SUCCESSIONI DI FUNZIONI: LA CONVERGENZA UNIFORME

$B(I)$

Consideriamo l'insieme delle funzioni reali e limitate definite nell'intervallo $I=(a,b)$. Si verifica facilmente che tale insieme costituisce uno spazio vettoriale. Su tale spazio vettoriale possiamo considerare la norma:

$$\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

(si verifichi che si tratta di una norma).

Tale norma ha un ruolo molto rilevante nella Matematica Applicata. Si noti inoltre che per tale norma vale la proprietà aggiuntiva (facilmente dimostrabile) che $\forall f, g \in B(I)$

$$\|f\,g\| \le \|f\|\,\|g\|.$$

Vediamo a cosa corrisponde un intorno di raggio $\varepsilon>0$ di un elemento:

Data $f\in B(I)$, $\forall \varepsilon>0$ consideriamo tutte le $g\in B(I)$ t.c. $\|f-g\|<\varepsilon$, ovvero

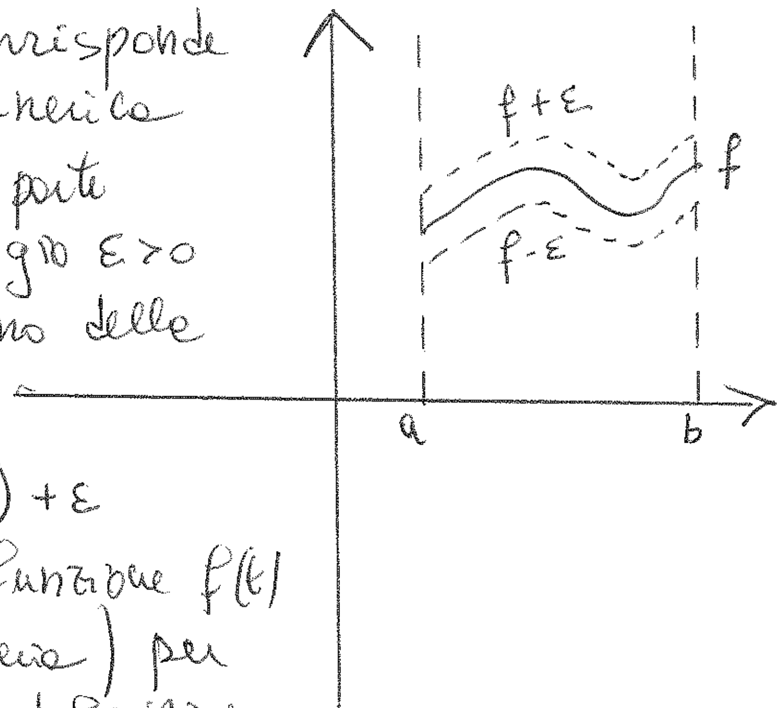
$$\sup_{t\in I} |f(t)-g(t)| < \varepsilon$$

vale a dire $\forall t\in I$:

$$-\varepsilon < f(t) - g(t) < +\varepsilon$$

e, quindi (cambiando segno e sommando $f(t)$ ai tre membri):

$$f(t) - \varepsilon < g(t) < f(t) + \varepsilon \quad \forall t \in I.$$



Graficamente ciò corrisponde a imporre che la generica funzione g che fa parte dell'intorno di raggio $\varepsilon > 0$ di f stia all'interno della "strada" delimitata da $f(t) - \varepsilon$ e $f(t) + \varepsilon$ (che ha quindi la funzione $f(t)$ come linea di mezzeria) per tutto l'intervallo di definizione $I = (a, b)$.

Si noti che in figura è stato riportato il caso in cui f sia continua, ma ciò vale ovviamente per ogni f definita e limitata in I. ~~La funzione g(t) non dovrà essere~~

ESEMPIO. Sia $f(x) = x$ per $x \in (0, 2\pi)$ e sia $\varepsilon = 1/5$. Allora la funzione $g(x) = x + \frac{1}{10} \operatorname{sen}(x)$ sta nell'intorno di raggio ε della funzione $f(x)$ su tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$.

Passiamo ora alla convergenza di una successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

DEF. (convergenza puntuale)
Diremo che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ limitata in I, converge puntualmente nel punto $t_0\in I$ se $\exists\, l\in\mathbb{R}$:

$$\exists \lim_{n\to\infty} f_n(t_0) = l.$$

Diremo che $\{f_n\}$ converge puntualmente in I se la convergenza è verificata $\forall t_0\in I$, ovvero se $\exists\, f : I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ ~~[illegible]~~
t.c. $\forall t\in I$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t).$$

Per indicare tale convergenza useremo anche il simbolo

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{in } I.$$

DEF. (Convergenza uniforme)
Diremo che la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ limitata in I, converge uniformemente alla funzione f in I,

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, se

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0,$$ dove

$\| \cdot \|$ indica la norma del sup nell'intervallo I,

$$\| f_n - f \| = \sup_{x \in I} | f_n(x) - f(x) |.$$

Per indicare tale convergenza useremo anche il simbolo

$$f_n \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} f \quad \text{in } I.$$

Può essere ~~...~~ istruttivo riscrivere le due definizioni di convergenza ~~appena~~ mediante l'uso dei quantificatori $\forall$ ed $\exists$.

a) Conv. puntuale di $\{f_n\}$ ad f in I:

$\forall \varepsilon > 0, \forall t \in I, \ \exists N = N(\varepsilon; t) > 0$ t.c.

$\forall n > N \implies |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon.$

b) Conv. uniforme di $\{f_n\}$ ad f in I:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) > 0$ t.c.

$\forall n > N \implies |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I.$

E' perciò mutato l'ordine dei quantificatori ed N dipende solo da ε nel caso della convergenza uniforme.

E' evidente che la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale. Non vale il viceversa, come si prova attraverso il controesempio seguente

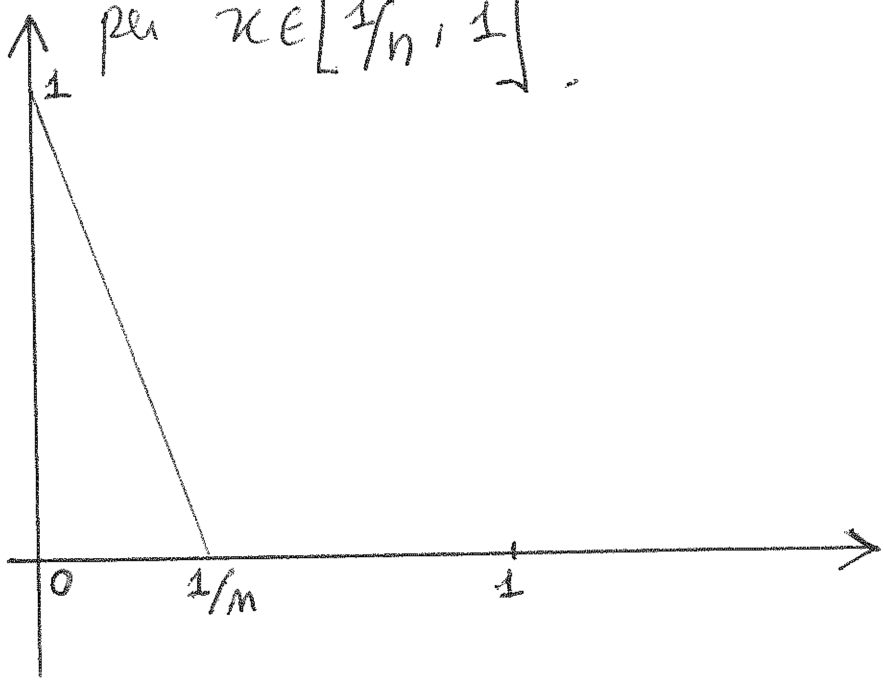
ESEMPIO

Sia $I = [0,1]$ e si consideri la successione $\{f_n\}$ così definita

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 - nx & \text{per } x \in [0, 1/n) \\ 0 & \text{per } x \in [1/n, 1] . \end{cases}$$

Tale successione converge puntualmente alla ~~successione~~ funzione

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Risulta però

$$\sup_{0 \le t \le 1} |f_n(t) - f(t)| = 1 = \sup_{0 < t \le 1} |f_n(t) - f(t)| =$$

$$= \sup_{0 < t \le 1} |f_n(t)|$$

per cui la convergenza non è uniforme.

TEOREMA 1

Sia data la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in C(I)$, $f_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I intervallo,
e supponiamo che $f_n \rightrightarrows f$ in I.
Allora $f \in C(I)$, ovvero limite uniforme di una successione di funzioni continue è ~~continua~~ una funzione continua: lo spazio delle funzioni continue definite su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e dotato della norma del sup è uno spazio di Banach.

TEOREMA 2 (scambio dei limiti)

Sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite in un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e uniformemente convergente alla funzione $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Sia $t_0 \in \bar{I}$ (chiusura dell'intervallo I)
e supponiamo che $\forall n \in \mathbb{N}$ fissato,

$$\exists \lim_{t \to t_0} f_n(t) = l_n \in \mathbb{R}.$$

Allora
① $\exists \lim_{n \to \infty} l_n$
② $\exists \lim_{t \to t_0} f(t)$
e questi due limiti coincidono:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\lim_{t \to t_0} f_n(t)\right) = \lim_{t \to t_0}\left(\lim_{n \to \infty} f_n(t)\right).$$

TEOREMA 3

Sia data la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, f_n funzione limitata definita sull'intervallo I,

$$f_n : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

e supponiamo che $f_n \rightrightarrows f$ in I.

Allora f è una funzione limitata definita sull'intervallo I: lo spazio delle funzioni limitate definite su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e dotato della norma del sup è uno ~~spazio~~ spazio di Banach.

TEOREMA 4 (scambio limite e derivata)

Sia data una successione di funzioni $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$f_n : (a,b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

f_n derivabili. Supponiamo che

a) la successione $\{f_n'\}$ converge uniformemente in (a,b) con limite g;

b) la successione delle funzioni $\{f_n\}$ converge almeno in un punto $t_0 \in (a,b)$.

Allora anche la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in (a,b).

Sia f il suo limite: allora f è derivabile e $f' \equiv g$, ovvero

$$\lim_{n\to\infty}\left(D f_n(t)\right) \equiv D\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\right).$$

TEOREMA 5

Lo spazio $C^1([a,b])$ delle funzioni continue e dotate di derivata prima continua nell'intervallo $[a,b]$, su cui consideriamo la norma

$$\|f\|_1 = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$$
$$= \|f\| + \|f'\|$$

è uno spazio di Banach.

TEOREMA 6 (Scambio limite e integrale).

Sia data la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in R(a,b)$ successione di funzioni limitate e integrabili secondo Riemann nell'intervallo (a,b) e supponiamo che

$$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f .$$

Allora f è una funzione limitata e integrabile in (a,b), $f\in R(a,b)$ e si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$$

Uno dei problemi che si pongono più frequentemente in Analisi Matematica riguarda la possibilità di approssimare uniformemente una funzione assegnata mediante funzioni di tipo particolare. Ad esempio, presa una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$ e fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, è possibile trovare un polinomio p tale che $\|f-p\| < \varepsilon$? La risposta è affermativa, come dice un celebre teorema dovuto a Weierstrass:

<u>TEOREMA DI WEIRSTRASS</u> (sull'approssimazione delle funzioni continue).

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

Esiste allora una successione $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di polinomi tale che

$$p_n \xrightarrow[n\to\infty]{\longrightarrow} f \quad \text{in } [a,b],$$

ovvero il sottospazio vettoriale dei polinomi è <u>denso</u> in $C^0([a,b])$.

Si noti che il modo di approssimare ~~ora~~ appena introdotto è ben diverso dall'approssimazione ottenuta con la formula di Taylor: quella di Taylor era un'approssimazione LOCALE (nell'intorno di un punto), questa è GLOBALE (su tutto l'intervallo).