Fourier,

$$f(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi\xi)$$

calcolando i coefficienti

$$a_n = 2\int_0^1 \sin(\pi\xi)\cos(n\pi\xi)d\xi.$$

Integrando due volte per parti si ha

$$\begin{aligned}
&\int \sin(\pi\xi)\cos(n\pi\xi)d\xi = \\
&-\frac{1}{\pi}\cos(\pi\xi)\cos(n\pi\xi) - n\int \cos(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)d\xi = \\
&-\frac{1}{\pi}\cos(\pi\xi)\cos(n\pi\xi) - \frac{n}{\pi}\sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi) + n^2\int \sin(\pi\xi)\cos(n\pi\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Perciò, per $n = 1$, si ha

$$a_1 = 2\int_0^1 \sin(\pi\xi)\cos(\pi\xi)d\xi = \int_0^1 \sin(2\pi\xi)d\xi = 0,$$

mentre per $n \neq 1$ risulta

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-1}\left(\cos(\pi\xi)\cos(n\pi\xi) + n\sin(\pi\xi)\sin(n\pi\xi)\right)\Big|_0^1 = \\
&\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-1}\left(-(-1)^n - 1\right) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}
\end{aligned}$$

Abbiamo allora trovato

$$f(\xi) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2-1}\cos(n\pi\xi).$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 1 = u(x,0) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi x), \\ \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} - 1}{n^2 - 1} \cos(n\pi x) = u_t(x,0) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi\beta_n \cos(n\pi x). \end{cases}$$

si ottiene $\alpha = 1$ e $\alpha_n = 0$ per ogni $n \geq 1$ dalla prima riga mentre dalla seconda si ricava $\beta = \frac{2}{\pi}$, $\beta_1 = 0$ e $n\pi\beta_n = -\frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}$ per ogni $n \geq 2$. Abbiamo allora trovato

$$\begin{aligned} u(x,t) =& 1 + \frac{2}{\pi}t - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{1+(-1)^n}{n(n^2-1)} \sin(n\pi t)\cos(n\pi x) = \\ & 1 + \frac{2}{\pi}t - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2} \frac{2}{2k(4k^2-1)} \sin(2k\pi t)\cos(2k\pi x) \end{aligned}$$

che è la soluzione del problema proposto. ■

Esercizio 2.19 *Mediante il metodo di separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u\,(x,0) = \cos(2x) & 0 < x < \pi \\ u_t\,(x,0) = \cos(2x) & 0 < x < \pi \\ u_x\,(0,t) = u_x\,(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Neumann agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.42}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.42) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(\pi)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda = 0$ si trova che sono soluzioni tutte le costanti. Infine, per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

da cui

$$\varphi'(x) = \alpha\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - \beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\beta}_n \cos(nx).$$

Abbiamo perciò trovato, per $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ (include anche il caso particolare $n = 0$),

$$\varphi_n(x) = \beta_n \cos(nx).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + \lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + n^2\psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(nt) + \tilde{\beta}_n \sin(nt),$$

per $n \neq 0$ mentre per $n = 0$ sono soluzioni tutte le funzioni lineari, $\psi_0(t) = \alpha + \beta t$ per cui mettendo insieme,

$$u_n(x,t) = \begin{cases} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)) \cos(nx) & \text{per } n \neq 0 \\ \alpha + \beta t & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \alpha + \beta t + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)) \cos(nx).$$

La funzione u è quindi *pari* rispetto alla x. Risulta poi

$$u_t(x,t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (-n\alpha_n \sin(nt) + n\beta_n \cos(nt)) \cos(nx).$$

Il dato iniziale è già pari 2π-periodico. Imponendo perciò le condizioni iniziali

$$\begin{cases} \cos(2x) = u(x,0) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx), \\ \cos(2x) = u_t(x,0) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \cos(nx). \end{cases}$$

si ottiene $\beta = 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = \frac{1}{2}$ mentre $\alpha_n = 0$, $\beta_n = 0$ per ogni $n \neq 2$. Abbiamo allora trovato

$$u(x,t) = \cos(2t)\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2t)\cos(2x)$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Neumann proposto. ■

Esercizio 2.20 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u\,(x,0) = 2\sin(\pi x) & 0 < x < 2 \\ u_t\,(x,0) = \sin(2\pi x) & 0 < x < 2 \\ u\,(0,t) = u\,(2,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Dirichlet agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.43}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = 4\varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = 4\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -4\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + 4\lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.43) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(2)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ & 0 < x < 2 \\ \varphi(0) = \varphi(2) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha\sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha \sin(2\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\alpha}_n \sin(n\frac{\pi}{2}x).$$

Abbiamo perciò trovato, per $\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \sin(n\frac{\pi}{2}x).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + 4\lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + n^2\pi^2\psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(\pi n t) + \tilde{\beta}_n \sin(\pi n t),$$

per $n > 0$, per cui mettendo insieme, per $n > 0$,

$$u_n(x,t) = (\alpha_n \cos(\pi n t) + \beta_n \sin(\pi n t)) \sin\left(\frac{\pi}{2}nx\right).$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(\pi n t) + \beta_n \sin(\pi n t)) \sin\left(\frac{\pi}{2}nx\right).$$

Risulta poi

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-n\pi\alpha_n \sin(\pi n t) + n\pi \cos(\pi n t)) \sin\left(\frac{\pi}{2}nx\right).$$

La funzione u è quindi *dispari* rispetto alla x. Il dato iniziale è già dispari 4-periodico. Imponendo perciò le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 2\sin(\pi x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{\pi}{2} n x\right), \\ \sin(2\pi x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n \beta_n \sin\left(\frac{\pi}{2} n x\right), \end{cases}$$

si ottiene $\alpha_2 = 2$, $\beta_4 = \frac{1}{4\pi}$ mentre $\alpha_n = 0$ per ogni $n \neq 2$, $\beta_n = 0$ per ogni $n \neq 4$. Abbiamo allora trovato

$$u(x,t) = 2\cos(2\pi t)\sin(\pi x) + \frac{1}{4\pi}\sin(4\pi t)\sin(2\pi x)$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.21 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 2\cos(2x) & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 2 & 0 < x < \pi \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Neumann agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.44}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.44) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(\pi)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda = 0$ si trova che sono soluzioni tutte le costanti. Infine, per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta \cos(\sqrt{\lambda}x)$$

da cui

$$\varphi'(x) = \alpha\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - \beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\beta}_n \cos(nx).$$

Abbiamo perciò trovato, per $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ (include anche il caso particolare $n = 0$),

$$\varphi_n(x) = \beta_n \cos(nx).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + \lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + n^2\psi = 0.$$

Tale equazione per $n \neq 0$ ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(nt) + \tilde{\beta}_n \sin(nt),$$

mentre per $n = 0$ sono soluzioni tutte le funzioni lineari, $\psi_0(t) = \alpha + \beta t$ per cui mettendo insieme,

$$u_n(x,t) = \begin{cases} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)) \cos(nx) & \text{per } n \neq 0 \\ \alpha + \beta t & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \alpha + \beta t + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)) \cos(nx).$$

La funzione u è quindi *pari* rispetto alla x. Risulta poi

$$u_t(x,t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (-n\alpha_n \sin(nt) + n\beta_n \cos(nt)) \cos(nx).$$

Il dato iniziale è già pari 2π-periodico. Imponendo perciò le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 2\cos(2x) = u(x,0) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx), \\ 2 = u_t(x,0) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \cos(nx) \end{cases}$$

si ottiene $\beta = 2$, $\alpha = 0$ e $\alpha_2 = 2$, mentre $\alpha_n = 0$ per ogni $n \neq 2$, $\beta_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Abbiamo allora trovato

$$u(x,t) = 2t + 2\cos(2t)\cos(2x)$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Neumann proposto. ■

Esercizio 2.22 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0 & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = \sin(2x) & 0 < x < \pi \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Dirichlet agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.45}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = 9\varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = 9\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \frac{\lambda}{9}\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.45) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0 \text{ per ogni } t,$$

da cui $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Si tratta perciò di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{\lambda}{9}\varphi = 0 \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x\right) + \beta \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x\right)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha \sin(\pi \frac{\sqrt{\lambda}}{3}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda_n = 9n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\alpha}_n \sin(nx).$$

Abbiamo quindi trovato, per $\lambda_n = 9n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \sin(nx). \tag{2.46}$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + \lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + 9n^2\psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(3nt) + \tilde{\beta}_n \sin(3nt) \tag{2.47}$$

per $n > 0$, per cui mettendo insieme la (2.46) e la (2.47) si ottengono le soluzioni della forma (2.45)

$$u_n(x,t) = (\alpha_n \cos(3nt) + \beta_n \sin(3nt)) \sin(nx).$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(3nt) + \beta_n \sin(3nt)) \sin(nx).$$

Risulta poi

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-3n\alpha_n \sin(3nt) + 3n\beta_n \cos(3nt)\right) \sin(nx).$$

La funzione u è quindi *dispari* rispetto alla x. Il dato iniziale è già dispari 2π-periodico. Imponendo perciò le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx), \\ \sin(2x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\beta_n \sin(nx), \end{cases}$$

si ottiene $\beta_2 = \frac{1}{6}$ mentre $\alpha_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, $\beta_n = 0$ per ogni $n \neq 2$. Abbiamo allora trovato

$$u(x,t) = \frac{1}{6} \sin(6t) \sin(2x)$$

che è l'unica soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.23 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 5u_{xx} = 0 & 0 < x < 3, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3 & 0 < x < 3 \\ u_t(x,0) = 4\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) & 0 < x < 3 \\ u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Neumann agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.48}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = 5\varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = 5\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -5\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + 5\lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.48) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(3)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi'(0) = \varphi'(3) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi'(0) = \varphi'(3) = 0. \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda = 0$ si trova che sono soluzioni tutte le costanti. Infine, per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha\sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

da cui

$$\varphi'(x) = \alpha\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - \beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta\sqrt{\lambda}\sin(3\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda_n = \frac{n^2}{9}\pi^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono in questo caso perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\beta}_n \cos\left(n\frac{\pi}{3}x\right).$$

Abbiamo trovato, per $\lambda_n = \frac{n^2}{9}\pi^2$, $n \in \mathbb{N}$ (include anche il caso particolare $n = 0$),

$$\varphi_n(x) = \beta_n \cos\left(n\frac{\pi}{3}x\right).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + 5\lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + \frac{5}{9}\pi^2 n^2 \psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right) + \tilde{\beta}_n \sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right),$$

per $n \neq 0$ mentre per $n = 0$ sono soluzioni tutte le funzioni lineari, $\psi_0(t) = \alpha + \beta t$ per cui mettendo insieme, otteniamo per l'equazione alle derivate parziali le seguenti soluzioni della forma (2.48)

$$u_n(x,t) = \begin{cases} \left(\alpha_n \cos\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right)\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}x\right) & \text{per } n \neq 0 \\ \alpha + \beta t & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \alpha + \beta t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right) + \beta_n \sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right)\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}x\right).$$

La funzione u è quindi *pari* rispetto alla x. Risulta poi

$$u_t(x,t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-n\frac{\pi\sqrt{5}}{3}\alpha_n \sin\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right) + n\frac{\pi\sqrt{5}}{3}\beta_n \cos\left(\frac{\pi\sqrt{5}}{3}nt\right)\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}x\right).$$

Il dato iniziale è già pari 6-periodico. Imponendo perciò le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 3 = u(x,0) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx) \\ 4\cos\left(\frac{2}{3}\pi x\right) = u_t(x,0) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{3}\pi n \beta_n \cos\left(n\frac{\pi}{3}x\right) \end{cases}$$

si ottiene $\beta = 0$, $\alpha = 3$ e $\beta_2 = \frac{6\sqrt{5}}{5\pi}$, mentre $\alpha_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, $\beta_n = 0$ per ogni $n \neq 2$. Abbiamo allora trovato

$$u(x,t) = 3 + \frac{6\sqrt{5}}{5\pi} \sin\left(2\frac{\sqrt{5}}{3}t\right) \cos\left(2\frac{\pi}{3}x\right)$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Neumann proposto. ■

Esercizio 2.24 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = 2\sin(x) + \sin(2x) & 0 < x < \pi \\ u\,(0,t) = u\,(\pi,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Dirichlet agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.49}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = 4\varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = 4\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \frac{\lambda}{4}\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.49) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \frac{\lambda}{4}\varphi = 0 & \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. & \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda > 0$ la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x) + \beta \cos(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha \sin(\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda_n = 4n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\alpha}_n \sin(nx).$$

Abbiamo perciò trovato, per $\lambda_n = 4n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \sin(nx).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + \lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + 4n^2\psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(2nt) + \tilde{\beta}_n \sin(2nt)$$

per $n \neq 0$, per cui mettendo insieme, si ottiene la soluzione dell'equazione alle derivate parziali della forma (2.49)

$$u_n(x,t) = (\alpha_n \cos(2nt) + \beta_n \sin(2nt)) \sin(nx).$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(2nt) + \beta_n \sin(2nt)) \sin(nx).$$

La funzione u è quindi *dispari* rispetto alla x. Il dato iniziale è già dispari 2π-periodico. Imponendo perciò le condizioni iniziali

$$\begin{cases} 0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx) \\ 2\sin x + \sin(2x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\beta_n \sin(nx), \end{cases}$$

si ottiene $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \frac{1}{4}$ mentre $\alpha_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, $\beta_n = 0$ per ogni $n \geq 3$. Abbiamo allora trovato

$$u(x,t) = \sin(2t)\sin x + \frac{1}{4}\sin(4t)\sin(2x)$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Dirichlet proposto. ■

Esercizio 2.25 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R} \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = -\cos x & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = \cos x - 3\cos(3x) & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Neumann agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.50}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.50) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi'(0)\psi(t) = \varphi'(\pi)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 & \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0. & \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda = 0$ si trova che sono soluzioni tutte le costanti. Infine, per $\lambda > 0$, la soluzione generale dell'equazione è

$$\varphi(x) = \alpha \sin(\sqrt{\lambda}x) + \beta\cos(\sqrt{\lambda}x)$$

da cui

$$\varphi'(x) = \alpha\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - \beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \lambda_n = n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\beta}_n \cos(nx).$$

Abbiamo perciò trovato, per $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$ (include anche il caso particolare $n = 0$),

$$\varphi_n(x) = \beta_n \cos(nx).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + \lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + n^2\psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(nt) + \tilde{\beta}_n \sin(nt),$$

per $n \neq 0$ mentre per $n = 0$ sono soluzioni tutte le funzioni lineari, $\psi_0(t) = \alpha+\beta t$ per cui mettendo insieme otteniamo le seguenti soluzioni dell'equazione alle derivate parziali della forma (2.50)

$$u_n(x,t) = \begin{cases} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt))\cos(nx) & \text{per } n \neq 0 \\ \alpha + \beta t & \text{per } n = 0. \end{cases}$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \alpha + \beta t + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt))\cos(nx).$$

La funzione u è quindi *pari* rispetto alla x. Risulta poi

$$u_t(x,t) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (-n\alpha_n \sin(nt) + n\beta_n \cos(nt)) \cos(nx).$$

Il dato iniziale è già pari 2π-periodico. Imponendo perciò le condizioni iniziali

$$\begin{cases} -\cos(x) = u(x,0) = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx), \\ \cos(x) - 3\cos(3x) = u_t(x,0) = \beta + \sum_{n=1}^{\infty} n\beta_n \cos(nx). \end{cases}$$

si ottiene $\beta = 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 1$, $b_3 = -1$ mentre $\alpha_n = 0$ per ogni $n \geq 1$, $\beta_n = 0$ per ogni $n \neq 1,\ 3$. Abbiamo allora trovato

$$u(x,t) = -\cos(t)\cos(x) + \sin(t)\cos(x) - \sin(3t)\cos(3x)$$

che è la soluzione del problema proposto.

Lo studente diligente può verificare che tale $u = u(x,t)$ risolve effettivamente il problema di Cauchy–Neumann proposto. ■

Esercizio 2.26 *Risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u\,(x,0) = 0 & 0 < x < 1 \\ u_t\,(x,0) = x(1-x) & 0 < x < 1 \\ u\,(0,t) = u\,(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema della corda vibrante con dato di Dirichlet al bordo.

Il problema è ben posto. L'unica soluzione la cerchiamo per separazione di variabili. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.51}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \lambda\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.51) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(1)\psi(t) = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

da cui $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.
La condizione iniziale $u(x, 0) = 0$ diviene $\varphi(x)\psi(0) = 0$ per ogni x, da cui $\psi(0) = 0$. Il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \\ & 0 < x < 1 \\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$$

ha soluzione non nulla solo se periodica e perciò per $\lambda > 0$ e precisamente se e solo se $\lambda_n = \pi^2 n^2$ e in tal caso $\varphi_n(x) = \tilde{\gamma}_n \sin(n\pi x)$ sono soluzioni, $\tilde{\gamma}_n \in \mathbb{R}$.
Inoltre il problema ai limiti

$$\begin{cases} \psi'' + \pi^2 n^2 \psi = 0, \\ \psi(0) = 0 \end{cases}$$

ha soluzioni $\psi_n(t) = \tilde{\beta}_n \sin(n\pi t)$, per cui abbiamo trovato le soluzioni

$$u_n(x, t) = b_n \sin(n\pi x)\sin(n\pi t)$$

e, quindi, anche una loro somma verifica le stesse condizioni:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x)\sin(n\pi t).$$

Resta da imporre la condizione iniziale sulla derivata. Ricordando l'esercizio 2.9 e in particolare la formula (2.25)

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \sin(n\pi x)\cos(n\pi t),$$

da cui

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \sin(n\pi x). \tag{2.52}$$

Sviluppiamo ora il dato iniziale $u_t(x,0) = x(1-x)$ dispari così come la (2.52). Si ha

$$x(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}\sin(n\pi x),$$

e, per confronto, si ottiene $b_n = \frac{1}{n\pi}\frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^3}$, da cui

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(1-(-1)^n)}{(n\pi)^4}\sin(n\pi x)\sin(n\pi t) = \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{((2n+1)\pi)^4}\sin((2n+1)\pi x)\sin((2n+1)\pi t). \end{aligned}$$

■

Esercizio 2.27 *Risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = x(1-x) & 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = \sin(\pi x) & 0 < x < 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t > 0. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta di un problema della corda vibrante con dato di Dirichlet al bordo. Il problema è ben posto. L'unica soluzione la possiamo cercare con il metodo di riflessione relativo al problema della corda vibrante ad estremi fissi. Le funzioni

$$\begin{cases} h(x) = x(1-x) \\ k(x) = \sin(\pi x) \end{cases}$$

vanno estese dispari e 2-periodiche. Si osservi che $k = k(x)$ è già dispari 2-periodica, mentre h va sviluppata in serie di Fourier. Risulta

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{((2n+1)\pi)^3} \sin((2n+1)\pi x).$$

Si può ora applicare la formula di d'Alembert:

$$\begin{aligned} u(x,t) =& \frac{1}{2}[h(x+t)+h(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} k(\xi)d\xi = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{((2n+1)\pi)^3} (\sin((2n+1)\pi(x+t)) + \\ & \sin((2n+1)\pi(x-t))) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \sin(\pi\xi)d\xi = \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{((2n+1)\pi)^3} (\sin((2n+1)\pi(x+t)) + \\ & \sin((2n+1)\pi(x-t))) - \frac{1}{2\pi}(\cos(\pi(x+t)) - \cos(\pi(x-t))) \end{aligned}$$

che è la soluzione cercata. ■

Esercizio 2.28 *Mediante l'uso della separazione delle variabili, risolvere il seguente problema:*

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0 & 0 < x < \pi, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = x & 0 < x < \pi \\ u_t(x,0) = x^2 & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Risoluzione. Si tratta del problema della corda vibrante con dato di Dirichlet agli estremi. Il problema è ben posto. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x,t) = \varphi(x)\psi(t), \tag{2.53}$$

che sostituita nell'equazione del nostro problema ci dà:

$$\varphi(x)\psi''(t) = 9\varphi''(x)\psi(t)$$

ovvero, separando le variabili, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = 9\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\lambda,$$

da cui otteniamo le equazioni $\varphi'' + \frac{\lambda}{9}\varphi = 0$, $\psi'' + \lambda\psi = 0$.

Sostituendo l'espressione (2.53) nelle condizioni al bordo otteniamo:

$$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0 \text{ per ogni } t,$$

da cui $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Si tratta di studiare il problema ai limiti

$$\begin{cases} \varphi'' + \frac{\lambda}{9}\varphi = 0 & \\ & 0 < x < \pi \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0. & \end{cases}$$

Per $\lambda \leq 0$ l'unica soluzione è quella nulla. Per $\lambda > 0$ la soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$\varphi(x) = \alpha \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x\right) + \beta\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{3}x\right)$$

e, imponendo le condizioni ai limiti,

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha\sin(\pi\frac{\sqrt{\lambda}}{3}) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = 0 \\ \lambda_n = 9n^2, \quad n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni del problema sono perciò

$$\varphi_n(x) = \bar{\alpha}_n \sin(nx).$$

Abbiamo trovato, per $\lambda_n = 9n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi_n(x) = \alpha_n \sin(nx).$$

Passiamo ora all'equazione $\psi'' + \lambda\psi = 0$, ovvero

$$\psi'' + 9n^2\psi = 0.$$

Tale equazione ha per soluzione

$$\psi_n(t) = \tilde{\alpha}_n \cos(3nt) + \tilde{\beta}_n \sin(3nt),$$

per $n > 0$ per cui, mettendo insieme, otteniamo la seguente soluzione dell'equazione alle derivate parziali della forma (2.53):

$$u_n(x,t) = (\alpha_n \cos(3nt) + \beta_n \sin(3nt)) \sin(nx).$$

Anche la loro somma verifica la stessa equazione e le stesse condizioni ai limiti:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(3nt) + \beta_n \sin(3nt)) \sin(nx). \tag{2.54}$$

Risulta poi

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-3n\alpha_n \sin(3nt) + 3n\beta_n \cos(3nt)) \sin(nx).$$

La funzione u è quindi *dispari* rispetto alla x. Si tratta di sviluppare i dati iniziali $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ dispari in $[-\pi, \pi]$ in serie di Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx),$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx = \\
& \frac{2}{\pi}x\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx = \\
& -\frac{2}{n}(-1)^n + \frac{2}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\sin(nx)dx = \\
& \frac{2}{\pi}x^2\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2x\frac{\cos(nx)}{n}dx = \\
& \frac{-2\pi(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi}2x\frac{\sin(nx)}{n^2}\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2\frac{\sin(nx)}{n^2}dx = \\
& \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right).
\end{aligned}$$

Utilizzando perciò gli sviluppi appena calcolati nelle condizioni iniziali

$$\begin{cases} f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(nx), \\ g(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 3n\beta_n \sin(nx), \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} a_n = \alpha_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \\ \beta_n = \frac{1}{3n}b_n = \frac{2\pi}{3n^2}(-1)^{n+1} + \frac{4}{3\pi n^4}\left((-1)^n - 1\right). \end{cases} \tag{2.55}$$

Sostituendo la (2.55) nella (2.54) si ottiene la soluzione del problema proposto,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\cos(3nt) + \right.$$

$$\left(\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right) \sin(3nt)\Bigg) \sin(nx).$$

$\blacksquare$