Esempio

Sia $l>0$, consideriamo

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases} \qquad (10)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

I valori di λ per cui $\exists$ autosoluzioni (cioè sol. non nulle) si dicono autovalori

~~Con~~ Risolvo il problema:

$y'' + \lambda y = 0$, polinomio caratteristico:

$$\alpha^2 + \lambda = 0 \implies \underbrace{\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}}$$

a seconda che λ sia positivo o meno sono complessi o reali.

Nota posso dimostrare (in questo caso), $\lambda > 0$:

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$\implies \int_0^l y\, y''\, dt + \lambda \int_0^l y^2\, dt = 0 \qquad \text{per parti + cond. al bordo}$$

$$\implies -\int_0^l (y')^2\, dt + \lambda \int_0^l y^2\, dx = 0 \qquad \left(\dots \implies \int_0^l y^2 > 0 \right)$$

$$\implies \lambda = \frac{\int_0^l (y')^2\, dt}{\int_0^l y^2\, dt} > 0$$

<u>caso 1</u> $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \sqrt{-\lambda}$ reali

$$\Rightarrow y_a(t) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\, t} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\, t}$$

impongo le cond. al bordo

$$y(0) = y(l) = 0$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\, l} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 \\ \underbrace{c_2}_{\neq} \underbrace{\left(e^{\sqrt{-\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, l}\right)}_{=0 \iff l=0 \;\to\; \text{no}} = 0 \end{cases}$$

oppure: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} & e^{\sqrt{-\lambda}\, l} \end{vmatrix} =$

$$= e^{\sqrt{-\lambda}\, l} - e^{-\sqrt{-\lambda}\, l} = 0 \iff l = 0$$

$\longrightarrow$ non ci sono autovalori e quindi autofunzioni l'unica sol. è $y(t) \equiv 0$.

caso 2 $\lambda = 0$ $\Rightarrow$ ~~rg≠0 sol. banale~~

$\Rightarrow$ unica sol $y \equiv 0$

caso 3 $\lambda > 0$ $\Rightarrow$ $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$

$\Rightarrow y(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$

impongo cond. al bordo:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, l + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda}\, l & \sin\sqrt{\lambda}\, l \end{vmatrix} = \sin\sqrt{\lambda}\, l$$

$\Rightarrow$ gli autovalori di (10) sono le sol. $\lambda > 0$

di $\boxed{\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0}$

$\Rightarrow \sqrt{\lambda}\, l = k\pi$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{l^2}}$ autovalori

da cui: ~~ecc~~ $(*)$ diventa:

~~risolvendo il sistema:~~

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 \cdot \cos \frac{k\pi \ell}{\ell} + c_2 \sin \frac{k\pi}{\ell} \ell = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = c_2 \end{cases} \Rightarrow y_k(t) = c_2 \sin \frac{k\pi t}{\ell}$$ autosoluzioni

---

→ Altri modi di dare condizioni al bordo

• Esempio: condizioni sulle derivate prime

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = -\sqrt{-\lambda}$$

caso 1 $\lambda < 0 \Rightarrow y(t) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\, t} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\, t}$

cond. al bordo: $y'(t) = -\sqrt{-\lambda}\, c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\, t} + \sqrt{-\lambda}\, c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\, t}$

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{-\lambda}\, c_1 + \sqrt{-\lambda}\, c_2 = 0 \\ -\sqrt{-\lambda}\, c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} + \sqrt{-\lambda}\, c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{\sqrt{-\lambda}\pi} \end{vmatrix} = -e^{\sqrt{-\lambda}\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \neq 0 \ \forall \lambda$$

→ non ci sono autosoluzioni

caso 2 $\lambda = 0$

$\Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow y(t) = at + b$

cond. al bordo: $y'(t) = a$, $y'(0) = y'(\pi) = 0 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow y(t) = b$ ∞ soluzioni:

8

Caso 3 $\quad \lambda > 0$

$$y(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$$

$$y'(t) = -\sqrt{\lambda}\, c_1 \sin\sqrt{\lambda}\, t + \sqrt{\lambda}\, c_2 \cos\sqrt{\lambda}\, t$$

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(\pi)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\sqrt{\lambda}}\, c_2 = 0 \\ -\cancel{\sqrt{\lambda}}\, c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi + \cancel{\sqrt{\lambda}}\, c_2 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\sin\sqrt{\lambda}\,\pi & \cos\sqrt{\lambda}\,\pi \end{vmatrix} = \sin\sqrt{\lambda}\,\pi$$

$$\Delta = 0 \iff \sqrt{\lambda}\,\pi = k\pi$$

$$\iff \sqrt{\lambda} = k \iff \boxed{\lambda_k = k^2} \quad \text{autovalori}$$

Nel sistema : $\cancel{c_2 = 0}$

$\cancel{c_1 \sin\sqrt{\lambda}}$

$$\begin{cases} c_2 = 0 \\ -c_1 \underbrace{\sin k\pi}_{=0} + \underbrace{c_2}_{=0} \cos k\pi = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_2$ è indeterminata

$$\Rightarrow \boxed{y_k(t) = c_1 \cos kt} \quad \text{autosoluzioni}$$

Esempio : condizioni di periodicità

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) \end{cases}$$

$\longrightarrow$ studiamo (x brevità) solo il caso $\lambda > 0$

integrale generale

$$y(t) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, t$$

$$\Rightarrow \quad y'(t) = -\sqrt{\lambda}\, c_1 \sin \sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, t$$

impongo le condizioni al bordo: $\longrightarrow$

$$\begin{cases} y(0) - y(\pi) = 0 \\ y'(0) - y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} c_1 - (c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \\ \sqrt{\lambda}\, c_2 - (-\sqrt{\lambda}\, c_1 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi + \sqrt{\lambda}\, c_2 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} (1 - \cos\sqrt{\lambda}\,\pi)\, c_1 - (\sin\sqrt{\lambda}\,\pi)\, c_2 = 0 \\ (+\cancel{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}\,\pi)\, c_1 + (\overset{1}{\cancel{\sqrt{\lambda}}} - \cancel{\sqrt{\lambda}} \cos\sqrt{\lambda}\,\pi)\, c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \cos\sqrt{\lambda}\,\pi & -\sin\sqrt{\lambda}\,\pi \\ \sin\sqrt{\lambda}\,\pi & 1 - \cos\sqrt{\lambda}\,\pi \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \cos\sqrt{\lambda}\,\pi)^2 + \sin^2\sqrt{\lambda}\,\pi =$$

$$= 1 - 2\cos\sqrt{\lambda}\,\pi + \cos^2\sqrt{\lambda}\,\pi + \sin^2\sqrt{\lambda}\,\pi =$$

$$= 2 - 2\cos\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\sqrt{\lambda}\,\pi = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\,\pi = 2k\pi$$

$\iff \boxed{\lambda_k = 4k^2}$ autovalori

Il sistema diventa

$$\begin{cases} \underbrace{(1-\cos 2k\pi)}_{=0} c_1 - \underbrace{\sin 2k\pi}_{=0} c_2 = 0 \\ \underbrace{(\sin 2k\pi)}_{=0} c_1 + \underbrace{(1-\cos 2k\pi)}_{=0} c_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (c_1, c_2) qualsiasi

$\Rightarrow$ $y_{1,k}(t) = \cos 2kt$

$y_{2k}(t) = \sin 2kt$

autosoluzioni

~~autofunzioni~~

(lin. indip.)

e periodiche di periodo π.

+ in generale

$y_k(t) = c_1 \cos 2kt + c_2 \sin 2kt$

Esempio caso non omogeneo

$$\begin{cases} y'' + y = -t^2 + \pi t - 2 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Nota

Abbiamo studiato

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases}$$

trovando ~~due~~ gli autovalori

$\lambda_K = \dfrac{K^2 \pi^2}{l^2}$ e le autosoluzioni

$y_K = c_2 \sin \dfrac{K\pi}{l} t$

fra i λ_K c'è $\lambda_K = \lambda_1 = 1 \longrightarrow$ quindi il prob. omogeneo associato ha sol. non nulle

Inoltre $y_1 = \sin t$ e

$$\int_0^\pi (-t^2 + \pi t - 2) \sin t \, dt = 0$$

$\Rightarrow$ posso avere ~~una~~ la soluzione

$$y(t) = \underbrace{y_1(t)}_{\text{sol. omogeneo}} + \underbrace{v(t)}_{\text{sol. particolare}}$$

• Oppure, se non conosco già aut.val. e autosoluzioni:

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

soluzione particolare

$$\bar{y}(t) = a t^2 + b t + c$$

$$\bar{y}' = 2 a t + b$$

$$\bar{y}'' = 2a$$

$$\Rightarrow \quad 2a + a t^2 + b t + c = -t^2 + \pi t - 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pi \\ 2a + c = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = \pi \\ c = -2 - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{y} = -t^2 + \pi t = t(\pi - t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t(\pi - t)$$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ -c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = c_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = c_2 \sin t + t(\pi - t)$$

Infinite soluzioni