Esercizio 4 p. 150

Data la sup. $S: x^2 - y^2 - z^2 = 1$

(a) si determinino eventuali p.ti singolari

(b) si calcoli l'eq. del piano tg. in $P = (\sqrt{3}, 1, 1)$

(c) si trovi una rapp. parametrica, non cartesiana, e in tale rappresentazione si calcoli il versore normale ~~modulo del prodotto vettore~~.

(a) La superficie è data da

$$F(x,y,z) = x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$$

cioè come insieme di livello di $F: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$F \in C^1$

in particolare $\nabla F = (2x, -2y, -2z) = 0$

$$\Leftrightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

ma $(0,0,0) \notin S$ quindi non ci sono p.ti singolari

(b) Piano tg. in $P = (x_0, y_0, z_0)$

$$F_x\Big|_P (x - x_0) + F_y\Big|_P (y - y_0) + F_z\Big|_P (z - z_0) = 0$$

$$2\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) - 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0$$

$$\boxed{\sqrt{3}x - y - z - 1 = 0}$$

(c)
Cerco

$$x(u,v) = \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

t/c $x^2 - y^2 - z^2 = 1$

<u>Noto</u> $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \qquad \cos^2 v + \sin^2 v = 1$

$\Rightarrow \cosh^2 u - \sinh^2 u \left(\cos^2 v + \sin^2 v \right) = 1$

$\Rightarrow \cosh^2 u - \sinh^2 u \cos^2 v - \sinh^2 u \sin^2 v = 1$

$$x : \begin{cases} x = \cosh u \\ y = \sinh u \cos v \\ z = \sinh u \sin v \end{cases}$$

Devo calcolare $x_u \wedge x_v / \| x_u \wedge x_v \| = n$

$$x_u \wedge x_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sinh u & \cosh u \cos v & \cosh u \sin v \\ 0 & -\sinh u \sin v & \sinh u \cos v \end{vmatrix} =$$

$= i \left(\cosh u \sinh u \left(\cos^2 v + \sin^2 v \right) \right) +$

$- j \left(\sinh^2 u \cos v \right) - k \left(\sinh^2 u \sin v \right)$

$$\Rightarrow x_u \wedge x_v =$$

$$= \left(\cosh u \sinh u \,, -\sinh^2 u \cos v \,, -\sinh^2 u \sin v \right)$$

$$\| x_u \wedge x_v \| = \sqrt{\cosh^2 u \sinh^2 u + \sinh^4 u \left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)} =$$

$$= \sqrt{\sinh^2 u \left(\cosh^2 u + \sinh^2 u\right)} = |\sinh u| \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}.$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{|\sinh u| \sqrt{\cosh^2 u + \sinh^2 u}} \left(\cosh u \sinh u \,, -\sinh^2 u \cos v \,, -\sinh^2 u \sin v \right)$$

Esercizio 4 p. 165

Si calcoli l'integrale

$$\iint_\Sigma \frac{x}{\sqrt{4z+1}}\, d\sigma$$

dove Σ è la porzione di superficie

di equazione $z = x^2 + y^2$

che si proietta in

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y^2 - y \leq 0 \ ; \ y \geq \tfrac{1}{2} \text{ oppure } x \geq 0\}$$

la superficie è data in forma cartesiana

$$z = f(x,y)$$

$$\Rightarrow d\sigma = \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2}\, dx\, dy$$

$$\nabla f = (2x, 2y) \Rightarrow \|\nabla f\|^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\Rightarrow d\sigma = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

$$\iint_\Sigma g(x,y,z)\, d\sigma = \iint_T g(x,y,f(x,y))\, d\sigma\, dx\, dy$$

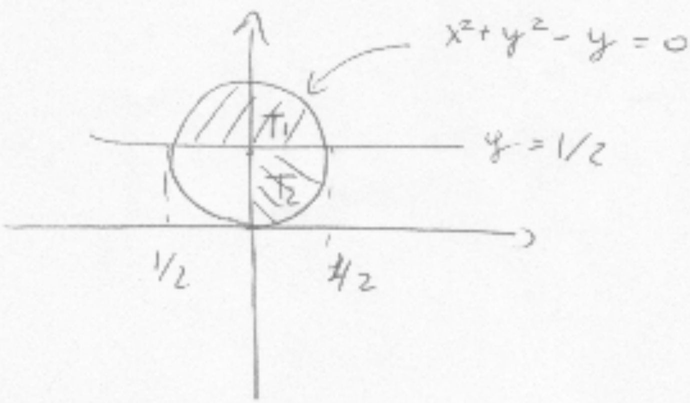
$\longrightarrow$ devo capire come è fatto T:

$x^2 + y^2 - y = 0 \longrightarrow$ circ. centro $(0, \frac{1}{2})$ raggio $1/2$

$\Downarrow$

$x = \pm\sqrt{y - y^2}$

$y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x^2}}{2}$



$$\iint_\Sigma \frac{x}{\sqrt{4z+1}}\, d\sigma = \iint_{T_1 \cup T_2} \frac{x}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\; dx\, dy =$$

$$\iint_{T_1} x\, dx\, dy = \int_{-1/2}^{1/2} x \left(\int_{1/2}^{\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2}} dy \right) dx =$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} x \left[\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2} - \frac{1}{2} \right] dx = \cancel{\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{(1-4x^2)^{3/2}}{4} \right|_{-1/2}^{1/2}} = \cancel{0}$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} x\sqrt{1-4x^2}\; dx = \left[\frac{2}{3}(1-4x^2)^{3/2} (-1/8) \right]_{-1/2}^{1/2} = 0$$

$\longrightarrow$ potevo capirlo anche dal fatto che

x dispari

T_1 simmetrico.

$$\iint_{T_2} x\, dx\, dy = \int_0^{1/2} \int_0^{\sqrt{y-y^2}} x\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\sqrt{y-y^2}} dy = \int_0^{1/2} \frac{y-y^2}{2}\, dy =$$

$$= \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6} \right]_0^{1/2} = \frac{1}{16} - \frac{1}{48} = \frac{3-1}{48} = \frac{1}{24}$$

Esercizio Si calcoli la massa della superficie S di densità superficiale

$$\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$$

con S: $\quad r(u,v) = u\cos v\, i + u \sin v\, j + v\, k$

$$(u,v) \in T = [0,1] \times [0, 2\pi]$$

$\rightarrow$ elicoide

$$dm = \delta(x,y,z)\, d\sigma$$

$$\Rightarrow m = \iint_{\Sigma} \sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma = \iint_{T} \delta(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|r_u \wedge r_v\|\, du\, dv$$

con $\delta(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u^2\cos^2 v + u^2 \sin^2 v)^{1/2}$

$$= \sqrt{u^2} = u$$

(prendo $+u$ xchè ~~massa~~ quantità fisica)

$r_u = (\cos v, \sin v, 0)$

$r_v = (-u\sin v, u\cos v, 1)$

$r_u \wedge r_v = (\sin v, -\cos v, u)$

$\|r_u \wedge r_v\| = \sqrt{1+u^2}$

$$\Rightarrow m = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\, du\right) dv = 2\pi\left[\frac{1}{3}(1+u^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$$