Introduzione alle

Equazioni Differenziali

per le Facoltà di Ingegneria

Bruno Rubino

Versione preliminare

L'Aquila, 2004

Indice

1 Introduzione

Il concetto di equazione differenziale è presente in vari contesti sia teorici che applicativi. Negli studi di uno studente della Facoltà di Ingegneria diviene fondamentale in molte di quelle discipline che elaborano modelli di tipo continuo. La prima di queste discipline, comune a tutti i vari corsi di studio, è la Fisica Generale.

Come dice il termine stesso, si tratta di equazioni la cui incognita è una funzione (di una variabile) che compare all'interno dell'equazione stessa insieme ad alcune sue derivate fino ad un certo ordine: l'ordine massimo delle derivate che vi figurano si dirà *ordine dell'equazione differenziale*. Prima di introdurre la terminologia di base, accenniamo ora ad alcuni esempi già noti per rivisitarli nell'ambito delle equazioni differenziali.

Esempio 1.1 [Primitive di una funzione]
Trattando la teoria dell'integrazione ad Analisi Matematica 1 il seguente problema è risultato fondamentale:

Data $f = f(t)$ funzione nota, trovare $y = y(t)$ funzione incognita tale che $y'(t) = f(t)$.

Tale problema è stato poi risolto con l'introduzione dell'integrazione indefinita: si è allora trovato che, se per esempio f è continua, tutte le primitive differiranno per una costante.

In particolare, se si prende in considerazione il problema

$$\begin{cases} y' = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

dove $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è una funzione sull'intervallo I e $t_0 \in I$, allora vi è un'unica soluzione data da

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s)\, ds. \tag{1.2}$$

A tal proposito si riveda il teorema fondamentale del calcolo integrale. ■

Esempio 1.2 [Esponenziale]

Consideriamo il seguente problema: trovare tutte le funzioni che verificano la proprietà di avere come derivata la funzione stessa e che in $t_0 = 0$ valgono 1, vale a dire

$$\begin{cases} y' = y, \\ y_0 = 1, \end{cases} \tag{1.3}$$

L'unica soluzione di tale problema è la funzione esponenziale

$$y(t) = e^t, \ t \in \mathbb{R};$$

anzi, si potrebbe dire per definizione (formale) che la funzione esponenziale e^t è l'unica soluzione del problema (1.3).

Tale problema può essere generalizzato chiedendo di trovare tutte le funzioni che verificano la proprietà di avere come propria derivata k-volte la funzione stessa ($k \in \mathbb{R}$ costante) e che all'istante t_0 valgono $y_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} y' = ky, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.4}$$

In tal caso l'unica soluzione è data da

$$y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)}, \ t \in \mathbb{R}$$

anche se la risposta è meno intuitiva (con alcuni passaggi ci si può ricondurre al problema (1.3)). ■

Esempio 1.3 [Equazione di Newton]

Nel corso di Fisica Generale 1, quando si affronta lo studio della Dinamica, vengono formulati vari modelli per i quali la forza agente su un punto materiale di massa m dipende dalla posizione e dalla velocità del punto materiale oltre che da eventuali azioni esterne funzioni del tempo: se $x = x(t)$ è l'equazione di moto (incognita), l'equazione di Newton è del tipo

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}),$$

dove F è la risultante di tutte le forze esterne agenti. Abbiamo qui indicato, seguendo la consuetudine della notazioni della Fisica, con $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ rispettivamente la derivata prima (velocità) e la derivata seconda (accelerazione) della funzione $x = x(t)$.

Dalla Fisica si sa che, allora, il moto è completamente noto se si conoscono la posizione iniziale x_0 e la velocità iniziale v_0. E questo avverrà sia nel caso di moto uno–dimensionale che nel caso più generale di moto multi–dimensionale. Abbiamo cioè che il problema

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}) \\ x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

in base a quanto è noto sperimentalmente dalla Fisica, ha un'unica soluzione. Solitamente nei corsi di Fisica non vengono precisate le ipotesi sotto cui vale il risultato di esistenza ed unicità precedente. Vedremo nel seguito delle ipotesi opportune per essere certi di ottenere tale risultato.

Si osservi che rientrano nel modello generale (1.5) i vari casi del moto di un pendolo e quelli della molla elastica (con o senza attrito viscoso). ■

1.1 Linguaggio, notazioni e definizioni fondamentali

Sia data una funzione

$$F : A \subset \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad A \text{ aperto}$$

e consideriamo l'equazione

$$F(t, y, y', \ \dots \ , y^{(n)}) = 0. \tag{1.6}$$

Diremo che tale equazione è un'equazione differenziale di ordine n nell'incognita $y = y(t)$.

A questo livello non è necessario fissare delle ipotesi di regolarità sulla F. Quello che però più ci interessa è il caso in cui la (1.6) può essere scritta in forma normale, vale a dire quando è possibile esplicitare (almeno localmente) la derivata di ordine massimo e scrivere

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}\right), \tag{1.7}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto.

Qui, come nella (1.6), abbiamo indicato con $y^{(k)}$ la derivata di ordine k mentre abbiamo usato la lettera t per la variabile indipendente.

L'equazione (1.7) si dice *equazione differenziale di ordine n in forma normale.*

Esempio 1.4 Partendo dal problema

$$\begin{cases} y^2 + (y')^2 - 1 = 0, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

si possono ottenere i seguenti due problemi la cui equazione è scritta in forma normale:

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1 - y^2}, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

e

$$\begin{cases} y' = -\sqrt{1-y^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Per scegliere quale dei due problemi è quello che ci interessa bisognerebbe sapere se all'istante iniziale $t_0 = 0$ la soluzione cercata era crescente (problema (1.9), $y' > 0$) o decrescente (problema (1.10), $y' < 0$).

Come si vede, perciò, l'esplicitazione non sempre risulta univoca a meno di informazioni supplementari. ■

Esempio 1.5 Partendo dal problema

$$\begin{cases} ty^2 + te^y y' + \sin(y^2 y') + y' \cos(y') = 0, \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{1.11}$$

ci si convince presto che esplicitare la y' non è un'impresa semplice. Sebbene questo non voglia dire che non si possa esplicitare, l'esempio può essere utile per capire come mai in futuro preferiremo prendere in esame problemi le cui equazioni sono già in forma normale. ■

Nel seguito supporremo sempre che la funzione f dell'equazione (1.7) sia continua rispetto a tutte le sue variabili. Tenuto conto poi di quanto visto negli esempi introduttivi, a tale equazione si affiancano i cosiddetti *dati iniziali*: quello che il più delle volte si prende in esame, anziché la singola equazione (1.7), è il problema

$$\begin{cases} y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ \dots \ , y^{(n-1)}\right), \\ y(t_0) = y_0, \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Tale problema ha senso se $(t_0, y_0, \ \dots \ , y_{n-1}) \in \Omega$.

Il problema (1.12) prende il nome di *problema di Cauchy* associato all'equazione differenziale (1.7).

Perció, ad un'equazione differenziale di ordine n si associa un dato iniziale che è costituito dal valore della funzione e delle derivate fino alla $(n-1)$-esima all'istante iniziale t_0.

Se la f è continua sull'aperto Ω, per ogni insieme chiuso e limitato contenuto dentro Ω sarà anche limitata: dunque una soluzione di (1.12), quando esiste, avrà derivata fino all'ordine n continua fin dove ha senso prenderla in esame, vale a dire finché $(t, y(t), \ \dots \ , y^{(n-1)}(t)) \in \Omega$.

Tuttavia, data una soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy (1.12), fin dove ha senso? Ovviamente dobbiamo considerarla a partire da $t = t_0$ e ciò che si spera è di poter andare avanti e indietro rispetto a tale valore. Ricordiamo che dovrà essere $y^{(n)}$ continua, dunque $y = y(t)$ di classe C^n.

Per chiarire però meglio dove la soluzione si arresta a livello geometrico/visivo, limitiamoci al caso del problema di Cauchy per un'equazione del primo ordine: in tal caso il problema (1.12) diviene

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.13}$$

dove $f : \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, $(t_0, y_0) \in \Omega$, Ω aperto. Sul piano cartesiano riportiamo il dominio Ω e tracciamo la soluzione $y = \bar{y}(t)$ presa in esame per il problema (1.13) (vedremo in seguito che non è detto ve ne sia solo una). Tale soluzione ha senso finché non si arriva sulla frontiera di Ω. La soluzione non può interrompersi all'interno di Ω perché lì la f è continua e limitata, per cui dal punto in cui ci si starebbe fermando si potrebbe ripartire. Allora la soluzione considerata si blocca, sia andando avanti che indietro, quando si raggiunge $\partial\Omega$. Nella Figura 1 si tratta dei punti t_1 e t_2. Diremo che l'intervallo (t_1, t_2) è l'intervallo massimale relativo

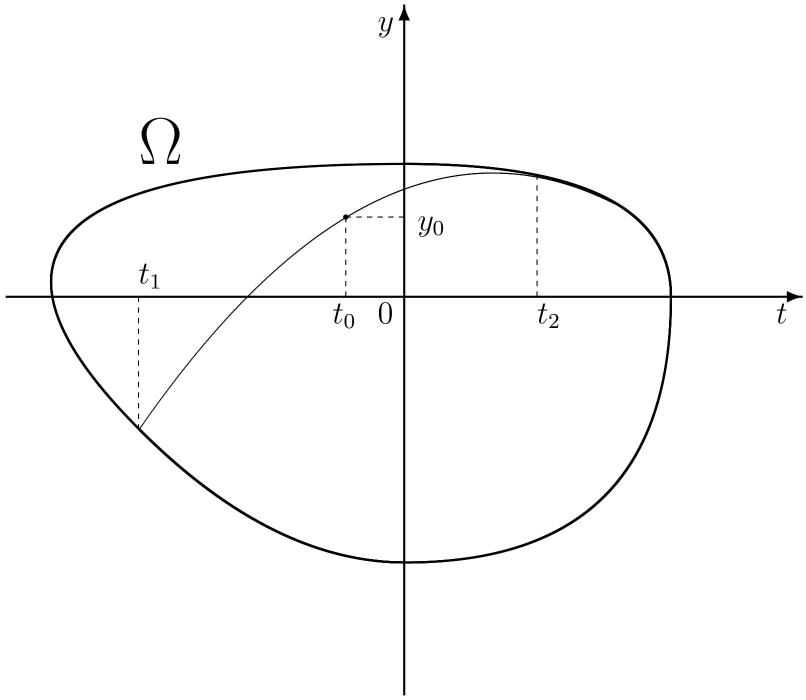

Figura 1: Intervallo massimale di esistenza della soluzione.

alla soluzione $y = \bar{y}(t)$ presa in esame. Si osservi che si tratterà sempre di un intervallo (eventualmente una semiretta o tutta la retta reale) e mai dell'unione di più intervalli e che $t_1 < t_0 < t_2$, vale a dire che (t_1, t_2) è un intorno completo di t_0. Poiché Ω è aperto, (t_1, t_2) deve essere un intervallo aperto.

La definizione di intervallo massimale è analoga nel caso del problema di Cauchy (1.12) relativo alle equazioni di ordine n, ma più complicata da spiegare soprattutto per la difficoltà visiva.

Si osservi che l'intervallo massimale può essere limitato anche quando il dominio di definizione della f fosse tutto $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$. Per capire meglio il problema, facciamo un esempio.

Esempio 1.6 Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1, \\ y(0) = 0, \end{cases} \tag{1.14}$$

ammette la soluzione $y(t) = \tan(t)$, definita per $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Poiché nei punti $t_1 = -\frac{\pi}{2}, t_2 = \frac{\pi}{2}$ vi sono asintoti verticali, l'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è massimale, vale a dire non è possibile estendere ulteriormente la soluzione. Si osservi che in tale esempio $f(t, y) = y^2 + 1$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$: è come se la soluzione toccasse il bordo del dominio di definizione nei punti all'infinito verso cui si dirigono i due asintoti. Diremo che in $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ e $t_2 = \frac{\pi}{2}$ vi è *blow up* ("esplosione") della soluzione.

Tutte le volte in cui non vi è *blow up* né in t_1 né in t_2 si dice che la soluzione è globale. Si osservi che questo non accade soltanto nel caso in cui $(t_1, t_2) \equiv \mathbb{R}$ ma dipende dal dominio Ω: per esempio, se $\Omega = (-1, 2) \times \mathbb{R}$, allora una soluzione definita in $(t_1, t_2) \equiv (-1, 2)$ è globale. È facile pensare ad ulteriori situazioni in cui vi è esistenza globale utilizzando la definizione di intervallo massimale.

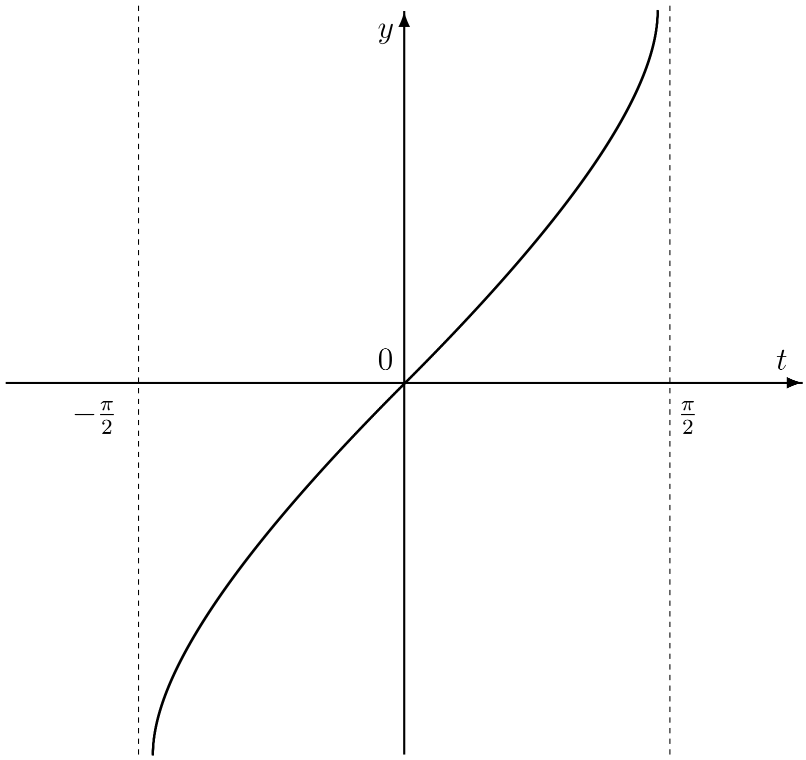

Figura 2: Grafico della soluzione del problema di Cauchy (1.14).

Si tratterà nel seguito di esaminare sia il problema dell'esistenza ed unicità sia il problema di determinare la soluzione. ■

1.2 Esistenza e unicità locale

Limitiamoci – per il momento – al caso di equazioni differenziali del primo ordine in dimensione uno, cioé $y \in \mathbb{R}$.

Il problema dell'unicità della soluzione del problema di Cauchy, e prima ancora quello dell'esistenza, anche in questo caso è non banale.

È ovvio che il primo problema è quello dell'esistenza di una qualche soluzione. Ad assicurarci che sotto certe ipotesi almeno questo è garantito, vi è un famoso **Teorema di esistenza locale**.

Teorema 1.7 (Teorema di Peano)
Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.15}$$

dove $f : \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua e* $(t_0, y_0) \in \Omega$, Ω *aperto.*

Allora il problema di Cauchy ammette (almeno) una soluzione $y = y(t)$ *definita in un intervallo massimale* $I = I(t_0) = (t_1, t_2)$, $t_1 < t_0 < t_2$, *con* $y \in C^1(I)$.

Tale risultato non ci assicura però che la soluzione sia unica. Vedremo con il prossimo **Teorema di esistenza e unicità locale** che, sotto opportune ipotesi, l'unicità è garantita.

Teorema 1.8 (Teorema di Cauchy–Lipschitz)
Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.16}$$

dove $f : \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y \longrightarrow \mathbb{R}$ *è continua e* $(t_0, y_0) \in \Omega$, Ω *aperto.*

Supponiamo inoltre che f ha rapporto incrementale rispetto a y uniformemente limitato (rispetto a t), cioé

$$\exists L > 0 : \left| \frac{f(t, y_2) - f(t, y_1)}{y_2 - y_1} \right| \leq L \tag{1.17}$$

per ogni $(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$, $y_1 \neq y_2$.

Allora il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione $y = y(t)$ definita in un intervallo massimale $I = I(t_0) = (t_1, t_2), t_1 < t_0 < t_2$ con $y \in C^1(I)$.

Tale soluzione è unica in qualunque altro intorno di t_0 contenuto in $I(t_0)$.

Osservazione 1.9 Tenuto conto dei due teoremi appena enunciati, per trovare un esempio di problema di Cauchy (1.13) che ammetta più di una soluzione, bisogna che la f non verifichi la condizione (1.17). Non vuol dire però che tutte le volte in cui la funzione f non verifica la condizione (1.17) siamo in presenza di un problema di Cauchy che ammette più di una soluzione; vuol dire solo che se la (1.17) non è verificata, c'è il rischio che venga a mancare l'unicità. ■

Si osservi ora che le ipotesi del teorema di Cauchy–Lipschitz vanno verificate in un opportuno intorno del dato iniziale e garantiscono l'unicità finché ci si mantiene in tale intorno.

La condizione (1.17) di uniforme limitatezza del rapporto incrementale è verificata quando esiste continua e limitata la derivata parziale della f rispetto ad y. Si sottolinea ancora che l'essere limitata non è obbligatorio su tutto il dominio di definizione naturale della f ma basta che si verifichi in un opportuno intorno del dato iniziale (equivale a limitare lo studio in tale intorno).

Passeremo ora ad esaminare alcune importanti categorie di equazioni differenziali per le quali è possibile calcolare esplicitamente la soluzione:

a) le equazioni differenziali a variabili separabili

b) le equazioni differenziali lineari del primo ordine

c) le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Torneremo successivamente ad approfondire alcuni aspetti, interessanti dal punto di vista generale, delle equazioni differenziali.

1.3 Equazioni differenziali a variabili separabili

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = h(t)g(y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.18}$$

In questo caso la funzione $f(t, y) = h(t)g(y)$ a secondo membro è definita su Ω, intorno del dato iniziale (t_0, y_0), ottenuto come prodotto di un intorno di t_0 per un intorno di y_0. Il secondo membro è in tal caso una funzione prodotto tra una funzione della t ed una della y.

Supporremo che h e g siano continue rispettivamente in un intorno di t_0 e di y_0. Bisognerà poi esaminare se siamo o meno sotto l'ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz: se per esempio la funzione $g \in C^1$, il problema avrà esistenza ed unicità.

Supponiamo esista $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tale che $g(\bar{y}) = 0$. Allora $y(t) \equiv \bar{y}$ risolve l'equazione differenziale del problema di Cauchy (1.18). Se siamo sotto ipotesi di unicità, allora il problema

$$\begin{cases} y' = h(t)g(y), \\ y(t_0) = \bar{y}, \end{cases} \tag{1.19}$$

ha come unica soluzione $y(t) \equiv \bar{y}$.

La soluzione $y(t) \equiv \bar{y}$ si dice *soluzione stazionaria* dell'equazione differenziale.

Supponiamo che $g(y_0) \neq 0$; cerchiamo una soluzione $y = \bar{y}(t)$ del problema (1.18) con il seguente metodo. Dividiamo l'equazione differenziale per $g(y(t))$ e integriamo in (t_0, t) (oppure in (t, t_0) se $t < t_0$):

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\bar{y}'(s)}{g(\bar{y}(s))}\, ds = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds. \tag{1.20}$$

Osserviamo che, poiché

a) g è continua e $g\left(\bar{y}(t_0)\right) \neq 0$,

b) $y = \bar{y}(t)$ è di classe C^1,

allora, per il teorema della permanenza del segno, per valori di t vicini a t_0 il segno di $g(\bar{y}(t))$ è lo stesso di quello di $g(\bar{y}(t_0))$, per cui non si annulla. Di conseguenza i due integrali nella (1.20) hanno perfettamente senso.

Operando il cambio di variabile $z = \bar{y}(s)$, si ottiene

$$\int_{y_0}^{\bar{y}(t)} \frac{dz}{g(z)} = \int_{t_0}^{t} h(s)\, ds \tag{1.21}$$

e il problema è ridotto alla ricerca di una primitiva per $\dfrac{1}{g}$ e per h. Una volta integrato si porrà il problema di esplicitare la soluzione $y = \bar{y}(t)$. Quella così trovata è l'unica soluzione del problema (1.18).

Spesso il problema di stabilire l'intervallo massimale si rivelerà molto delicato, ma affronteremo tale problema direttamente negli esercizi. Vogliamo qui invece accennare subito al problema della mancanza dell'unicità.

Supponiamo che $y(t) \equiv y_0$ sia una soluzione stazionaria di (1.18), vale a dire che $g(y_0) = 0$. Se g verifica le ipotesi richieste dal teorema di Cauchy–Lipschitz potremmo essere certi che si tratta dell'unica soluzione. Ma se supponiamo che g non verifica le ipotesi del teorema di Cauchy–Lipschitz in un intorno di y_0 (supponiamo per esempio che sia soltanto continua), vi potrebbero essere ulteriori soluzioni. Per cercarle non è escluso che si possa adottare la tecnica precedente della separazione di variabili per giungere alla (1.21): se la $\dfrac{1}{g}$ in un intorno di y_0 è integrabile in senso generalizzato (vale a dire se il primo membro di (1.21) ha senso come integrale proprio) si può procedere lo stesso e giungere ad una seconda soluzione! Come vedremo però attraverso l'esempio che segue, non è detto che in tal caso il problema si limita ad avere soltanto le due soluzioni fin qui trovate: a volte un problema di questo tipo dà luogo ad infinite soluzioni!

Esempio 1.10 [Controesempio relativo all'unicità di soluzioni]
Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

La funzione a secondo membro dipende dalla sola y e non da t (in questi casi si dice che è un'*equazione differenziale autonoma*): l'equazione differenziale in particolare è a variabili separabili.

Osserviamo poi che $g(y) = \sqrt{|y|}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ ma non ha rapporto incrementale limitato in un intorno dell'origine, dato che $g'(y) = \dfrac{sgn(y)}{2\sqrt{|y|}}$ che tende all'infinito per $|y| \longrightarrow 0$.

Si osservi che la soluzione stazionaria $y(t) \equiv 0$ risolve il problema di Cauchy (1.22). D'altra parte, finché $y \geq 0$, la funzione a secondo membro è data da $g(y) = \sqrt{y}$ e $\frac{1}{\sqrt{y}}$ è integrabile in senso generalizzato in un intorno (destro) di $y_0 = 0$. Procedendo come nel caso generale, otteniamo

$$\int_0^{y(t)} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^t ds,$$

e integrando

$$2\sqrt{z}\Big|_{z=0}^{z=y(t)} = t,$$

da cui $2\sqrt{y(t)} = t$, che implica $t \geq 0$.

La condizione $t \geq 0$ non è sorprendente, visto che $y' \geq 0$ per cui da $y(0) = 0$ ci dobbiamo aspettare che la soluzione sia non negativa per i valori di $t \geq 0$ (poiché non decrescente).

Dalla relazione precedente abbiamo

$$y(t) = \frac{1}{4}\, t^2 \quad \text{per } t \geq 0.$$

Ma cosa si può dire per $t < 0$? Noi avevamo già la soluzione stazionaria $y(t) \equiv 0$ definita per ogni $t \in \mathbb{R}$. D'altra parte la funzione $y(t) = \frac{1}{4}t^2$ per $t \geq 0$ si raccorda in modo C^1 con la funzione nulla per $t < 0$ (e anche la funzione nulla è soluzione), per cui può essere considerata soluzione la funzione

$$y = y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0, \\ \frac{1}{4}t^2 & \text{se } t \geq 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Abbiamo già trovato due diverse soluzioni del problema di Cauchy (1.22).

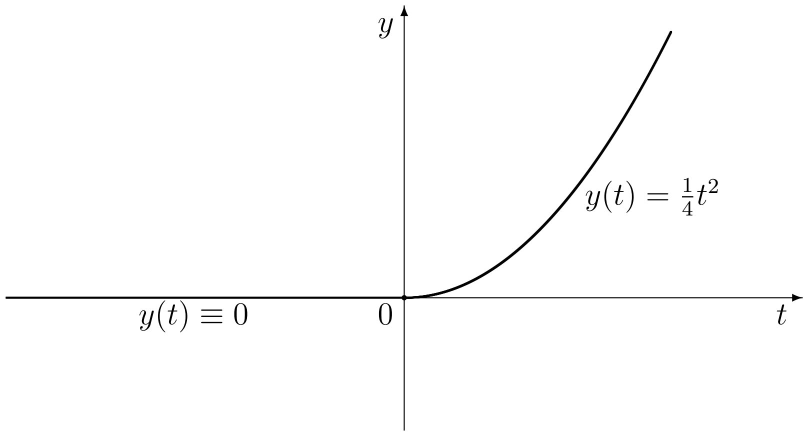

Figura 3: Grafico della soluzione (1.23) per il problema di Cauchy (1.22).

Ciò equivale a dire che per tale problema non vale l'unicità.

Ma la situazione è in realtà ancora più complicata ed il problema di Cauchy preso in considerazione di soluzioni ne ha infinite. Per esempio, si può pensare di prendere come soluzione $y = y(t) \equiv 0$ per $t \leq \bar{t} > 0$ e considerare per $t > \bar{t}$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y}, \\ y(\bar{t}) = 0. \end{cases}$$

a variabili separabili per cui, procedendo come prima,

$$\int_0^{y(t)} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \int_{\bar{t}}^t dx,$$

$$
\begin{aligned}
&2\sqrt{s}\Big|_{s=0}^{s=y(t)} = t-\bar{t},\\
&2\sqrt{y(t)} = t-\bar{t} \quad \text{per} \quad t-\bar{t}\geq 0,\\
&y(t) = \frac{1}{4}(t-\bar{t})^2 \quad \text{per} \quad t\geq \bar{t}.
\end{aligned}
$$

Abbiamo cioè ottenuto la soluzione (ricordare che $\bar{t} > 0$)

$$
y = y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \bar{t}, \\ \frac{1}{4}(t-\bar{t})^2 & \text{se } t \geq \bar{t}. \end{cases} \tag{1.24}
$$

Siamo quindi in presenza di infinite soluzioni, tante quanti i valori $\bar{t} > 0$.

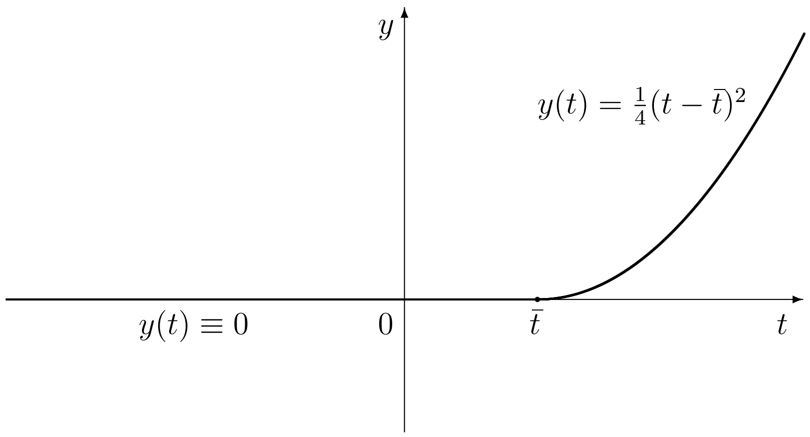

Figura 4: Grafico della soluzione (1.24) per il problema di Cauchy (1.22).

È proprio in base alla forma dell'insieme delle soluzioni fin qui trovate che tale esempio di problema di Cauchy, preso solitamente a modello per la non unicità di soluzione, è noto come *Pennello di Peano.*

Nonostante abbiamo già trovato infinite soluzioni, quelle trovate non sono ancora tutte le soluzioni possibili. Osserviamo che per ogni possibile soluzione $y = y(t)$ vale $y'(t) = \sqrt{y(t)} \geq 0$, cioè la soluzione è crescente. Perciò, così come abbiamo considerato soluzioni del tipo (1.24) partendo da dati iniziali $y(\bar{t}) = 0$ e procedendo con il metodo di separazione delle variabili a destra dell'istante iniziale, potremmo procedere considerando come soluzione $y = y(t) \equiv 0$ per $t > \bar{t} < 0$ e procedendo con il metodo di separazione di variabili a sinistra dell'istante $\bar{t} < 0$, risolvendo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{-y}, \\ y(\bar{t}) = 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{y(t)} \frac{dz}{\sqrt{-z}} = \int_{\bar{t}}^t ds,$$
$$-2\sqrt{-y(t)} = t - \bar{t},$$
$$\sqrt{-y(t)} = \frac{1}{2}(\bar{t} - t), \quad \bar{t} - t \geq 0,$$

da cui

$$y(t) = -\frac{1}{4}(t - \bar{t})^2 \quad \text{per } t \leq \bar{t}.$$

Dunque sono soluzioni per ogni $\bar{t} < 0$,

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - \bar{t})^2 & \text{per } t < \bar{t} \\ 0 & \text{per } t \geq \bar{t}. \end{cases}$$

Ovviamente, mettendo insieme i due casi, se $\bar{t}_1 \in \mathbb{R}^*_-$ e $\bar{t}_2 \in \mathbb{R}^*_+$ ($\mathbb{R}^*$ qui indica la retta ampliata), la generica soluzione è data da

$$y(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(t - \bar{t})^2 & \text{per } t < \bar{t}_1, \\ 0 & \text{per } \bar{t}_1 \leq t \leq \bar{t}_2, \\ -\frac{1}{4}(t - \bar{t}_2)^2 & \text{per } t > \bar{t}_2. \end{cases} \tag{1.25}$$

■

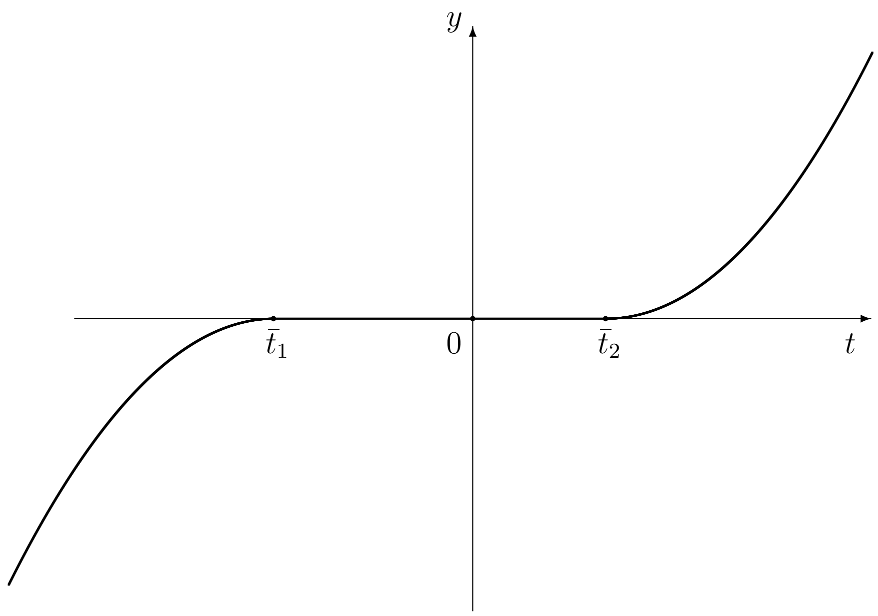

Figura 5: Grafico della soluzione (1.25) per il problema di Cauchy (1.22).

1.4 Equazioni differenziali lineari del primo ordine

Siano $a, b : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzione continue, $t_0 \in I$ con I intervallo aperto, e si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Sia $A(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(s)\ ds.$

Moltiplichiamo l'equazione differenziale per $e^{-A(t)}$, ottenendo

$$e^{-A(t)}y'(t) - A(t)y(t)e^{-A(t)} = e^{-A(t)}b(t)$$

che si può riscrivere nella forma

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-A(t)}y(t)\right) = e^{-A(t)}b(t).$$

Integrando la precedente equazione in un intorno di t_0 (a partire da t_0) otteniamo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}\left(e^{-A(s)}y(s)\right) ds = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\ ds$$

da cui, tenuto conto del dato iniziale $y(t_0) = y_0$ e che $A(t_0) = 0$, si ha

$$e^{-A(t)}y(t) - y_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)\ ds,$$

ovvero

$$y(t) = e^{A(t)}\left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)}b(s)ds\right), \tag{1.27}$$

soluzione del problema di Cauchy (1.26).

Si noti che (1.27) è definita e di classe $C^1(I)$ sotto la sola ipotesi che $a, b \in C^0(I)$. Inoltre, osservando che (1.26) verifica le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz, la (1.27) è l'unica soluzione di (1.26). La tecnica appena usata per trovare l'unica soluzione del problema (1.26) va sotto il nome di *metodo del fattore integrante*. Il fattore moltiplicativo $e^{-A(t)}$ che ci ha permesso di integrare e giungere alla soluzione è detto appunto *fattore integrante*.

A livello di nomenclatura, diremo che l'equazione

$$y' = a(t)y + b(t) \tag{1.28}$$

è del primo ordine lineare (non omogenea). Chiameremo equazione differenziale omogenea associata alla (1.28) l'equazione

$$y' = a(t)y. \tag{1.29}$$

La (1.29) gode della seguente proprietà di linearità: date $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluzioni di (1.29),

$$y_1' = a(t)y_1, \qquad\qquad y_2' = a(t)y_2,$$

se si opera la somma membro a membro si ottiene

$$(y_1 + y_2)' = a(t)(y_1 + y_2),$$

da cui, se chiamiamo $w(t) = y_1(t) + y_2(t)$, allora si ha

$$w'(t) = a(t)w(t),$$

vale a dire che w verifica ancora la (1.29).

Inoltre, se moltiplichiamo la (1.29) per una costante k, si ha

$$ky' = a(t)ky$$

e, detta $w(t) = ky(t)$, si ha $w'(t) = a(t)w(t)$, ovvero w verifica ancora la (1.29).

Infine, date $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluzioni della (1.28),

$$y_1'(t) = a(t)y_1(t) + b(t), \qquad\qquad y_2'(t) = a(t)y_2(t) + b(t),$$

sottraendo membro a membro si ottiene

$$(y_1(t) - y_2(t))' = a(t)(y_1(t) - y_2(t))$$

e, detto $w(t) = y_1(t) - y_2(t)$, si ha

$$w'(t) = a(t)w(t),$$

vale a dire che w verifica l'equazione omogenea associata (1.29). Di conseguenza, per trovare tutte le soluzioni della (1.28) basta trovare una sua soluzione $\bar{y}(t)$ e ad essa sommare la generica soluzione $w(t)$ dell'equazione differenziale lineare omogenea associata (1.29). È a partire da tale idea che si basa il metodo che ora esporremo e che permette di risalire alla generica soluzione dell'equazione differenziale (1.28).

1^0 **passo:** trovare la generica soluzione di (1.29).

Si osservi che la (1.29) è a variabili separabili. La sua unica soluzione stazionaria è $y(t) \equiv 0$ per ogni t. Se $y(t) \neq 0$ per qualche $t \in \mathbb{R}$, resterà diversa da zero per ogni t. Di conseguenza, essendo $y(t)$ anche continua, il suo segno resterà fissato. Dividendo l'equazione per y e integrando si ha

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)} dt = \int a(t) dt. \tag{1.30}$$

Indichiamo con $A(t)$ una fissata primitiva di $a(t)$. Osserviamo poi che le primitive di $\frac{y'(t)}{y(t)}$ che ci interessano si possono scrivere nella forma $\log\left(\frac{y(t)}{k}\right)$, con $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ costante che ha lo stesso segno di $y(t)$.

Abbiamo quindi

$$\log\left(\frac{y(t)}{k}\right) = A(t),$$

dalla quale $y(t) = ke^{A(t)}$, $k \neq 0$. Tenendo poi conto della soluzione stazionaria $y(t) \equiv 0$, si ha la soluzione generale della (1.29),

$$y(t) = ke^{A(t)}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{1.31}$$

2^0 **passo:** trovare una soluzione di (1.28) usando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange.

Tale metodo consiste, partendo dalla (1.31), nel ricercare una soluzione del tipo

$$\bar{y}(t) = k(t)e^{A(t)}, \tag{1.32}$$

dove ora l'incognita è $k(t)$. Derivando la (1.32) e sostituendo nella (1.28) si ha

$$\bar{y}'(t) = k'(t)e^{A(t)} + k(t)a(t)e^{A(t)},$$

$$k'(t)e^{A(t)} + k(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)k(t)e^{A(t)} + b(t),$$

da cui

$$k'(t) = b(t)e^{-A(t)}. \tag{1.33}$$

Perciò, detta $k(t)$ una particolare soluzione di (1.33), si ottiene la soluzione particolare (1.32). Abbiamo ottenuto quindi la soluzione di (1.28) data da

$$y(t) = ke^{A(t)} + e^{A(t)} \int b(t)e^{-A(t)}, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{1.34}$$

La (1.34), al variare di $k \in \mathbb{R}$, è la soluzione generale di (1.28). Si osservi che, se si vuole trovare poi la soluzione (unica) di (1.26) data dalla (1.27), una volta calcolati gli integrali, si tratta di imporre la condizione iniziale.

2 Equazioni differenziali lineari di ordine n

Chiameremo *equazione differenziale lineare di ordine* n l'equazione

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \tag{2.1}$$

dove $a_j, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, j = 0, \ldots, n-1$ sono funzioni continue sull'intervallo I. Le funzioni $a_j, j = 0, \ldots, n-1$ sono dette *coefficienti* mentre g è detto *termine noto*.

L'incognita $y = y(t)$ dovrà essere una funzione di classe C^n e si potrebbe dimostrare che il suo dominio di definizione è sempre I (vale a dire, l'esistenza è sempre globale).

Come già visto nel caso dell'equazione lineare del primo ordine, la linearità equivale alla proprietà seguente:
date $y_1(t)$ e $y_2(t)$ due soluzioni dell'equazione (2.1),

$$y_1^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y_1'(t) + a_0(t)y_1(t) = g(t),$$

$$y_2^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y_2^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)y_2'(t) + a_0(t)y_2(t) = g(t),$$

se si opera la differenza membro a membro, detta $w(t) = y_1(t) - y_2(t)$ si ha

$$w^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)w^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)w'(t) + a_0(t)w(t) = 0,$$

vale a dire w verifica la seguente *equazione differenziale omogenea associata* alla (2.1),

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0. \tag{2.2}$$

Inoltre, se $u_1(t)$ e $u_2(t)$ sono due soluzioni della (2.2),

$$u_1^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)u_1^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)u_1'(t) + a_0(t)u_1(t) = 0,$$

$$u_2^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)u_2^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)u_2'(t) + a_0(t)u_2(t) = 0,$$

se si opera la somma membro a membro, detta $z(t) = u_1(t) + u_2(t)$, si ha

$$z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t) = 0,$$

vale a dire che $z(t)$ verifica l'equazione (2.2).

Infine, se moltiplichiamo la (2.2) per $k \in \mathbb{R}$,

$$ky^{(n)} + a_{n-1}(t)ky^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)ky' + a_0(t)ky = 0,$$

detta $w(t) = ky(t)$, allora w verifica ancora la (2.2).

Possiamo riassumere quanto fin qui provato con la seguente

Proposizione 2.1

a) *Date $y_1(t)$ e $y_2(t)$ soluzioni dell'equazione* (2.2)*, allora una loro combinazione lineare*

$$\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t), \qquad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$

è soluzione ancora dell'equazione (2.2)*.*

b) *Date due soluzioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$ dell'equazione* (2.1)*, la loro differenza $y_1(t) - y_2(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea* (2.2)*; viceversa, se $\bar{y}(t)$ è una fissata soluzione di* (2.1) *e $u(t)$ è una generica soluzione di* (2.2)*, la loro somma $\bar{y}(t) + u(t)$ è ancora soluzione di* (2.1)*.*

Perciò, il problema di trovare le soluzioni di (2.1) si sposta nel problema di trovare

a) una sua soluzione;

b) la generica soluzione di (2.2).

Prima di affrontare questo problema, introduciamo il problema di Cauchy associato alla (2.1):

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Si può dimostrare che, fissato $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ all'istante $t_0 \in I$, il problema (2.3) ammette un'unica soluzione definita per ogni $t \in I$ (soluzione globale).

Consideriamo perciò gli n-problemi di Cauchy associati all'equazione differenziale omogenea (2.2),

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0, \\ \quad \vdots \\ y^{(k-1)}(t_0) = 0, \\ y^{(k)}(t_0) = 1, \\ y^{(k+1)}(t_0) = 0, \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

per $k = 0, \ldots, (n-1)$ (vale a dire gli n problemi di Cauchy ottenuti con dati tutti nulli eccetto uno, a turno, uguale a 1). Ovviamente, per ogni k, il problema (2.4) ammette un'unica soluzione $u_k(t)$.

Se consideriamo una combinazione lineare, di coefficienti y_k, delle soluzioni $u_k(t)$,

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k u_k(t),$$

la funzione $y(t)$ è ancora soluzione di (2.2) e verifica il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \quad\vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases} \tag{2.5}$$

per cui è l'unica soluzione di (2.5). Questo vuol dire che le $u_k(t)$ generano l'insieme di tutte le soluzioni della (2.2). Inoltre, le u_k sono fra di loro linearmente indipendenti, visto che

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k(t) \equiv 0 \tag{2.6}$$

per ogni $t \in I$ se e solo se $\alpha_k = 0$ per ogni $k = 0, \ldots, (n-1)$. Per verificare quest'ultima affermazione procediamo nel modo seguente:

i) valutiamo la (2.6) per $t = t_0$ ottenendo $\alpha = 0$;

ii) deriviamo la (2.6) una volta,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k u_k'(t) \equiv 0, \tag{2.7}$$

e valutiamola per $t = t_0$, ottenendo $\alpha_1 = 0$;

iii) procedendo analogamente derivando via via una volta in più si ottiene che la combinazione lineare (2.6) è nulla se e solo se i coefficienti α_k sono tutti nulli.

Abbiamo cioè ottenuto:

Proposizione 2.2 (Struttura dell'integrale generale)
Le soluzioni dell'equazione differenziale (2.2) *costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione n. Una base per tale spazio vettoriale è costituito dalle*

soluzioni u_k del generico problema di Cauchy (2.4).
Inoltre, date le u_k così costruite, la soluzione di (2.5) *è data da*

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k u_k(t). \tag{2.8}$$

Infine, se $\bar{y}(t)$ è una data soluzione dell'equazione non omogenea (2.1)*, allora l'integrale generale di* (2.1) *(vale a dire l'insieme di tutte le sue soluzioni), è dato da*

$$\bar{y}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u_k(t) \tag{2.9}$$

al variare di $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Rimarrebbe adesso da imparare a

i) calcolare una soluzione particolare di (2.1);

ii) calcolare n soluzioni linearmente indipendenti di (2.2) (non necessariamente la base u_k a cui ci siamo riferiti prima, qualunque altra base risponde ugualmente al problema di ottenere l'integrale generale di (2.1) o di (2.2)).

Non sapremo dare in generale una risposta al secondo problema. Per quanto riguarda il primo, supposto di conoscere una base $u_k(t)$ per l'equazione (2.2), riusciamo a rispondere utilizzando il metodo generale esposto nel prossimo paragrafo.

2.1 Metodo della variazione delle costanti arbitrarie (di Lagrange)

Abbiamo già incontrato tale metodo nella situazione particolare (e semplice) dell'equazione del primo ordine. Vedremo adesso come tale metodo si generalizza al caso dell'equazione di ordine n. Prima di affrontare il caso generale, esaminiamo il metodo nel caso delle equazioni del secondo ordine

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = g(t), \tag{2.10}$$

dove $a, b, g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue sull'intervallo aperto I. Siano $y_1(t)$ e $y_2(t)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea associata

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{2.11}$$

Di conseguenza, l'integrale generale della (2.11) è dato da

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t), \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Cerchiamo una soluzione della (2.10) del tipo

$$y(t) = k_1(t)y_1(t) + k_2(t)y_2(t). \tag{2.13}$$

Si tratta di determinare $k_1(t)$ e $k_2(t)$. Per fare ciò potremmo derivare due volte la (2.13) sostituendo poi nella (2.10): così facendo, però, imporremmo solo una condizione; d'altra parte le funzioni incognite sono due, per cui è opportuno imporre anche una seconda condizione. Il metodo della variazione delle costanti di Lagrange fissa anche questa seconda scelta in modo da ottenere un procedimento che dà luogo sempre a soluzione. La procedura è la seguente:

1^o **passo** Deriviamo la (2.13):

$$y'(t) = k_1(t)y_1'(t) + k_2(t)y_2'(t) + k_1'(t)y_1(t) + k_2'(t)y_2'(t).$$

Imponiamo la prima condizione:

$$k_1'(t)y_1(t) + k_2'(t)y_2'(t) = 0. \tag{2.14}$$

2^o **passo** Poiché, in base alla condizione (2.14), si ha

$$y'(t) = k_1(t)y_1'(t) + k_2(t)y_2'(t),$$

derivando si ha

$$y''(t) = k_1(t)y_1''(t) + k_2(t)y_2''(t) + k_1'(t)y_1'(t) + k_2'(t)y_2'(t)$$

e sostituendo nella (2.10) otteniamo la seconda condizione

$$\begin{aligned} &k_1(t)y_1''(t) + k_2(t)y_2''(t) + k_1'(t)y_1'(t) + k_2'(t)y_2'(t) + a(t)k_1(t)y_1'(t) \\ &+ a(t)k_2(t)y_2'(t) + b(t)k_1(t)y_1(t) + b(t)k_2(t)y_2(t) = g(t). \end{aligned}$$

Tale equazione può anche essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned} &k_1(t)\left(y_1''(t) + a(t)y_1'(t) + b(t)y_1(t)\right) + k_2(t)\left(y_2''(t) + a(t)y_2'(t)\right. \\ &\left.+b(t)y_2(t)\right) + k_1'(t)y_1'(t) + k_2'(t)y_2'(t) = g(t) \end{aligned}$$

e, tenuto conto che $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono soluzioni di (2.11), si ottiene la seconda condizione

$$k_1'(t)y_1'(t) + k_2'(t)y_2'(t) = g(t). \tag{2.15}$$

Abbiamo perciò ottenuto

$$\begin{cases} y_1(t)k_1'(t) + y_2(t)k_2'(t) = 0, \\ y_1'(t)k_1'(t) + y_2'(t)k_2'(t) = g(t), \end{cases} \tag{2.16}$$

sistema lineare 2×2 nelle incognite $k_1'(t)$ e $k_2'(t)$. Poiché $y_1(t)$ e $y_2(t)$ erano linearmente indipendenti, si può dimostrare che (2.16) ammette sempre soluzione unica $(\bar{k}_1'(t), \bar{k}_2'(t))$. Sappiamo ora che si risale dalla derivata alla funzione a meno di una costante arbitraria. Perciò, se fissiamo una particolare primitiva, avremo $(\bar{k}_1(t), \bar{k}_2(t))$ e in corrispondenza dalla (2.13)

$$\bar{y}(t) = \bar{k}_1(t)y_1(t) + \bar{k}_2(t)y_2(t),$$

che è una particolare soluzione di (2.10): per avere l'integrale generale di (2.10), alla $\bar{y}(t)$ va sommato l'integrale generale (2.12) dell'equazione differenziale omogenea associata, ottenendo

$$y(t) = \bar{k}_1(t)y_1(t) + \bar{k}_2(t)y_2(t) + k_1y_1(t) + k_2y_2(t). \tag{2.17}$$

Se invece determiniamo la generica primitiva di $\bar{k}_1'(t)$ e $\bar{k}_2'(t)$, avremo

$$\begin{cases} k_1(t) = \bar{k}_1(t) + k_1, & k_1 \in \mathbb{R}, \\ k_2(t) = \bar{k}_2(t) + k_2, & k_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e sostituendo nella (2.13) otteniamo direttamente l'integrale generale (2.17).

Procedendo analogamente nel caso di un'equazione differenziale di ordine n, si perviene al seguente

Metodo della variazione delle costanti (di Lagrange)

Sia $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$, $t \in I$, una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea di ordine n (2.2) associata alla (2.1).

Allora il sistema lineare $n \times n$ nelle incognite $(k_1'(t), \ldots, k_n'(t))$ dato da

$$\begin{cases} y_1(t)k_1'(t) + y_2(t)k_2'(t) + \ldots + y_n(t)k_n'(t) = 0, \\ y_1'(t)k_1'(t) + y_2'(t)k_2(t) + \ldots + y_n'(t)k_n'(t) = 0, \\ \quad \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t)k_1'(t) + y_2^{(n-1)}(t)k_2'(t) + \ldots + y_n^{(n-1)}(t)k_n'(t) = g(t) \end{cases} \tag{2.18}$$

ha un'unica soluzione $(\bar{k}_1'(t), \ldots, \bar{k}_n'(t))$.

Determinata la generica primitiva $(\bar{k}_1(t)+k_1, \ldots, \bar{k}_n(t)+k_n)$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} (\bar{k}_i(t) + k_i)y_i(t) \tag{2.19}$$

rappresenta, al variare dei $k_i \in \mathbb{R}$, l'integrale generale di (2.1).

Esempio 2.3 Applichiamo il metodo della variazione delle costanti all'equazione differenziale lineare non omogenea del terzo ordine

$$y''' - y' = t^3 \tag{2.20}$$

Vedremo più avanti (esempio 2.6, p. 41) che l'equazione omogenea associata

$$y''' - y' = 0 \tag{2.21}$$

ammette l'integrale generale dato da

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t, \quad c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.22}$$

Cerchiamo allora, con il metodo prima esposto, una soluzione di (2.20) della forma

$$y(t) = c_1(t) + c_2(t)e^{-t} + c_3(t)e^t. \tag{2.23}$$

Non utilizzeremo direttamente il sistema preconfezionato (2.18) ma rifacciamo i vari passi al fine di capire meglio il metodo.

1^0 **passo:** Derivando la (2.23) si ha

$$y'(t) = c_1'(t) + c_2'(t)e^{-t} + c_3'(t)e^t - c_2(t)e^{-t} + c_3(t)e^t$$

e imponiamo la prima condizione

$$c_1'(t) + c_2'(t)e^{-t} + c_3'(t)e^t = 0 \quad \forall t \in I. \tag{2.24}$$

Otteniamo allora

$$y'(t) = -c_2(t)e^{-t} + c_3(t)e^t. \tag{2.25}$$

2^0 **passo:** Derivando la (2.25) si ha

$$y''(t) = -c_2'(t)e^{-t} + c_3'(t)e^t + c_2(t)e^{-t} + c_3(t)e^t$$

e imponiamo la seconda condizione

$$-c_2'(t)e^{-t} + c_3'(t)e^t = 0, \quad \forall t \in I. \tag{2.26}$$

Otteniamo allora

$$y''(t) = c_2(t)e^{-t} + c_3(t)e^t \tag{2.27}$$

3^0 **passo:** Derivando la (2.27) si ha

$$y'''(t) = c_2'(t)e^{-t} + c_3'(t)e^t - c_2(t)e^{-t} + c_3(t)e^t. \tag{2.28}$$

Sostituendo le espressioni (2.25), (2.27) e (2.28) nella (2.20), si ottiene

$$c_2'(t)e^{-t} + c_3'(t)e^t - c_2(t)e^{-t} + c_3(t)e^t + c_2(t)e^{-t} - c_3(t)e^t = t^3,$$

ovvero

$$c_2'(t)e^{-t} + c_3'(t)e^t = t^3, \tag{2.29}$$

che è la terza condizione cercata. Mettendo insieme le (2.24), (2.26) e (2.29) otteniamo il sistema lineare (corrispondente nella situazione particolare a (2.18))

$$\begin{cases} c_1'(t) + e^{-t}c_2'(t) + e^t c_3'(t) = 0, \\ \qquad -e^{-t}c_2'(t) + e^t c_3'(t) = 0, \\ \qquad\ \ e^{-t}c_2'(t) + e^t c_3'(t) = t^3. \end{cases} \tag{2.30}$$

Sottraendo dalla terza riga la seconda si ha

$$2e^{-t}c_2'(t) = t^3,$$

da cui

$$\begin{cases} c_2'(t) = \frac{1}{2}t^3e^t, \\ -e^{-t}\frac{1}{2}t^3e^t + e^tc_3'(t) = 0, \\ c_1'(t) = -e^{-t}\frac{1}{2}t^3e^t - e^tc_3'(t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2'(t) = \frac{1}{2}t^3e^t, \\ c_3'(t) = \frac{1}{2}t^3e^{-t}, \\ c_1'(t) = -\frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^3 = -t^3, \end{cases}$$

e integrando (le prime due per parti) si ottiene

$$\begin{cases} c_1(t) = -\frac{t^4}{4} + \tilde{c}_1, & \tilde{c}_1 \in \mathbb{R}, \\ c_2(t) = \frac{1}{2}t^3e^t - \frac{3}{2}t^2e^t + 3te^t - 3e^t + c_2, & c_2 \in \mathbb{R}, \\ c_3(t) = -\frac{1}{2}t^3e^{-t} - \frac{3}{2}t^2e^{-t} - 3te^{-t} - 3e^{-t} + c_3, & c_3 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

e sostituendo nella (2.23) si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{t^4}{4} + \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - 3 - \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t - 3 + \tilde{c}_1 + c_2e^{-t} + c_3e^t \\ &= -\frac{t^4}{4} - 3t^2 + c_1 + c_2e^{-t} + c_3e^t, \quad c_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

che rappresenta l'integrale generale della (2.20).

Osservazione 2.4 Si nota subito che la struttura della soluzione appena trovata è del tipo soluzione particolare più integrale generale dell'equazione omogena: si verifica infatti velocemente che la funzione

$$\bar{y}(t) = -\frac{t^4}{4} - 3t^2 \tag{2.31}$$

è soluzione particolare di (2.20). Vedremo più avanti (esempio 2.9, p. 44) come ritrovare la soluzione (2.31) con un metodo (sicuramente) più rapido.

■

Rimane ora il problema di trovare una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea (2.2). Purtroppo non saremo in grado di calcolare la generica soluzione di (2.2) nel caso generale di coefficienti $a_j(t)$ variabili al variare di t: sapremo rispondere a tale domanda nel caso in cui $a_j(t)$ sono costanti $\forall j = 0, \ldots, n-1$. Vi sono altre classi di equazioni per le quali sapremo rispondere ma non affronteremo tale problema in questa sede.

2.2 Equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti

Chiameremo equazione differenziale lineare omogenea di ordine n a coefficienti costanti $a_k \in \mathbb{R}, \; k = 0, \ldots, \; n-1$, l'equazione

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{2.32}$$

Supponiamo che $y(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{R}$ sia una soluzione della (2.32): dato che

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda \; e^{\lambda t}, \\ y''(t) = \lambda^2 \; e^{\lambda t}, \\ \quad \vdots \\ y^{(n)}(t) = \lambda^n \; e^{\lambda t}, \end{cases}$$

sostituendo nella (2.32) si ha

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \ldots + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = 0$$

e, mettendo prima in evidenza e poi semplificando perché diverso da zero l'esponenziale $e^{\lambda t}$, si ottiene la condizione su $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{2.33}$$

La (2.33) è un'equazione polinomiale di grado n: per il teorema fondamentale dell'algebra (caso a coefficienti reali) la (2.33) ammette n soluzioni (se contate con molteplicità) in $\mathbb{C}$: k soluzioni reali e $2h$ soluzioni complesse (accoppiate soluzione complessa–complessa coniugata).

Noi d'altra parte, da quanto detto inizialmente, siamo interessati solo alle soluzioni reali!

Esaminiamo allora un primo caso: supponiamo che esistano n soluzioni reali e distinti di (2.33)

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n.$$

In tal caso

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}, \ldots, \quad y_n(t) = e^{\lambda_n t}$$

sono n funzioni linearmente indipendenti e costituiscono quindi una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni della (2.32): vale a dire che

$$y(t) = \sum_{p=1}^{n} c_p e^{\lambda_p t}, \quad c_p \in \mathbb{R} \tag{2.34}$$

è l'integrale generale di (2.32).

Esaminiamo un secondo caso: supponiamo che esistano k soluzioni reali e distinte di (2.33),

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$$

ognuna delle quali di molteplicità rispettivamente

$$r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}.$$

Si può dimostrare che in tal caso una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni della (2.32) lo si ottiene considerando

$$e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, te^{\lambda_2 t}, \ldots, t^{r_2-1}e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_k t}, te^{\lambda_k t}, \ldots, t^{r_k-1}e^{\lambda_k t}.$$

Si osservi che si tratta infatti di n funzioni linearmente indipendenti: l'integrale generale è dato allora da una loro combinazione lineare.

In base alla presentazione del problema dovremmo essere interessati alla situazione generale in cui la (2.33) ammette soluzioni complesse (coniugate), visto che avevamo supposto all'inizio il parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tuttavia, si può dimostrare che, se

$$\lambda = \alpha \mp i\beta$$

sono due soluzioni complesse coniugate di (2.33), allora

$$e^{\alpha t}\cos(\beta t), \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

sono soluzioni linearmente indipendenti di (2.32). La situazione generale è perciò la seguente.

Teorema 2.5 (dell'integrale generale)
Data l'equazione (2.32) *e il suo polinomio caratteristico uguagliato a zero* (2.33) *che supponiamo ammetta*

i) k *soluzioni reali e distinte*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$$

ognuna delle quali di molteplicità rispettivamente

$$r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{N}$$

ii) $2h$ *soluzioni complesse e coniugate*

$$\alpha_1 \pm i\beta_1, \ \ldots, \ \alpha_h \pm i\beta_h$$

ognuna delle quali di molteplicità (le molteplicità di $\alpha_q + i\beta_q$ *e di* $\alpha_q - i\beta_q$ *è la stessa) rispettivamente* $s_1, \ldots, s_h$.

Allora si può dimostrare che una base per lo spazio vettoriale delle soluzioni della (2.32) *la si ottiene considerando le n funzioni:*

$$e^{\lambda_1 t},\ te^{\lambda_1 t},\ \ldots,\ t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t},\ te^{\lambda_2 t},\ \ldots, t^{r_2-1}e^{\lambda_2 t},\ \ldots,$$
$$e^{\lambda_k t},\ te^{\lambda_k t},\ \ldots,\ t^{r_k-1}e^{\lambda_k t},\ e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),\ e^{\alpha_2 t}\sin(\beta_1 t),\ te^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),$$
$$te^{\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t),\ \ldots,\ t^{s_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos(\beta_1 t),\ t^{s_1-1}e^{\alpha_1 t}sen(\beta_1 t),\ \ldots,$$
$$t^{s_h-1}e^{\alpha_h t}\cos(\beta_h t),\ t^{s_h-1}e^{\alpha_h t}\sin(\beta_h t).$$

Esempio 2.6 Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti del terzo ordine

$$y''' - y' = 0$$

Il polinomio caratteristico uguagliato a zero ad essa associato è

$$\lambda^3 - \lambda = 0,\ \lambda(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

che ammette tre radici reali e distinte,

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 1.$$

L'integrale generale dell'equazione è perciò dato da

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

■

Esempio 2.7 Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti del quarto ordine

$$y^{(4)} - y = 0.$$

Il polinomio caratteristico associato è

$$\lambda^4 - 1 = 0, \quad (\lambda^2+1)(\lambda-1)(\lambda+1) = 0$$

che ammette le radici $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = i,\ \lambda_4 = -i$, tutte di molteplicità uno. L'integrale generale dell'equazione è perciò dato da

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t, \qquad c_1, c_2, c_3, c_4, \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che $c_3 \cos t + c_4 \sin t$ è associato alle due radici (complesse coniugate) $\lambda_3 = i$ e $\lambda_4 = -i$ nel loro insieme, come coppia. ■

Esempio 2.8 Si consideri l'equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti del quarto ordine.

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0, \quad (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

che ammette le radici $\lambda = \mp i$ ognuna di molteplicità due. L'integrale generale dell'equazione è perciò dato da

$$y(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t, \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

■

2.3 Equazioni differenziali lineari non omogenee a coefficienti costanti: metodo di somiglianza

Torniamo ora a considerare l'equazione a coefficienti costanti nel caso non omogeneo

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(t) \tag{2.35}$$

nel caso in cui il termine noto $g(t)$ assume alcune forme particolari. Il metodo che ora descriveremo è un'alternativa al metodo di variazione delle costanti, sicuramente più rapido nel giungere ad una soluzione particolare.

Metodo di somiglianza

Sia data l'equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti di ordine n (2.35).

1^0 **caso** Supponiamo che il termine noto $g(t)$ abbia la forma

$$g(t) = e^{\lambda t} p_k(t), \tag{2.36}$$

dove λ è un numero reale e p_k è un polinomio di grado k.

Allora esiste un polinomio p tale che la funzione

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t} p(t) \tag{2.37}$$

è una soluzione dell'equazione differenziale (2.35). Inoltre, $p(t)$ ha

a) grado k se λ non è radice dell'equazione caratteristica;

b) grado $m + k$ se λ è una radice di ordine m dell'equazione caratteristica, e precisamente
$p(t) = t^m q(t)$, dove $q(t)$ è un generico polinomio di grado k.

2^0 **caso** Supponiamo che il termine noto $g(t)$ abbia la forma

$$g(t) = e^{\lambda t}(p_1(t)\cos(\mu t) + p_2(t)\sin(\mu t)) \tag{2.38}$$

dove λ e μ sono numeri reali, mentre p_1 e p_2 sono due polinomi; supponiamo che k sia il massimo tra il grado di p_1 e quello di p_2.

Allora esistono due polinomi q_1 e q_2 tali che la funzione

$$\bar{y}(t) = e^{\lambda t}(q_1(t)\cos(\mu t) + q_2(t)\sin(\mu t)) \tag{2.39}$$

è una soluzione dell'equazione differenziale (2.35).

Inoltre q_1 e q_2 hanno

a) grado k se $\lambda \mp i\mu$ non è radice dell'equazione caratteristica;

b) grado $k+m$ se $\lambda \mp i\mu$ è radice di ordine m dell'equazione caratteristica.

Esempio 2.9 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''' - y' = t^3. \tag{2.40}$$

Vogliamo trovare l'integrale generale.

Avevamo già studiato l'omogenea associata nell'esempio 2.6 (p. 41). Le radici dell'equazione caratteristica includono $\lambda = 0$ con molteplicità 1. Siamo nella situazione del caso 1(b). Devo perciò cercare una soluzione del tipo

$$p(t) = t(\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta). \tag{2.41}$$

Si tratta di sostituire la (2.41) nella (2.40). Si ha

$$\begin{aligned} p'(t) &= 4\alpha t^3 + 3\beta t^2 + 2\gamma t + \delta, \\ p''(t) &= 12\alpha t^2 + 6\beta t + 2\gamma, \\ p'''(t) &= 24\alpha t + 6\beta, \end{aligned}$$

da cui

$$24\alpha t + 6\beta - 4\alpha t^3 - 3\beta t^2 - 2\gamma t - \delta = t^3$$

e quindi

$$\begin{cases} -4\alpha = 1 \\ -3\beta = 0 \\ 24\alpha - 2\gamma = 0 \\ 6\beta - \delta = 0, \end{cases} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \beta = 0 \\ \gamma = -3 \\ \delta = 0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Abbiamo perciò la soluzione particolare

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{4}t^4 - 3t^2$$

da cui la soluzione generale è data da

$$y(t) = -\frac{1}{4}t^4 - 3t^2 + c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 e^t, \quad c_i \in \mathbb{R}, \ i = 1, 2, 3.$$

■

Esempio 2.10 Si consideri l'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = t \cos t. \tag{2.44}$$

Vogliamo trovare il suo integrale generale.

Avevamo già studiato l'omogenea associata nell'esempio 2.6 (p. 42). Le radici dell'equazione caratteristica sono date da $\lambda = \mp i$ con molteplicità due. Applicando perciò il metodo di somiglianza, caso 2(b), si tratta di cercare una soluzione particolare del tipo

$$\bar{y}(t) = (\alpha_1 t^3 + \beta_1 t^2 + \gamma_1 t + \delta_1) \cos t + (\alpha_2 t^3 + \beta_2 t^2 + \gamma_2 t + \delta_2) \sin t. \tag{2.45}$$

Si tratterebbe di sostituire la (2.45) nella (2.44). Per fare ciò si tratterebbe di derivare la (2.45) ben quattro volte, ma ciò appare praticamente proibitivo!

■

3 Confronto tra le soluzioni di problemi di Cauchy. Esistenza e unicità globale

È noto il legame tra crescenza/decrescenza di una funzione e la sua derivata prima.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e supponiamo che

$$\varphi,\ \psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

siano continue e derivabili, $t_0 \in I$.

Esaminiamo varie situazioni

1^0 **caso** Sia $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ e $\varphi'(t) \geq \psi'(t)$ per ogni $t \in I$.

Allora:

$$\begin{cases} \varphi(t) \geq \psi(t) & \text{per ogni } t \geq t_0, \\ \varphi(t) \leq \psi(t) & \text{per ogni } t \leq t_0. \end{cases}$$

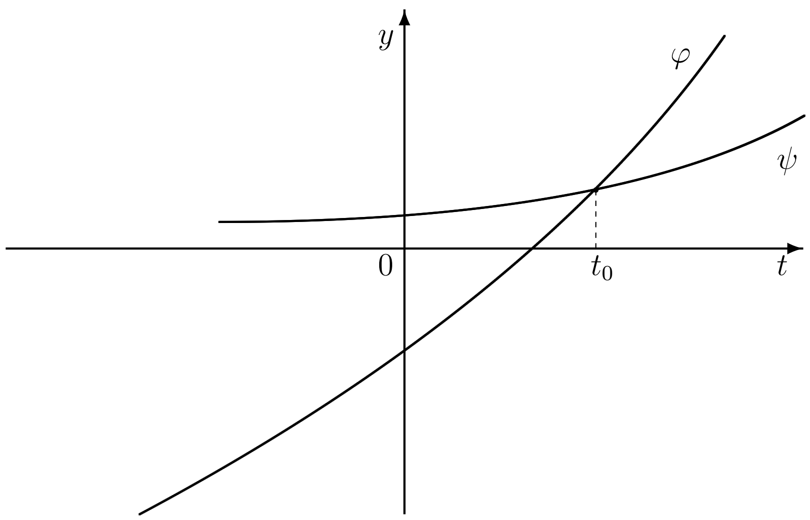

Figura 6: Confronto tra funzioni (riferimento 1^0 caso).

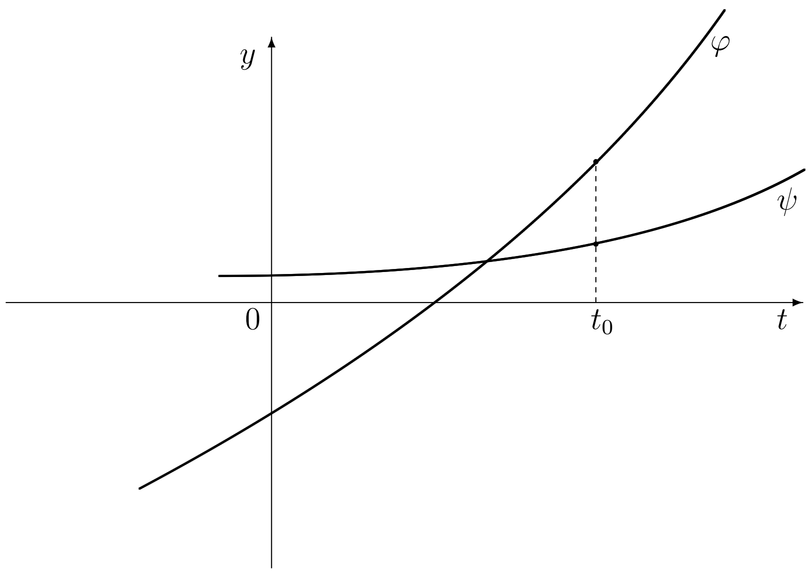

Figura 7: Confronto tra funzioni (riferimento 2^0 caso).

2^0 **caso** Sia $\varphi(t_0) > \psi(t_0)$ e $\varphi'(t) \geq \psi'(t)$ per ogni $t \geq t_0$.
Allora $\varphi(t) \geq \psi(t)$ per ogni $t \geq t_0$.

3^0 **caso** Sia $\varphi(t_0) < \psi(t_0)$ e $\varphi'(t) \geq \psi'(t)$ per ogni $t \leq t_0$.
Allora $\psi(t) \geq \varphi(t)$ per ogni $t \leq t_0$.

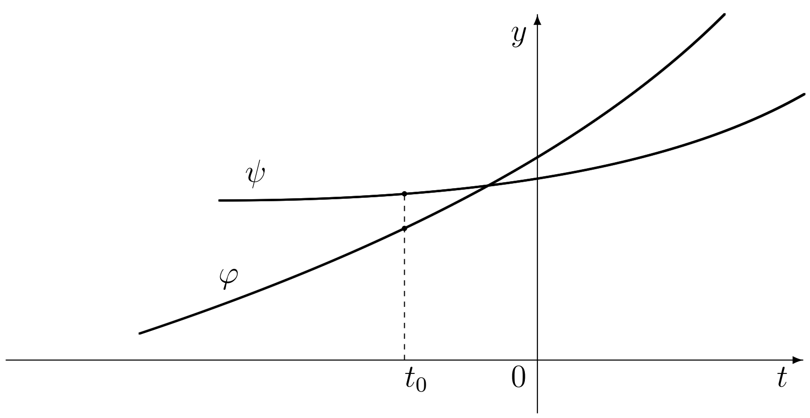

Figura 8: Confronto tra funzioni (riferimento 3^0 caso).

Queste osservazioni si possono riportare in termini di equazioni differenziali del primo ordine e dei relativi dati iniziali. Riassumiamo quanto si potrebbe dimostrare a tale riguardo nel seguente risultato.

Teorema 3.1 (I teorema del confronto) *Si considerino i due problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f_1(t, y) \\ y(t_0) = \bar{y}_1, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{cases} y' = f_2(t, y) \\ y(t_0) = \bar{y}_2 \end{cases} \tag{3.2}$$

e supponiamo che $\exists I = I(t_0)$ *intorno di* t_0 *e sia*

a) $y_1 : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una soluzione di* (3.1),

b) $y_2 : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una soluzione di* (3.2).

Si hanno le seguenti situazioni:

caso 1 *Se* $\bar{y}_1 \le \bar{y}_2$ *e* $f_1(t, y_1(t)) \le f_2(t, y_2(t))$ *per ogni* $t \ge t_0$*, allora*

$$y_1(t) \le y_2(t) \quad \textit{per ogni } t \ge t_0.$$

caso 2 *Se* $\bar{y}_1 \ge \bar{y}_2$ *e* $f_1(t, y_1(t)) \le f_2(t, y_2(t))$ *per ogni* $t \le t_0$*, allora*

$$y_1(t) \ge y_2(t) \textit{ per ogni } t \le t_0.$$

caso 3 *Se* $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$ *e* $f_1(t, y_1(t)) \le f_2(t, y_2(t))$ *per ogni* $t \in I$*, allora*

$$\begin{cases} y_1(t) \le y_2(t) & \textit{per ogni } t \ge t_0, \\ y_1(t) \ge y_2(t) & \textit{per ogni } t \le t_0. \end{cases}$$

Il risultato è intuitivo se si pensa il problema nei termini prima esposti relativamente alle funzioni derivabili. D'altra parte tale risultato è poco utile nella formulazione ora data, visto che si richiederebbe di conoscere già le soluzioni prima di applicare il teorema! Risulta perciò più utile spesso il seguente

Corollario 3.2 (II teorema del confronto) *Si considerino i due problemi di Cauchy* (3.1) *e* (3.2) *e supponiamo che* $\exists I = I(t_0)$ *intorno di* t_0, $\exists\, \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$ *tale che* $f_1, f_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *con* $f_1(t, y) \leq f_2(t, y)\ \forall (t, y) \in \Omega$. *Supponiamo inoltre che*

a) $y_1 : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una soluzione di* (3.1),

b) $y_2 : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una soluzione di* (3.2).

Allora si hanno le seguenti situazioni:

Caso 1 *Se* $\bar{y}_1 \leq \bar{y}_2$, *allora* $y_1(t) \leq y_2(t)$ *per ogni* $t \geq t_0$.

Caso 2 *Se* $\bar{y}_1 \geq \bar{y}_2$, *allora* $y_1(t) \geq y_2(t)$ *per ogni* $t \leq t_0$.

Caso 3 *Se* $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$, *allora*

$$\begin{cases} y_1(t) \leq y_2(t) & \text{per ogni } t \geq t_0, \\ y_1(t) \geq y_2(t) & \text{per ogni } t \leq t_0. \end{cases}$$

L'utilità dei risultati or ora trovati è evidente se si pensa che a volte non sarà facile trovare le soluzioni di equazioni differenziali con dati iniziali di Cauchy. In questi casi il primo tentativo sarà quello di confrontare tali problemi di Cauchy con altri problemi di Cauchy dei quali è possibile trovare le soluzioni.

Un primo problema da affrontare è solitamente quello dell'esistenza globale. Si tratta di casi in cui il dominio di definizione della funzione f, l'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$ che abbiamo più volte esaminato, è illimitato nella direzione della y: in tal caso il rischio è che l'intervallo massimale di una qualche soluzione non copre tutti i possibili valori dei tempi (vedi esempio 1.5, p. 7).

L'utilità del confronto si ha anche nell'ambito della stessa equazione a variare del dato iniziale. A tal proposito facciamo un

Esempio 3.3

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.3}$$

La funzione $f(t, y) = y^2$ è a variabili separabili (in realtà autonoma) e di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ per cui vale il teorema di Cauchy – Lipschitz.

Si osservi che per $\alpha = 0$ si ottiene la soluzione stazionaria $y(t) \equiv 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Per confronto quindi,

a) se si sceglie $\alpha > 0$ allora la soluzione corrispondente $y_\alpha(t)$ verifica la condizione $y_\alpha(t) > 0$ per ogni t del suo intervallo massimale di esistenza;

b) se si sceglie $\alpha < 0$ allora la soluzione corrispondente $y_\alpha(t)$ verifica la condizione $y_\alpha(t) < 0$ per ogni t del suo intervallo massimale di esistenza.

Per cercare le soluzioni di (3.3) nel caso $\alpha \neq 0$ procederemo ora per separazioni variabili:

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{y^2(s)} ds = \int_0^t ds.$$

Detto $z = y(s)$, allora

$$\int_\alpha^{y(t)} \frac{dz}{z} = t,$$

$$-\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{\alpha} = t,$$

per cui otteniamo la soluzione $y_\alpha(t)$ data da

$$y_\alpha(t) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - t}$$

Se $\alpha < 0$ la soluzione è definita per $t > \frac{1}{\alpha}$ e risulta $y_\alpha(t) < 0$,

$$\lim_{t\to-\infty} y_\alpha(t) = 0,$$
$$\lim_{t\to\frac{1}{\alpha}} -y_\alpha(t) = +\infty.$$

Come si può osservare, nonostante $f(t, y) = y^2$ sia molto regolare e definita su tutto $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$, la soluzione del problema di Cauchy per ogni $\alpha \neq 0$ non sarà definita su tutto $\mathbb{R}$: con il linguaggio introdotto nelle prime pagine si dice in tal caso che non vi è esistenza globale ma che in $t = \bar{t}$ la soluzione presenta blow-up. ■

Perché vi sia blow-up non è necessario che la f sia definita su tutto $\mathbb{R}$.

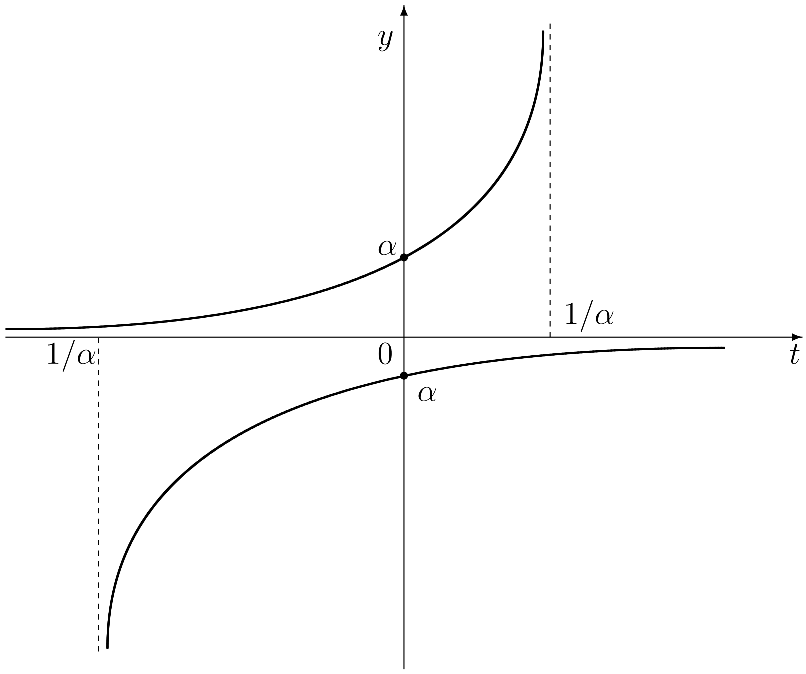

Figura 9: Grafico delle soluzioni del problema di Cauchy (3.3) corrispondenti a due differenti valori di α (uno positivo, l'altro negativo).

Esempio 3.4 Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \pi \dfrac{1+y^2}{\sqrt{1-t^2}} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione differenziale è a variabili separabili e di classe $C^1\left((-1,1) \times \mathbb{R}_y\right)$, per cui vale il teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza ed unicità locale.

Si osservi che vi sarebbe esistenza (ed unicità) globale se la soluzione fosse definita in $(-1,1)$. D'altra parte, procedendo per separazione di variabili, si giunge alla soluzione

$$y(t) = \tan(\pi \arcsin(t)),$$

che presenta blow-up in $-\frac{\pi}{6}$ e in $+\frac{\pi}{6}$, ovvero il cui intervallo massimale di definizione è

$$\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right) \subsetneq (-1,1).$$

■

Ma allora, in quali casi si ha esistenza globale?
Un esempio lo abbiamo già esaminato in precedenza, vale a dire l'equazione differenziale lineare del primo ordine: il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

se $a, b \in C(I)$, verifica le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz e l'unica soluzione del problema è data da

$$y(t) = e^{A(t)} \left(y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-A(s)} b(s) ds \right),$$

dove $A'(t) = a(t)$. Risulta $y \in C^1(I)$, vale a dire che la soluzione è globale: ciò accade per tutta la classe delle equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Utilizzando ora il teorema del confronto, ogni qual volta si riesce a confrontare in avanti il nostro problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

con un problema di Cauchy come (3.4) in modo da concludere che la nostra soluzione sta sotto quella di (3.4), siamo certi che non vi è blow-up in avanti a $+\infty$. Analogamente, ogni qual volta si riesce a confrontare in avanti il nostro problema (3.5) con un problema come (3.4) in modo da concludere che la nostra soluzione sta sopra quella di (3.4) siamo certi che non vi è blow-up in avanti a $-\infty$.

Il discorso si può ripetere anche andando indietro. Se tutto ciò funziona per uno stesso problema (3.5), tale problema non presenterà blow-up, ovvero avrà esistenza globale. Supponiamo qui di essere interessati a verificare l'esistenza

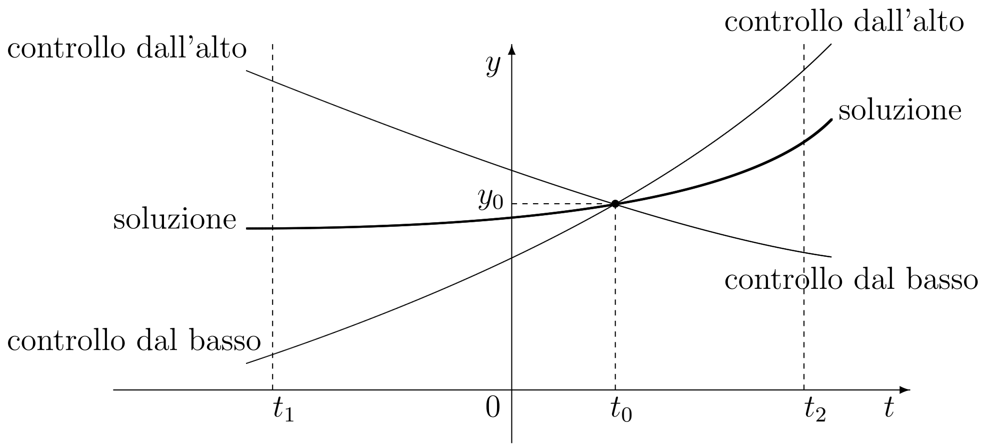

Figura 10: Sopra- e sotto-soluzioni per il problema di Cauchy (3.5).

globale in $I = (t_1, t_2)$. La soluzione del problema che controlla dall'alto viene solitamente detta *soprasoluzione*, mentre quella del problema che controlla dal basso viene detta *sottosoluzione*.

Usando il teorema del confronto si potrebbe dedurre un risultato di esistenza globale abbastanza raffinato nei confronti del quale si potrebbero muovere ancora le critiche di scarsa utilità. Per questo motivo si preferisce dare in questo caso un risultato di facile utilizzo (che si ottiene utilizzando direttamente il corollario del teorema del confronto).

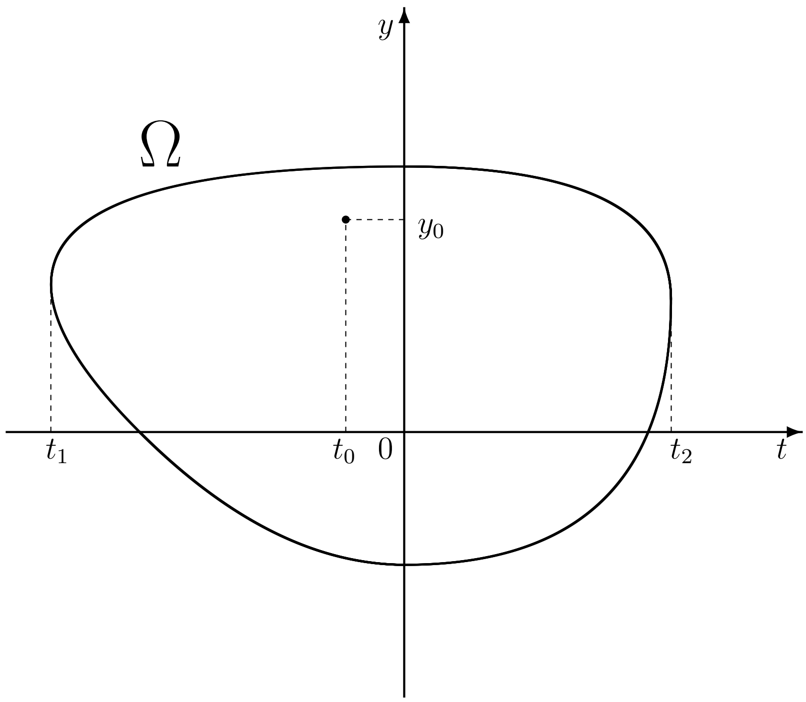

Figura 11: Dominio di definizione della funzione f del problema (3.5).

Teorema 3.5 (Teorema di esistenza globale)

Sia dato il problema di Cauchy (3.5), *dove* $f : \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funzione continua,* $(t_0, y_0) \in \Omega$ *aperto. Supponiamo che valga la stima di* *sublinearità*

$$|f(t,y)| \le \alpha(t)\,|y| + \beta(t) \qquad\qquad \textit{per ogni} \;\; (t,y) \in \Omega,$$

dove $\alpha, \beta \in C(I), \alpha, \beta \geq 0$ *ed* $I = \{(t_1, t_2):\; t_1 = \inf_{(t,y)\in\Omega} t, \quad t_2 = \sup_{(t,y)\in\Omega} t\}$.
Allora ogni soluzione del problema di Cauchy (3.5) *è globale, ovvero non presenta il fenomeno del blow-up.*

Osservazione 3.6 Se nel teorema or ora enunciato si suppone che la funzione f verifichi anche le ipotesi richieste dal teorema di Cauchy-Lipschitz, si ottiene anche l'unicità. ■

4 Esercizi Proposti

4.1 Equazioni differenziali a variabili separabili.

Esercizio 1

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t(y^2+1)}{t^2+5} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 2

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \log t \\ \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Esercizio 3

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sqrt{1+t}}{t} \cos^2 y \\ \\ y(3) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-t^2} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza ed unicità globale.

Suggerimento: può essere utile ricordare che $\int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Esercizio 5

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 - 1)\, te^{t^2} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza ed unicità. Tracciare un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 6

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 + 1)\, te^{t^2} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

stabilendo in particolare se c'è esistenza ed unicità. Tracciare un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 7

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2 + 1)\sin t \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 8

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + 3t^2}{1 + \tan^2 y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 9

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - 9 \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \leq 0$. Tracciare il grafico delle soluzioni.

Esercizio 10

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t\,(y^2 + 1)^2}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 11

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y(t+1)^2 \\ \\ y(0) = e. \end{cases}$$

Esercizio 12

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^2(y-3) \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 13

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x \log y \\ \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

Esercizio 14

Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xe^{(x^2-y)} \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 15

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{e^{-y}}{y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

In particolare:

- Verificare che siamo sotto le ipotesi per avere una sola soluzone locale;
- Qual é il suo intervallo massimale?

Tracciare il grafico della soluzione.

Esercizio 16

Trovare la soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + e^{4y}}{2e^{2y}\,(1 + t^2)} \\ \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 17

Trovare la soluzione $y = y(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1 + \sin^2 y}{2 \sin y \cos y\,(1 + t)} \\ \\ y\,(1/2) = \pi/4 \end{cases}$$

Esercizio 18

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1-4t^3}{1+\tan^2 y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 19

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t\sin(t^2)\, e^{-y} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 20

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \min\{1,\ y^2\} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 21

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \max\{1,\ y^2\} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 22

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log\left(\frac{y}{2}\right) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 23

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t y \log y \\ y(0) = e. \end{cases}$$

In particolare, dire se la soluzione esiste unica e, in caso affermativo, tracciarne l'andamento approssimativo (dopo averla calcolata).

Esercizio 24

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{y-\cos t} \sin t \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 25

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+\tan^2(t)}{1+\tan^2(y)} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 26

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t\left(y^2+1\right)}{t^2+1} \\ \\ y(0) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

a) Verificare *a priori* l'esistenza, l'unicità e la monotonia della soluzione.

b) Risolvere il problema di Cauchy e tracciare un grafico approssimativo della soluzione.

Esercizio 27

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\sin(t)e^{-y^2}}{y} \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili tracciando un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 28

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(t)\left(y^2+1\right) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili.

- La soluzione è definita per ogni t?
- La soluzione è periodica?

Esercizio 29

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2 e^{-y^2}}{y} \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili tracciando un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 30

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2t\frac{y^2+1}{(t^4+1)^2} \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili tracciando un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 31

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 6t\frac{y^2+1}{(t^2+1)^2} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili tracciando un grafico approssimativo delle eventuali soluzioni.

Esercizio 32

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + e^t y = e^t \\ \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 33

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)y} \\ \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 34

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos^2(y)\sin(t) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4.1.1 Esempi di non unicità di soluzione.

Esercizio 35

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \tan t \ \sqrt{y} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 36

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin t \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 37

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Esercizio 38

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos t \ \sqrt{1-y^2} \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 39

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos(t)\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 40

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = t^3\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- Stabilire se valgono i teoremi di esistenza ed unicità sia locali che globali.
- Studiare il problema con il metodo di separazione delle variabili.

Esercizio 41

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(t)\sqrt{y}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Dire se

- vale il teorema di Peano di esistenza locale;
- vale il teorema di esistenza globale;

- valgono le ipotesi che assicurano l'unicità;
- esistono soluzioni non costanti a supporto compatto.

Tracciare un grafico approssimativo delle soluzioni.

Esercizio 42

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y}\ e^t \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 43

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\sqrt{|y+1|}(t+1) \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

In particolare, studiarne l'esistenza locale, l'esistenza globale, l'unicità locale, l'unicità globale.
Se ciò ha senso, scrivere l'equazione di una soluzione di tale problema definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 44

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\log(1+t^2)\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

tracciando un grafico approssimativo delle soluzioni.

Esercizio 45

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^t \sqrt{|y|}, \\ \\ y(0) = \alpha^2 \end{cases}$$

al variare di $\alpha \geq 0$, tracciando un grafico approssimativo delle soluzioni.
Nota: al fine della valutazione dell'esercizio, si richiede un commento esauriente di quanto riportato sul grafico.

Esercizio 46

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}\,(3t^2 + 1) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Scrivere almeno due differenti soluzioni del problema.

Esercizio 47

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -2\sqrt{y}\sin(x). \\ \\ y(\frac{3}{2}\pi) = 0 \end{cases}$$

Trovare due soluzioni distinte $y = \varphi(x)$ e $y = \psi(x)$ definite su tutto $\mathbb{R}$ (scriverne le equazioni e tracciarne i grafici).

4.2 Equazioni differenziali lineari del primo ordine.

Esercizio 48

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' + (\tan t)\, y = \frac{1}{\sin t}$$

Esercizio 49

Trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale:

$$y' + \left(4t^3 - 3\right) y = e^{-t^4}$$

Esercizio 50

Trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale:

$$y' + \left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right) y = t$$

Esercizio 51

Trovare la soluzione generale $y = y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{3}{x} y + x.$$

Esercizio 52

Trovare la soluzione generale $y = y(x)$ dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{5}{x}y + 2x.$$

Esercizio 53

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = ty + |t| \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 54

Dopo aver stabilito *a priori* se esiste un'unica soluzione locale e/o globale, risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = |y| + x^2 \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

4.3 Equazioni differenziali lineari di ordine n.

Esercizio 55

Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' = 2tu' + e^{t^2}$$

che soddisfano alla condizione $u'(0) = 0$.

Esercizio 56

Trovare l'integrale generale $y = y(t)$ per l'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 9y'' = t.$$

Esercizio 57

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange, calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = \sin(2t).$$

Esercizio 58

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$8y''' - 36y'' + 54y' - 27y = 3e^t$$

Esercizio 59

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y^{\mathrm{V}} - 32y = 1.$$

Esercizio 60

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y'' - y = t^3 + te^t$$

Esercizio 61

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y''' + y' = \pi$$

Esercizio 62

Studiare il problema di Cauchy per $t \geq 0$

$$\begin{cases} y'' + \max(y, y') = 0 \\ \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 63

Trovare l'integrale generale per l'equazione differenziale

$$y''' - y'' + y' = 1$$

Esercizio 64

Trovare l'integrale generale $y(t)$ per l'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 3y'' + 2y = t$$

Esercizio 65

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = 5 \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 66

Determinare l'intergale generale della seguente equazione differenziale:

$$y^{(4)} + y' = t.$$

Esercizio 67

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' + 36y = e^{6t}$$

a) Calcolare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

b) Facendo uso del metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa;

c) Facendo uso del metodo di variazione delle costanti, calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa;

d) Facendo uso di quanto trovato nei punti precedenti, scrivere l'integrale generale dell'equazione non omogenea.

Esercizio 68

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange, calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = \sin(5t).$$

Esercizio 69

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''' - 5y''' + 5y'' + 5y' - 6y = 12.$$

Esercizio 70

Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + y = t^2 + 2$$

Esercizio 71

Sia data l'equazione differenziale

$$y'' - y = -1$$

a) Calcolare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata;

b) Facendo uso del metodo di somiglianza, calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa;

c) Facendo uso del metodo di variazione delle costanti, calcolare una soluzione particolare dell'equazione completa;

d) Facendo uso di quanto trovato nei punti precedenti, scrivere l'integrale generale dell'equazione non omogenea.

Esercizio 72

Trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y''' - y = t.$$

Esercizio 73

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'''' + y = t^3, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 6. \end{cases}$$

Dire se la sua soluzione è data da

a) $y(t) = 1 + t^3$,

b) $y(t) = t^3$,

c) $y(t) = 1 + 6t^3$,

d) $y(t) = 6t^3$.

Esercizio 74

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' - y - 2y = 0.$$

Esercizio 75

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'''' - y = 0.$$

Esercizio 76

Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(5)} + y = t^2, \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0, \;\; y^{(4)} = 0. \end{cases}$$

Dire se la sua soluzione è data da

a) $y(t) = 1 + t^3$,

b) $y(t) = t^2$,

c) $y(t) = 1 - t^2$,

d) $y(t) = t^3$.

Esercizio 77

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y - 2y = 0.$$

Esercizio 78

Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'''' + 16y = 0.$$

Esercizio 79

Trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y''' + 64y = t.$$

Esercizio 80

Utilizzando opportunamente il metodo del polinomio caratteristico, trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 7y' + 12y = 0 \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Esercizio 81

Utilizzando opportunamente il metodo del polinomio caratteristico, trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + 12y = 0 \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 82

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' = te^t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 83

Studiare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(4)} + 10y''' + 35y'' + 50y' + 24y = t, \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 84

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = t.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = \sin(2t).$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 4y' = -t + 2\sin(2t).$$

Esercizio 85

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = \sin(2t).$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = t\cos(2t).$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 3\sin(2t) - 4t\cos(2t).$$

Esercizio 86

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = 1.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = e^t.$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = e^{4t}.$$

e) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 8y'' + 7y' = 2 + e^t + e^{4t}.$$

Esercizio 87

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \sin(t).$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \cos(t).$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + y = \sin(t) + \cos(t).$$

Esercizio 88

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = 1.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = e^t.$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = e^{4t}.$$

e) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - 5y'' + 4y' = 1 + e^t + e^{4t}.$$

Esercizio 89

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = t^2.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = e^t.$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = t^2 + e^t.$$

Esercizio 90

a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = 0.$$

b) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = t.$$

c) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = e^{2t}.$$

d) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + 2y'' + 5y' + 10y = t + e^{2t}.$$

Esercizio 91

L'equazione differenziale $y^{(5)} = 0$ ammette

a) cinque soluzioni linearmente indipendenti;

b) infinite soluzioni linearmente indipendenti;

c) soltanto cinque soluzioni;

d) soltanto la soluzione $y \equiv 0$.

Esercizio 92

Trovare la soluzione generale $u = u(t)$ dell'equazione differenziale

$$u^{(6)} + 8u^{(3)} = t^2.$$

Esercizio 93

Trovare tutte le funzioni $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $y \in C^\infty(\mathbb{R})$, soluzioni della seguente equazione differenziale

$$y'' + 14y' + 49y = e^{-7t}.$$

Esercizio 94

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(6)} + y^{(4)} = t.$$

Trovare poi la soluzione del problema di Cauchy associato con dati iniziali

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)} = 0, \; y^{(5)}(0) = 1.$$

Esercizio 95

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(7)} - y''' = t^3.$$

Esercizio 96

Si consideri l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

$$y'' + 2\lambda y' + y = e^{-t}.$$

- Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata al variare del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea per $\lambda \neq 1$.
- Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione non omogenea per $\lambda = 1$.

Esercizio 97

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(8)} - 3^8 y = t.$$

Esercizio 98

Trovare l'integrale generale dell'equazione

$$y^{(10)} - 2^{10}y = t^9.$$

Esercizio 99

Facendo uso del metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange, trovare la soluzione generale $y = y(t)$ dell'equazione differenziale

$$y'' + 5y' + 6y = t.$$

Esercizio 100

Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''' + y'' = \cos t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 101

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange, calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = -4.$$

Esercizio 102

Trovare la soluzione del problema

$$\begin{cases} y''' + y = t^3 \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 0. \end{cases}$$

Esercizio 103

Trovare tutte le soluzioni del problema

$$\begin{cases} y^{(4)} - 16y = 0 \\ \lim_{t\to+\infty} y(t) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 104

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange, trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y''' + y'' - 2y' = e^{-t}.$$

Esercizio 105

Utilizzando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange, trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = t.$$

Esercizio 106

Studiare il problema di Cauchy per $t \geq 0$

$$\begin{cases} y'' + \max(y, y') = 0 \\ \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$