Quadriche in $\mathbb{R}^3$ ~~son~~

$\longrightarrow$ superfici in $\mathbb{R}^3$

Equazione generale

$Q: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 +$

$+ 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$

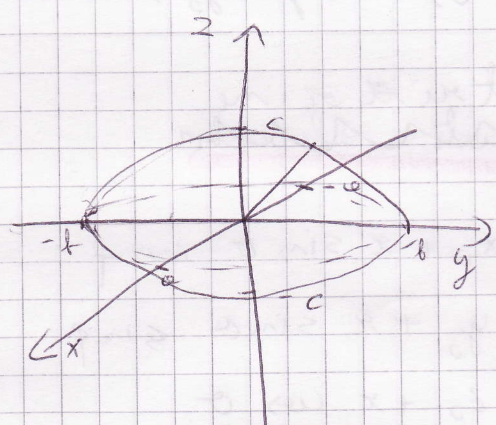
$+ 2a_{01}x + 2a_{02}y + 2a_{03}z +$

$+ a_{00} = 0$

$\longrightarrow$ Nello sp. euclideo $\mathbb{R}^3$ ogni quadrica può essere scritta in una delle 9 forme generalizzati (non le elenco tutte!)

Ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



parametrizzazione

$$\begin{cases} x = a \sin\theta \cos\varphi \\ y = b \sin\theta \sin\varphi \\ z = c \cos\theta \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{matrix}$$

Volume : $\frac{4}{3}\pi abc$

Nota : ogni sezione $x_i = \text{cost}$ è un'ellisse

Casi particolari:

sferoide $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Sfera $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

ovvero $$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

→ se il centro invece che nell'origine si trova in (x_0, y_0, z_0) la rapp. analitica è

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x_0 + r \sin\theta \cos\varphi & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = y_0 + r \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = z_0 + r \cos\theta \end{cases}$$

(Anche $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$)

Area $= 4\pi r^2$ Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$

coordinate sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi & 0 \leq \theta \leq \pi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ z = \rho \cos\theta & \rho \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio

Calcolare il volume della sfera

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

raggio $r = 1$

devo calcolare

$$\iiint_V dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} |J|\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

parametrizzazione

$$S: \begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{array}$$

Devo calcolare

$$|J| = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta \sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta \sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

sulla 3ª colonna

$$= \cos\theta\left[\rho^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \rho^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right] +$$

$$+ \rho\sin\theta\left[\rho\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho\sin^2\theta\sin^2\varphi\right] =$$

4

$= \rho^2 \cos^2\theta \sin\theta \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right) + \rho^2 \sin^3\theta \left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi \right) =$

$= \rho^2 \sin\theta \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta \right) = \boxed{\rho^2 \sin\theta}$

$\Rightarrow$ Volume S:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) d\theta \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 d\theta \right) d\varphi =$$

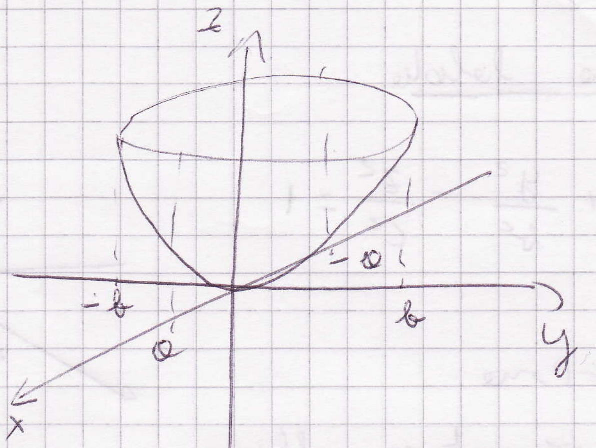
$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \right) d\varphi = \text{come prima}$$

$$= \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi r^2 \text{ con } r = 1$$

Paraboloide → sezioni verticali parabole

ellittico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$

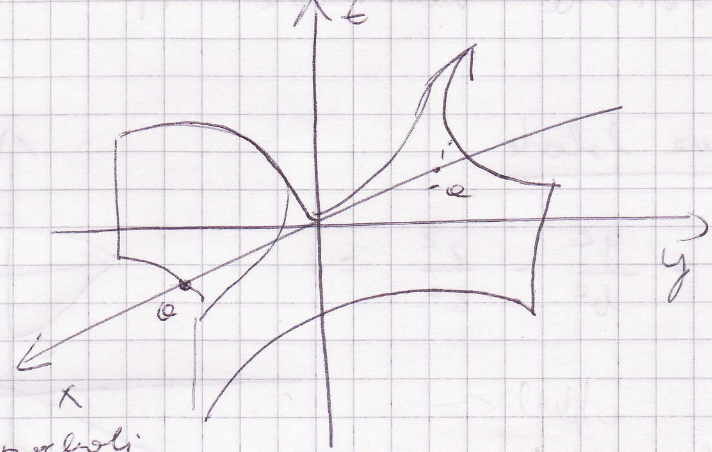


Proiettato su xy è un ellisse

→ sezioni orizzontali ellissi

iperbolico

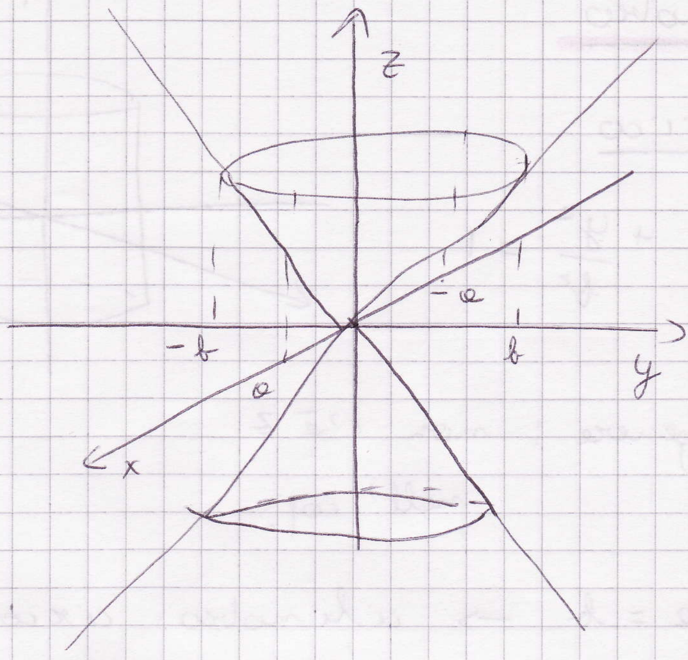
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$$



→ sezioni orizzontali iperboli

Cono

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

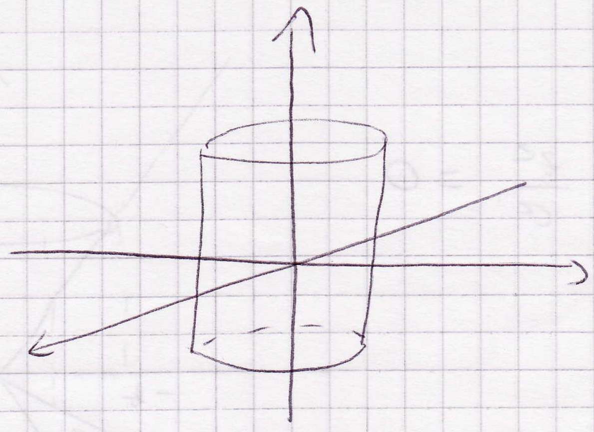


Nota quando c'è un cono
conviene usare coordinate
cilindriche!
lasciando libera la coord. dell'asse.

Cilindro

ellittico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



è degenere: non c'è z nell'eq.

se $a = b$ → cilindro circolare

se limito altezza h, e la base è una circ. di raggio r

$$V = \pi r^2 h$$

$$A = 2\pi r(r + h)$$

(Posso darlo anche con asse // x, o // y)

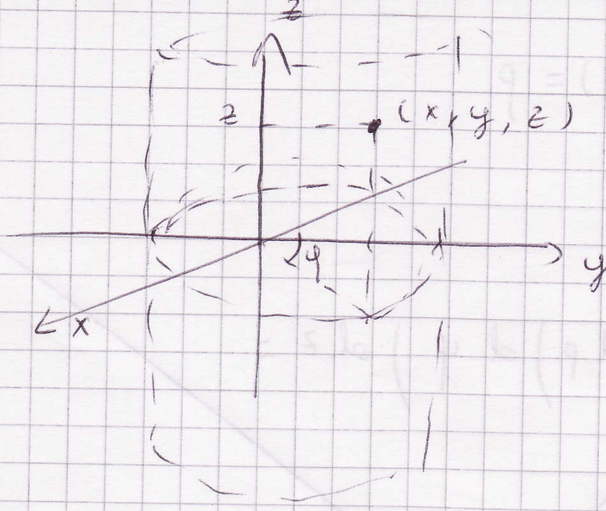
parametrizzazione

$$\begin{cases} x = a \cos\varphi \\ y = b \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Da qui le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \rho \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Ogni p.to $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ appartiene alla sup. di un cilindro circolare ed è individuato da:



Esercizio

Calcolare il volume del cilindro

$$C : \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

compreso fra i piani $z = 1$ e $z = 0$

$$\text{Volume } C = \int_V dv = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^a |J| \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

Uso la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le a \end{array}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

sulla 3^a

$= \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho$

$\Rightarrow$ Volume S =

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{a} \rho \, d\rho \right) d\varphi \right) dz =$$

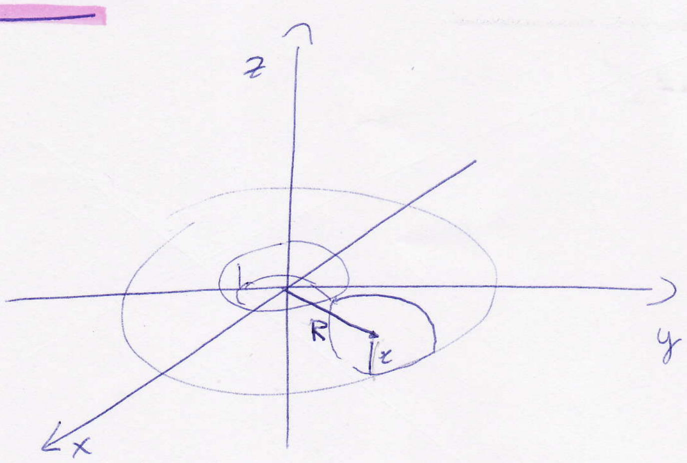
$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{a} d\varphi \right) dz =$$

$$= \frac{a^2}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dz =$$

$$= \frac{a^3}{2} \cdot 2\pi \int_0^1 dz = a^2 \pi$$

Il toro in $\mathbb{R}^3$

→ vedi sup. di rivoluzione



- circonferenza (generatrice) che ruota attorno a un asse del suo stesso piano ma disgiunto.

- rapp. parametrica in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x(p,t) = (R + r\cos p)\cos t \\ y(p,t) = (R + r\cos p)\sin t \\ z(p,t) = r\sin p \end{cases} \qquad 0 \leq t, p \leq 2\pi$$

$R > 0 \Rightarrow$ distanza dal centro del tubo

$r > 0 \Rightarrow$ raggio tubo

- eq. cartesiana $\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + z^2 = r^2$

- Area $2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R r$

- Volume $\pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$.