Esercizio 6 p. 180

Sia γ una curva chiusa semplice e regolare, orientata positivamente, di equazione polare

$$\rho = f(\theta) \qquad \theta \in [\theta_0, \theta_1].$$

Se γ è frontiera di D si dimostri che

$$a(D) = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} [f(\theta)^2] \, d\theta$$

→ Si calcoli l'area racchiusa dalla cardioide di equazione

$$\rho = 1 + \cos\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Sappiamo (Teorema di Gauss-Green / formula dell'area)

che $$a(D) = \iint_D dx\,dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma = \partial^+ D} (-y\,dx + x\,dy)$$

Voglio usare quest'integrale per calcolare l'area

~~Essendo~~ Ho γ in forma polare
→ posso in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -\rho \sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\rho \\ dy = \rho \cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Q}(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma \{-\rho\sin\theta\,(-\rho\sin\theta\, d\theta + \cos\theta\, d\rho) +$$

$$+ \rho\cos\theta\,(\rho\cos\theta\, d\theta + \sin\theta\, d\rho)\} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\gamma (+\rho^2\sin^2\theta\, d\theta - \cos\theta\sin\theta\, d\rho +$$

$$+ \rho^2\cos^2\theta\, d\theta + \cos\theta\sin\theta\, d\rho) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\gamma \rho^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho^2\, d\theta$$

Nel caso $\rho = f(\theta)$

$$\mathcal{Q}(D) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{1} [f(\theta)]^2\, d\theta$$

Per il cardioide:

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta =$$

$$= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

Esercizio p. 193 n 6

Dato il vettore $\overline{F}(x, y, z) = (z, x, y)$

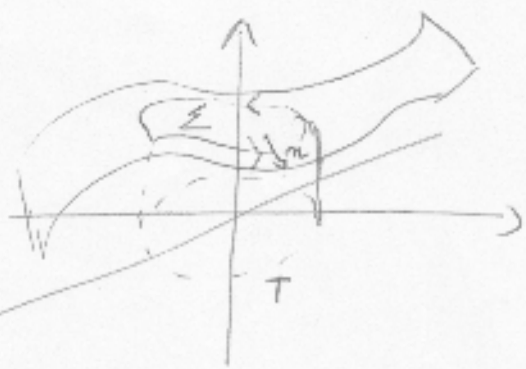
si calcoli il flusso di rot $\overline{F}$ attraverso la porzione di superficie Σ di equazione $z = xy$ che si proietta in $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1\}$

orientata in modo che n abbia la terza componente non negativa.

Si verifichi il risultato trasformando l'integrale doppio in un int. curvilineo.

Voglio usare il teo. di Stokes:

$$\iint_{\Sigma} \langle \text{rot}\,\overline{F}, n \rangle \, d\sigma = \int_{\partial^+\Sigma} \langle \overline{F}, T \rangle \, ds$$



Per verificarlo:

- Calcolo $\iint_{\Sigma} \langle \text{rot}\, \bar{F}, n \rangle \, d\sigma$

$$\text{rot}\, \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = i + j + k$$

Σ è data da $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = xy \end{cases}$ $\quad (x, y) \in T$

$n = r_x \wedge r_y$

$$\Rightarrow \langle \text{rot}\, \bar{F}, n \rangle = \langle \text{rot}\, \bar{F}, r_x \wedge r_y \rangle = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= -y - x + 1$$

$$\Rightarrow \iint_{\Sigma} \langle \text{rot}\, \bar{F}, n \rangle \, d\sigma = \iint_T (-y - x + 1) \, dx \, dy =$$

$$= \underbrace{\iint_T dx \, dy}_{a(T) = \pi} - \underbrace{\iint_T (y + x) \, dx \, dy}_{\text{dispari su dom. simm.} = 0} = \boxed{\pi}$$

(3)

• Calcolo $\int_{\partial^+\Sigma} \langle \bar{F}, T \rangle ds =$

$$= \int_0^{2\pi} \langle \bar{F}(r(t)), r'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t \cos t, \cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, \cos^2 t - \sin^2 t)^T dt = (*)$$

Dove ho usato:

$$r(t): \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = xy = \sin t \cos t \end{cases} \qquad r'(t): \begin{cases} x' = -\sin t \\ y' = \cos t \\ z' = \cos^2 t - \sin^2 t \end{cases}$$

$$(*) = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t + \cos^2 t + \sin t \cos^2 t - \sin^3 t) \, dt$$

$$-\int_0^{2\pi} \cos t \sin^2 t \, dt = \left[-\frac{\sin^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \left[\cos t \sin t \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 - \cos^2 t \, dt = 2\pi - \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t \, dt = \left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$-\int_0^{2\pi} \sin^3 t \, dt = \underbrace{-\int_0^{2\pi} \sin t \, dt}_{=0} + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t \, dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_{\partial^+\Sigma} \langle \bar{F}, T \rangle \, ds = \boxed{\pi}$$

$\longrightarrow$ Abbiamo verificato il teo. di Stokes

Esercizio p. 185 n 14

Si calcoli il flusso del campo

$$\bar{F}(x,y,z) = y e^{x+y}\, i - x e^{x+y}\, j + xy\, k$$

uscente dalla superficie del solido

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, |y| \le x \le 2 - |y| \,;\, 0 \le z \le x+y\}$$

Il flusso di $\bar{F}$ uscente da S è

$$\iint_{\partial^+ S} \langle \bar{F}, n \rangle \, d\sigma$$

Il Teorema di Gauss ci dice che

$$\iint_{\partial^+ S} \langle \bar{F}, n \rangle \, d\sigma = \iiint_S \operatorname{div} \bar{F} \, dx\,dy\,dz$$

Calcolo $\iiint_S \operatorname{div} \bar{F} \, dx\,dy\,dz$

$$\bar{F} = (y e^{x+y}, -x e^{x+y}, xy)$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(y e^{x+y}) + \frac{\partial}{\partial y}(-x e^{x+y}) + \frac{\partial}{\partial z}(xy) =$$

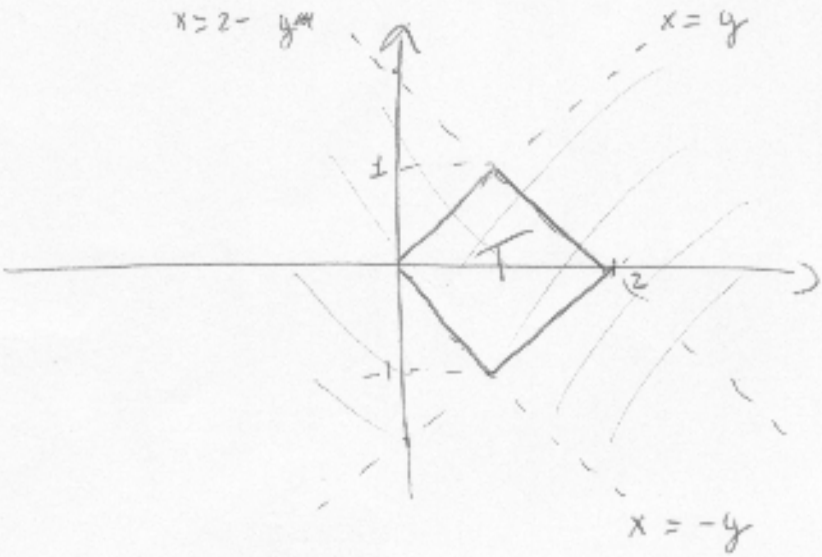
$$= y e^{x+y} - x e^{x+y} =$$

$$= (y-x) e^{x+y}$$

$$\iiint_S (y-x)\, e^{x+y}\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iint_T \left((y-x)\, e^{x+y} \cancel{dx\,dy} \int_0^{x+y} dz \right) dx\, dy \;=\; *$$

$$T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |y| \le x \le 2 - |y| \}$$



$$* = \iint_T (y-x)\, e^{x+y} \left(z \right)\Big|_0^{x+y} dx\, dy =$$

$$= \iint_T (y^2 - x^2)\, e^{x+y}\, dx\, dy$$

Usiamo la sostituzione

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$(y^2 - x^2)\, e^{x+y} \Rightarrow u\, v\, e^{u}$$

<u>Nota</u> $|y| \le x \le 2 - |y|$

per $y \geq 0 \Rightarrow y \le x \le 2 - y$

$\Rightarrow x - y \geq 0$

$x + y \le 2$

per $y \le 0 \Rightarrow -y \le x \le 2 + y$

$\Rightarrow x + y \geq 0$

$x - y \le 2$

$\Rightarrow \quad 0 \le x + y \le 2 \qquad \Rightarrow 0 \le u \le 2, \quad 0 \le v \le 2$

$0 \le x - y \le 2$

Quindi devo calcolare

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 \int_0^2 u\, v\, e^{u}\, du\, dv = -\frac{1}{2}\left(\int_0^2 v\, dv\right)\left(\int_0^2 u\, e^{u}\, du\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^2 \left(\left[u e^{u}\right]_0^2 - \int_0^2 e^{u}\, du\right) =$$

$$= -e^2 - 1$$