Esercizio: esempio di problema di Cauchy con soluzione non unica

(vedi anche dispense p. 18 Pennello di Peano)

Studiare il problema $\begin{cases} y' = (3t + \frac{3}{2}\cos t)\sqrt[3]{y-3} \\ y(0) = 3 \end{cases}$

Dopo aver discusso la validità dei risultati di esistenza e unicità trovare eventuali soluzioni.

Siamo nel caso $\begin{cases} y' = f(y,t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

con $f(y,t) = (3t - \frac{3}{2}\cos t)\sqrt[3]{y-3}$

$f : \Omega = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y = \mathbb{R}^2$

continua: il teo. di Peano $\Rightarrow \exists$ soluzione locale.

posso applicare il teo. di Cauchy-Lip. per avere unicità?

• Osserviamo che

$$\partial_y f = \left(3t + \frac{3}{2}\cos t\right)\frac{1}{\sqrt[3]{(y-3)^2}}$$

per $y = 3$ diverge, e il dato iniziale $(x_0, y_0) = (0, 3) \Rightarrow$ diverge proprio nel dato iniziale.

non posso usare $\partial_y f \in C$ perché non è vero nell'intorno che mi interesso.

Più in generale, il teo. di Cauchy-Lip. chiede se $\exists\, L > 0$ t/c

$$(*) \quad \left| \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq L \qquad \forall\, (t, y_1), (t, y_2) \in \Omega,\ y_1 \neq y_2$$

$\rightarrow$ Dimostro che per il mio problema non è possibile.

Nel mio caso $(*)$ diventa: cerco L t/c $\forall\, (t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$

$$\left| \frac{\left(3t + \frac{3}{2}\cos t\right)\left(\sqrt[3]{(y_2 - 3)} - \sqrt[3]{(y_1 - 3)}\right)}{y_2 - y_1} \right| < L$$

Fisso $t=0$, $y_1 = 3$, quindi mi chiedo se $\exists\, L>0$ t/c $\forall\, y_2 \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{3}{2} \, \frac{\sqrt[3]{y_2 - 3}}{y_2 - 3} \right| < L \qquad (**)$$

~~per dimostrare che è impossibile basta trovare almeno un $y_2 \in \mathbb{R}$ per cui $(**)$ non è vero $\forall L$.~~

$(**)$ diventa

$$-L < \sqrt[3]{\frac{y_2 - 3}{(y_2-3)^3}} < L$$

$$\Rightarrow \quad -L < \sqrt[3]{\frac{1}{(y_2-3)^2}} < L$$

ma $\displaystyle \lim_{y_2 \to 3} \frac{1}{(y_2-3)^2} = +\infty$

cioè ogni volta che avvicino di un $\varepsilon > 0$ y_2 a 3, devo prendere un L più grande per poter verificare $(**)$; quindi non trovo un valore definitivo per L.

- Adesso cerchiamo le soluzioni

- Sol. stazionarie

$$\sqrt[3]{y-3} = 0 \iff \boxed{y(t) \equiv 3}$$

$\longrightarrow$ verifica il dato $\Rightarrow$ è soluzione.

- Separazione delle variabili

$$\int_3^y (z-3)^{-1/3}\, dz = \int_0^t \left(3s + \frac{3}{2}\cos s\right) ds$$

$$\left[\frac{3}{2}\sqrt[3]{(z-3)^2}\right]_3^y = \left[\frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{2}\sin t\right]_0^t$$

$$\cancel{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{(y-3)^2} = \cancel{\frac{3}{2}}\left(t^2 + \sin t\right)$$

$$(y-3)^2 = (t^2 + \sin t)^3$$

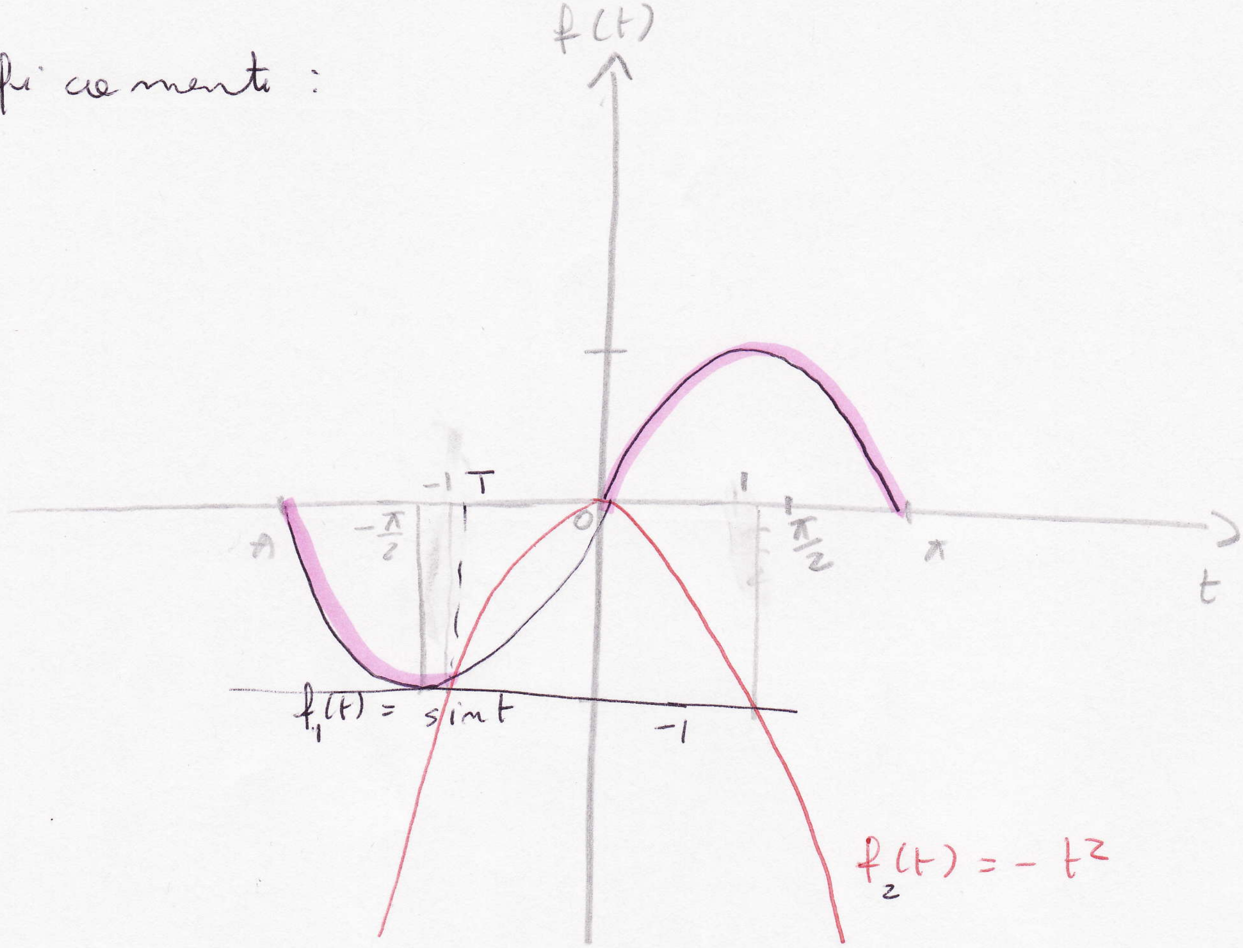
$\longrightarrow$ discuto l'intervallo di esistenza per t.

$(y-3)^2 \geq 0$ quindi deve essere

$t^2 + \sin t \geq 0$

$\Rightarrow \sin t > -t^2$

graficamente :



Oss $\quad -t^2 = -1 \iff t^2 = 1 \iff t = \pm 1$

quindi f_2 interseca $y \equiv -1$ per $t = \pm 1$

dato che $-\frac{\pi}{2} < -1$ abbiamo $-\frac{\pi}{2} < T < 0$

e $-1 < f(T) < 0$

voglio $f_1 \geq f_2$: vero $\forall t \leq T$, e $\forall t \geq 0$.

Dato che $t_0 = 0$, scelgo solo $t \geq 0$.

e ricavo

$$y(t) = (t^2 + \sin t)^{3/2} + 3$$

Posso definire

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} (t^2+\sin t)^{3/2} + 3 & t \geq 0 \\ 3 & t \leq 0 \end{cases}}$$

Oss. $\lim_{t\to 0^-} y(t) = 3 = \lim_{t\to 0^+} y(t)$

$\lim_{t\to 0^-} y'(t) = 0 = \lim_{t\to 0^+} y'(t)$

con $y'(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}(t^2+\sin t)^{1/2}(2t+\cos t) & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$

→ ho trovato un'altra sol. C^1 definito su ~~tutta tutto~~ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Proviamo ora a risolvere

$$\begin{cases} y' = \left(3t + \frac{3}{2}\cos t\right)\sqrt[3]{y-3} \\ y(\bar{t}) = 3 \qquad\qquad \bar{t} > 0 \end{cases}$$

Usando la sep. delle variabili otteniamo

$$\int_3^y (z-3)^{1/3}\,dz = \int_{\bar{t}}^t \left(3s + \frac{3}{2}\cos s\right) ds$$

che porta a :

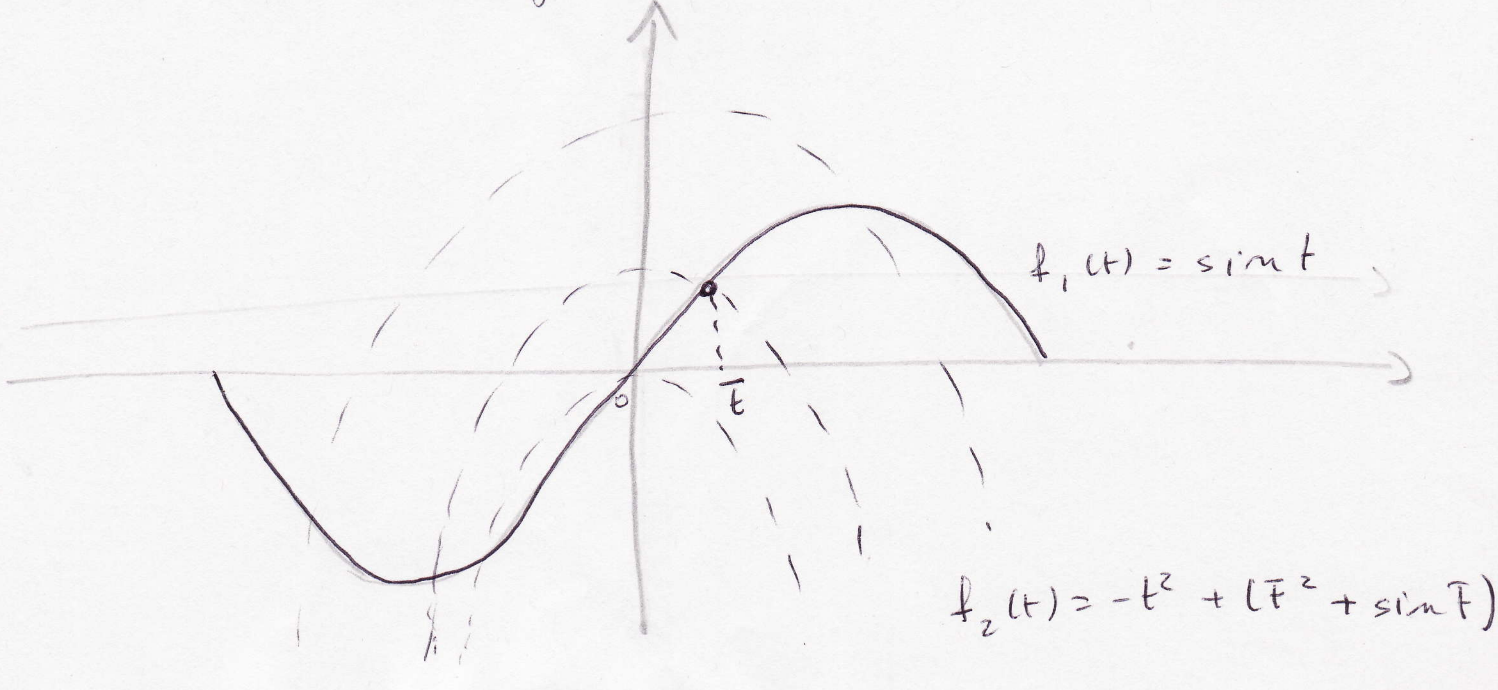
$$(y-3)^2 = \left(t^2 + \sin t - \bar{t}^2 - \sin \bar{t}\right)^3$$

ora devo discutere

$$\sin t \geq -t^2 + \left(\bar{t}^2 + \sin \bar{t}\right)$$

<u>Nota</u> : se $\bar{t} \geq 0$
$\bar{t}^2 + \sin \bar{t} \geq 0$

~~Allora~~ Lo studio grafico diventa



$\to$ quindi la condizione è certamente verificata $\forall\ t > \bar{t}$.

Posso quindi definire

$$y(t) = \begin{cases} \left(t^2 + \sin t - \bar{t}^2 - \sin \bar{t}\right)^{3/2} + 3 & t \geq \bar{t} \\ 3 & t \leq \bar{t} \end{cases}$$

Nota questa $y(t)$ verifica $y(0) = 0$

e dimostrare che

$$\lim_{t \to \bar{t}^-} y(t) = 3 = \lim_{t \to \bar{t}^+} y(t)$$

e

$$\lim_{t \to \bar{t}^-} y'(t) = 0 = \lim_{t \to \bar{t}^+} y'(t)$$

$\to$ soluzione C^1 definita $\forall\ t \in \mathbb{R}$.

$\to \forall \bar{t} > 0$, trovo una sol. C^1 del probl. di partenza.

<u>Domanda</u> : che succede per $\bar{t} < 0$?

(devo distinguere $\bar{t} < T$, $T < \bar{t} < 0$).