Università degli Studi di L'Aquila

Facoltà di Ingegneria

# Esercizi d'esame di

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)

**Docenti:**

Bruno Rubino

Rosella Sampalmieri

## A.A. 2002/03 e 2003/04

Prima versione

*Gli studenti sono vivamente invitati a segnalare eventuali errori ai docenti*

# COMPITO A – Prima verifica di Analisi Matematica 1
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):______________________

## Esercizio 1

Il numero $\binom{9}{4}$ è uguale a

**a)** 330;

~~**b)**~~ 126;

**c)** 11;

**d)** nessuna delle precedenti.

## Esercizio 2

Dato l'insieme (qui $\mathbb{Q}$ indica i numeri razionali)

$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{Q} : \; x = \left(\frac{1}{n^3}\right)^n, \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1 \right\},$$

stabilire, se esistono (altrimenti scrivere "non esiste"):

**a)** $\inf \mathcal{A} =$ 0

**b)** $\sup \mathcal{A} =$ 1

**c)** $\min \mathcal{A} =$ NON ESISTE

**d)** $\max \mathcal{A} =$ 1

## Esercizio 3

Utilizzando il principio di induzione, dimostrare che per ogni $n \geq 4$ vale la formula

$$2^n \leq n!$$

**Risoluzione**

Verifichiamo la validità del passo iniziale:
per $n=4$ si ha

$2^4 \leq 4!$, ovvero $16 \leq 24$, verificato.

Supponiamo vera la disequazione al passo $n$
(passo induttivo):

$$2^n \leq n!$$

si ha

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \leq 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!,$$

ovvero in particolare $2^{n+1} \leq (n+1)!$

Abbiamo ottenuto il passo $(n+1)$ dall'aver supposto
vera la disuguaglianza al passo $n$.
L'induzione è completa.

COMPITO R – Prima verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:________________________

Matricola (o data di nascita):__________________

## Esercizio 1

Scrivere lo sviluppo del binomio $(a-b)^7$

**Risposta**
$a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$

## Esercizio 2

Dato l'insieme (qui $\mathbb{Q}$ indica i numeri razionali)

$$\mathcal{A} = \left\{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \leq 4\right\},$$

stabilire, se esistono (altrimenti scrivere "non esiste"):

a) $\inf \mathcal{A} =$ $-2$

b) $\sup \mathcal{A} =$ $2$

c) $\min \mathcal{A} =$ $-2$

d) $\max \mathcal{A} =$ $2$

## Esercizio 3

Utilizzando il principio di induzione, dimostrare che per ogni $n \geq 1$ vale la formula

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

**Risoluzione**

Si tratta di provare l'induzione rispetto ad $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Verifichiamo il passo iniziale:

per $n = 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{k}{2^k} = \frac{1}{2} \quad e \quad \left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right)\Bigg|_{n=1} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2},$$

per cui è verificato. Supponiamo vera l'identità per $n \in \mathbb{N}$ (passo induttivo). Si ha allora

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{n+3}{2^{n+1}}$$

$$= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$$

che è l'identità al passo $(n+1)$.

La dimostrazione è conclusa.

COMPITO A – Seconda verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio 1

Calcolare il
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+2n\log n}-\sqrt{n^2-3n\log n}\right) =$$

**Risoluzione**

Si ha

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+2n\log n-\cancel{n^2}+3n\log n}{\sqrt{n^2+2n\log n}+\sqrt{n^2-3n\log n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5\cancel{n}\log n}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{2\log n}{n}}+\sqrt{1-\frac{3\log n}{n}}\right)} = \infty$$

visto che il numeratore tende a $+\infty$ e il denominatore a $+2$.

## Esercizio 2

Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n^2+7}\right)^{n^2-5} =$$

**Risoluzione**

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n^2+7}\right)^{n^2+7}\cdot\left(1+\frac{10}{n^2+7}\right)^{-12} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n^2+7}\right)^{n^2+7} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{10}{n^2+7}\right)^{-12}$$

e, con la sostituzione $k = n^2+7$ si ha

$$= \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{10}{k}\right)^{k}\cdot \lim\left(1+\frac{10}{k}\right)^{-12} = e^{10}$$

## Esercizio 3

Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6e^{-n}+3n^2}{5n^2\log n+2n^2e^{-n^2}} =$$

**Risoluzione**

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^{\cancel{3}}\left(1+\frac{6}{n^3e^n}+\frac{3}{n}\right)}{\cancel{n^2}\log n\left(5+\frac{2}{e^{n^2}\log n}\right)} = +\infty,$$

visto che $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\log n} = +\infty$ (confronto tra infiniti) mentre la quantità in parentesi del numeratore tende a $+1$ e quella del denominatore a 5.

COMPITO R – Seconda verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:________________________

Matricola (o data di nascita):__________________

## Esercizio 1

Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right) =$$

**Risoluzione**

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}-\cancel{n^2}-n}{n+\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1+\sqrt{1+1/n}} = -\frac{1}{2}$$

# Esercizio 2

Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \log\left(1 - \frac{n}{n^2+2}\right)$$

**Risoluzione**

$$= \lim_{n\to\infty} \log\left(1 - \frac{n}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{n}} \cdot n^2 \cdot \frac{n}{n^2+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \log\left(1 - \frac{n}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+2}$$

posto $x = \frac{n^2+2}{n}$ nel primo limite, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(1 - \frac{n}{n^2+2}\right)^{\frac{n^2+2}{n}} = \lim_{x\to\infty} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x} = -1,$$

mentre $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\frac{2}{n^2}} = +\infty.$

Il limite proposto è quindi uguale a $+\infty$.

# Esercizio 3

Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + e^{-n^2} + \log n}{3n + e^{-3n^2} + \log n^5}$$

**Risoluzione**

Si ha

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1 + \frac{1}{n e^{n^2}} + \frac{\log n}{n}\right)}{\cancel{n}\left(3 + \frac{1}{n e^{3n^2}} + 5\frac{\log n}{n}\right)} = \frac{1}{3}$$

tenuto conto del confronto di infiniti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0,$$

COMPITO A – Terza verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:________________________________

Matricola (o data di nascita):_______________________

## Esercizio 1

Giustificando la risposta, calcolare (se esiste)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x - 1}$$

Si tratta di una forma di tipo $\frac{0}{0}$. Risulta

$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2 (x+1)^2$. Perciò

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^{\cancel{2}} (x+1)^2}{\cancel{(x-1)}} = 0$$

# Esercizio 2

Sia data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{x+3}{x+7}\right)$.

**a)** Stabilire il dominio $\mathcal{D}$ di definizione della funzione $f$.

$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x < -7,\ x > -3\}$

**b)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ Risposta: $0$

**c)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -7^-} f(x)$ Risposta: $-\infty$

**d)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -7^+} f(x)$ Risposta: Non ha senso, non siamo in D.

**e)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -3^-} f(x)$ Risposta: Non ha senso, non siamo in D.

**f)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -3^+} f(x)$ Risposta: $-\infty$

**g)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ Risposta: $0$

COMPITO R – Terza verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):______________________

## Esercizio 1

Giustificando la risposta, calcolare (se esiste)

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{5x-1}}{4-x^2}$$

Si tratta di una forma di tipo $\frac{0}{0}$. Si ha

$$\lim_{x\to 2} \frac{3-\sqrt{5x-1}}{4-x^2} = \lim_{x\to 2} \left( \frac{9-5x+1}{3+\sqrt{5x-1}} \cdot \frac{1}{4-x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{5\cancel{(2-x)}}{\cancel{(2-x)}(2+x)(3+\sqrt{5x-1})} = \frac{5}{4\cdot 6} = \frac{5}{24}$$

## Esercizio 2

Sia data la funzione $f(x) = \sqrt{x|x| + 1}$.

**a)** Stabilire il dominio $\mathcal{D}$ di definizione della funzione $f$.

$\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$

**b)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ Risposta: Non ha senso, $-\infty$ non è di accumulazione per $D$

**c)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -7^-} f(x)$ Risposta: Come sopra

**d)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to -7^+} f(x)$ Risposta: Come sopra

**e)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ Risposta: $\sqrt{10}$ ($x_0 = 3$ è punto di continuità per $f$)

**f)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ Risposta: $\sqrt{10}$ (Come sopra)

**g)** Calcolare, se esiste, il $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ Risposta: $+\infty$

# COMPITO A – Quarta verifica di Analisi Matematica 1
# Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{x^7 - 1}$$

**1.a)** Stabilire il dominio di definizione di $f$.

**Risposta**

$D = \mathbb{R}$

---

**1.b)** Calcolare, se ha senso, la derivata di $f$ nell'origine $x_0 = 0$.

**Risposta**

$f'(0) = 0$

---

**1.c)** Calcolare, se ha senso, la derivata seconda di $f$ nell'origine $x_0 = 0$.

**Risposta**

$f''(0) = 0$

---

## Esercizio 2

Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(|x^3 - 1|\right).$$

**Risoluzione**

$$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$

## Esercizio 3

Calcolare, se esistono, la derivata destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ della funzione $f(x) = \tan^3(|x|)$ nel punto $x_0 = 0$. La funzione $f$ è derivabile in $x_0 = 0$?

**Risoluzione**

Si ha, per definizione,

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{tg^3(-h)}{h} = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{tg^3(h)}{h} = 0$$

Poichè limite destro e sinistro coincidono e sono finiti, la $f$ è derivabile in $x_0 = 0$ e vale $0$.

# COMPITO R – Quarta verifica di Analisi Matematica 1
# Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:__________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio 1

Sia data la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$$

**1.a)** Stabilire il dominio di definizione di $f$.

**Risposta**

$D = \mathbb{R}$

**1.b)** Calcolare, se ha senso, la derivata di $f$ nell'origine $x_0 = 0$.

**Risposta**

$-\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$

**1.c)** Calcolare, se ha senso, la derivata seconda di $f$ nell'origine $x_0 = 0$.

**Risposta**

$-\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

## Esercizio 2

Calcolare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \log\left(\sqrt{4-x^2}\right).$$

**Risoluzione**

$f(x) = \frac{1}{2}\log(4-x^2)$, da cui

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \frac{-\cancel{2}x}{4-x^2} = \frac{x}{x^2-4}$$

## Esercizio 3

Calcolare, se esistono, la derivata destra $f'_+(x_0)$ e la derivata sinistra $f'_-(x_0)$ della funzione $f(x) = |x|e^{-x}$ nel punto $x_0 = 0$. La funzione $f$ è derivabile in $x_0 = 0$?

**Risoluzione**

Si ha, per definizione,

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|e^{-h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} -e^{-h} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h e^{-h}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} e^{-h} = 1.$$

La funzione non è derivabile in $x_0 = 0$ in quanto limite destro e sinistro non coincidono.

COMPITO A – Quinta verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio

Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{2x^2+5}{x-3}$$

Tracciarne un grafico approssimativo dopo aver in particolare:

- stabilito il dominio di definizione della $f$;
- studiato il segno della $f$;
- calcolato la derivata prima $f'$ e stabilito il suo dominio;
- individuato i punti stazionari della $f$ e stabilito la loro natura;
- calcolato eventuali limiti per la $f$ e la $f'$.
- studiato la presenza di eventuali asintoti.

**Risoluzione (giustificare le affermazioni!)**

La funzione è definita su $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}$

Poiché $2x^2+5 > 0 \ \forall x \in D$, si ha

$f(x) > 0$ per $x > 3$ e $f(x) < 0$ per $x < 3$.

Si ha $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5}{x-3} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{x-3} = +\infty$,

$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x^2+5}{x-3} = -\infty$, $\lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2+5}{x-3} = +\infty$,

per cui $x=3$ è asintoto verticale.

Vediamo se ci sono asintoti obliqui a $\pm\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5}{x(x-3)} = 2 = m_1$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{x(x-3)} = 2 = m_2$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-m_1x = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5}{x-3}-2x =$$

$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2x^2}+5-\cancel{2x^2}+6x}{x-3} = 6 = q_1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-m_2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+5}{x-3}-2x =$$

$$=\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+5-2x^2+6x}{x-3} = 6 = q_2$$

Abbiamo perciò come asintoto obliquo la retta

$y=2x+6$ (sia a $-\infty$ che a $+\infty$). $f(0)=-\frac{5}{3}$

Studiamo la derivata:

$$f'(x)=\frac{4x(x-3)-(2x^2+5)}{(x-3)^2}=\frac{2x^2-12x-5}{(x-3)^2}$$

$$2x^2-12x-5=0 \qquad x=\frac{6\mp\sqrt{36+10}}{2}=\frac{6\mp\sqrt{46}}{2}$$

$$f'(x)\geq 0 \iff x\leq\frac{6-\sqrt{46}}{2} \text{ e } x\geq\frac{6+\sqrt{46}}{2}$$

$$f\left(\frac{6-\sqrt{46}}{2}\right)=-2\left(\sqrt{46}-6\right),\quad f\left(\frac{6+\sqrt{46}}{2}\right)=2\left(\sqrt{46}+6\right)$$

Massimo relativo            Minimo relativo.

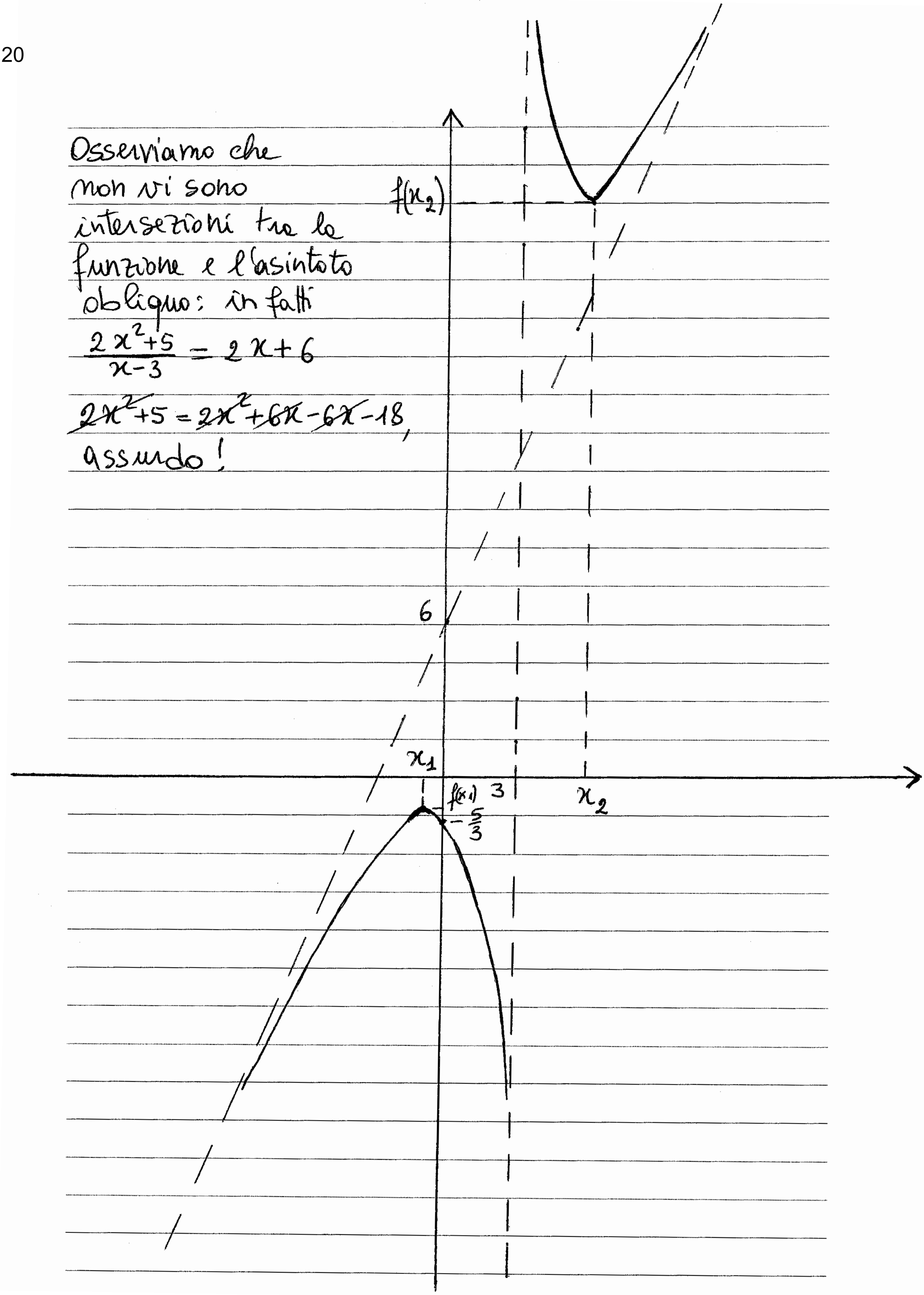
Tracciamo perciò un grafico approssimativo

Osserviamo che non vi sono intersezioni tra la funzione e l'asintoto obliquo: infatti

$$\frac{2x^2+5}{x-3} = 2x+6$$

$$\cancel{2x^2}+5 = \cancel{2x^2}+\cancel{6x}-\cancel{6x}-18,$$

assurdo!



COMPITO R – Quinta verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + |x^2 - 1|}$$

e tracciarne un grafico approssimativo.

**Risoluzione (giustificare le affermazioni!)**

Si osservi per prima cosa che $f$ è pari. Basta studiarla per $x \geq 0$.
Osserviamo inoltre che

$$|x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{per } |x|<1 \\ x^2-1 & \text{per } |x| \geq 1, \end{cases}$$

da cui

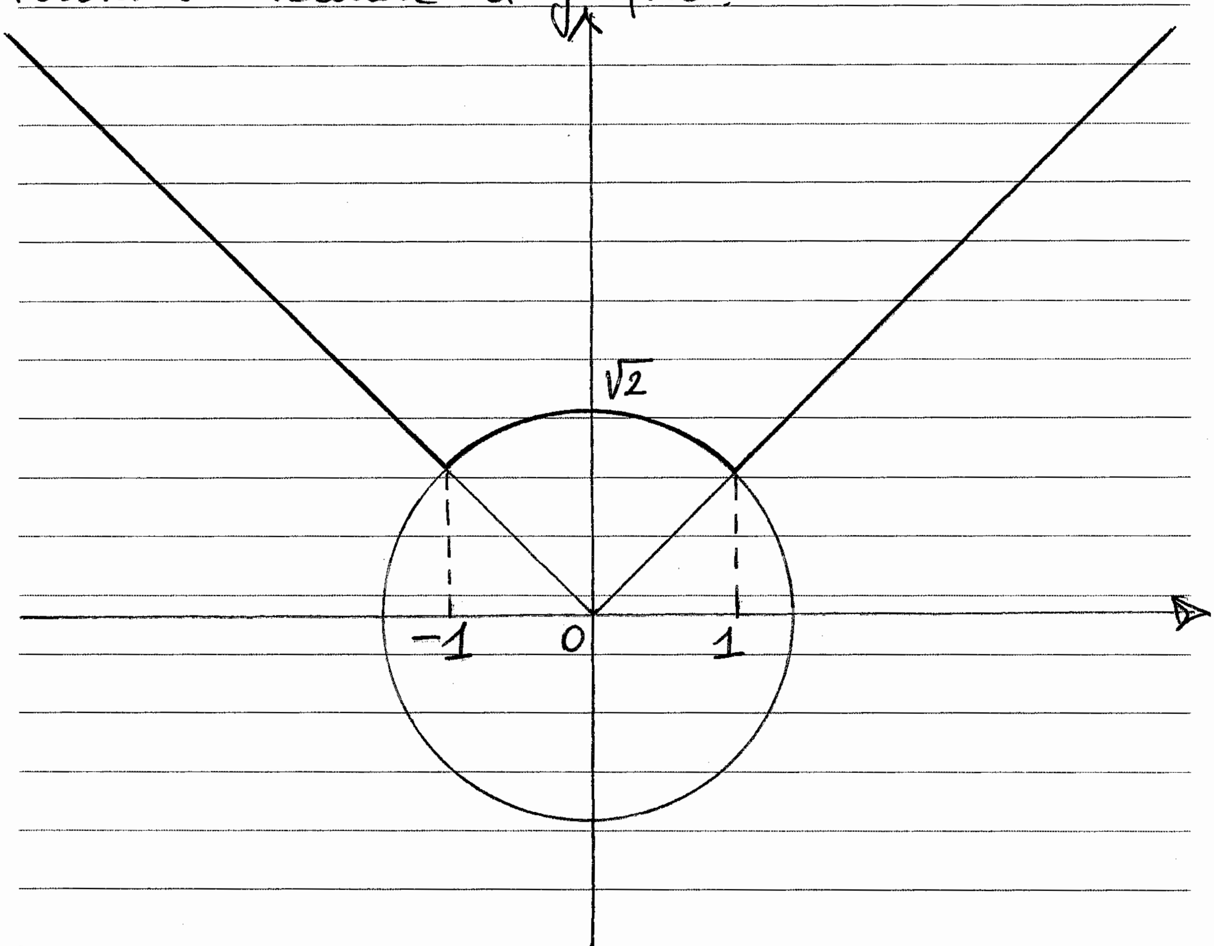
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x^2} & \text{per } |x|<1 \\ |x| & \text{per } |x| \geq 1 \end{cases}$$

La $f$ è definita su tutto $\mathbb{R}$.
Lo studio della funzione è a questo punto banale:

a) $y = \sqrt{2-x^2}$ per $|x|<1$ è un arco di circonferenza, visto che $y^2+x^2=2$;

b) $y = |x|$ per $|x| \geq 1$ sono semirette che stanno sulle bisettrici.

Possiamo tracciare il grafico:




Si osservi che nei punti $\pm 1$ la derivata destra e sinistra sono diverse (punti angolosi)

Poichè la circonferenza è di raggio $\sqrt{2}$, il massimo relativo in $x_0 = 0$ è t.c. $f(0) = \sqrt{2}$.

Si osservi infine che il grafico questa volta <u>non</u> è approssimativo!

COMPITO A – Sesta verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio

Calcolare, facendo uso del Teorema di de L'Hospital, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^2)}{\sin(x^2)}$$

**Risoluzione** Il limite proposto è della forma $\frac{0}{0}$ e la regolarità delle funzioni (numeratore e denominatore) permette di applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x^2)}{\operatorname{sen} x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-2x}{1-x^2}}{2x\cos(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(x^2-1)\cos(x^2)} = -1$$

## Esercizio

Sia data la funzione

$$f(t) = \frac{t^3}{3-t}$$

1. Verificare che l'origine $t_0 = 0$ è per tale funzione un punto stazionario;
2. classificare l'origine $t_0 = 0$ mediante il metodo delle derivate successive;
3. dire se la funzione $f$ ha un asintoto a $+\infty$.

## Risoluzione

Si ha

$$f'(t) = \frac{3t^2(3-t)+t^3}{(3-t)^2} = \frac{9t^2-2t^3}{(3-t)^2}$$

e si ha $f'(0)=0$, per cui $t_0 = 0$ è un punto stazionario.

Si ha poi

$$f''(t) = \frac{(18t-6t^2)(3-t)^2-(9t^2-2t^3)\cdot 2\cdot(t-3)}{(3-t)^4},$$

$$f''(0)=0, \quad f''(t) = \frac{-2t^3+18t^2-54t}{(t-3)^3}$$

$$f'''(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f''(t)-f''(0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}(-2t^2+18t-54)}{\cancel{t}(t-3)^3} = \frac{-54}{-27} = 2$$

Poichè la prima derivata non nulla è la derivata terza, l'origine è un punto di flesso (ascendente poichè $2>0$) orizzontale.

Infine $\lim_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = -\infty$, per cui non vi è asintoto a $+\infty$.

# COMPITO R – Sesta verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio

Calcolare, facendo uso del Teorema di de L'Hospital, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\left(1 + x\sin\left(x^2\right)\right)}{\arctan x^3}$$

**Risoluzione**

Il limite proposto è della forma $\frac{0}{0}$ e la regolarità delle funzioni (al numeratore e al denominatore) permette di applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\,\mathrm{sen}(x^2))}{\mathrm{arctg}\, x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\mathrm{sen}\, x^2 + 2x^2\cos x^2}{1+x\,\mathrm{sen}\, x^2}}{\dfrac{3x^2}{1+x^6}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^6}{3(1+x\,\mathrm{sen}\, x^2)} \cdot \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{sen}\, x^2}{x^2} + 2\cos x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(1+2) = 1$$

## Esercizio

Sia data la funzione

$$f(t) = \frac{t^2}{t^4+1}$$

1. Verificare che l'origine $t_0 = 0$ è per tale funzione un punto stazionario;
2. classificare l'origine $t_0 = 0$ mediante il metodo delle derivate successive;
3. dire se la funzione $f$ ha un asintoto a $-\infty$ e $+\infty$.

### Risoluzione

Si ha

$$f'(t) = \frac{2t(t^4+1) - 4t^5}{(t^4+1)^2} = \frac{2t - 2t^5}{(t^4+1)^2}$$

e si ha $f'(0) = 0$, per cui $t_0 = 0$ è un punto stazionario. Si ha poi

$$f''(t) = \frac{(2-10t^4)(t^4+1)^2 - (2t-2t^5)\cdot 2(t^4+1)\cdot 4t^3}{(t^4+1)^4},$$

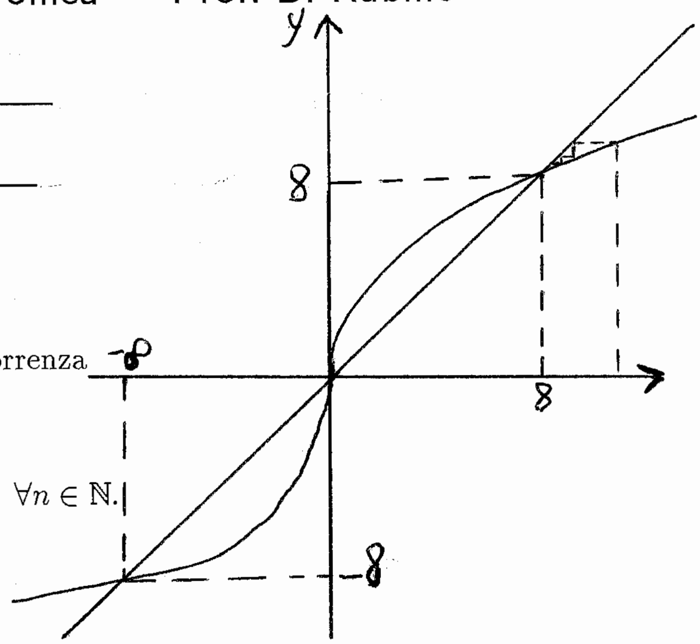
$f''(0) = 2$. Poiché la prima derivata non nulla è la derivata seconda e si ha $f''(0) > 0$, l'origine è un punto di minimo relativo (in realtà assoluto visto che $f(0) = 0$ e $f(t) > 0$ per $t \neq 0$).

Si ha poi $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale (a $+\infty$ e $-\infty$) per la funzione.

COMPITO A – Settima verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:____________

Matricola (o data di nascita):___




## Esercizio 1

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 10 \\ a_{n+1} = 4\sqrt[3]{a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Risoluzione**

Sia $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$,

La funzione è continua e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Punti fissi:
$f(x) = x \Longleftrightarrow 4\sqrt[3]{x} = x \Longleftrightarrow 64x = x^3 \Longleftrightarrow x(x^2 - 64) = 0$,
le cui soluzioni sono $x = 0$, $x = \mp 8$.

Studiamo graficamente la successione. Dal grafico si intuiscono le seguenti proprietà: 1) $8 \leq a_n \leq 10$, 2) $\{a_n\}$ è decrescente.

Dimostriamo la (1) per induzione. Per $n = 0$ si ha $8 \leq a_0 = 10 \leq 10$ (verificato!). Assumiamo ora che $8 \leq a_n \leq 10$ (ipotesi induttiva). Allora $a_{n+1} = 4\sqrt[3]{a_n}$ verifica $a_{n+1} = 4\sqrt[3]{a_n} \geq 4\sqrt[3]{8} = 4 \cdot 2 = 8$ e $a_{n+1} = 4\sqrt[3]{a_n} \leq 4\sqrt[3]{10} < 10$, per cui $a_{n+1} \in [8, 10]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ per il principio di induzione.

Dimostriamo la (2). Essendo $a_n \in [8, 10]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $f(a_n) \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (dallo studio del grafico di $f(x)$ confrontato con la bisettrice). Quindi $a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, cioè $\{a_n\}$ è decrescente. Allora $\{a_n\}$, per $n \to \infty$, ammette come limite l'estremo inferiore di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tale valore, visto che $\{a_n\}$ è inferiormente limitata, sarà compreso in $[8, 10]$. Dovendo essere un punto fisso della $f$, si ha $\lim_{n \to \infty} a_n = 8$.

## Esercizio 2

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = te^t \cos(2t)$$

### Risoluzione

Integriamo due volte per parti

$$\int t\, e^t \cos(2t)\, dt = t\, e^t \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \frac{1}{2}\int e^t (t+1) \operatorname{sen}(2t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} t\, e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{e^t}{2}(t+1)\frac{\cos(2t)}{2} + \frac{1}{2}\int -e^t (t+2)\frac{\cos(2t)}{2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} t\, e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{e^t}{2}(t+1)\frac{\cos(2t)}{2} - \frac{1}{4}\int t\, e^t \cos(2t)\, dt$$

$-\frac{1}{2}\int e^t \cos(2t)\, dt$. Il primo dei due integrali è uguale a quello dal quale siamo partiti. Riportandolo a primo membro:

$$\frac{5}{4}\int t\, e^t \cos(2t)\, dt = -\frac{1}{2}\int e^t \cos(2t)\, dt + \frac{1}{2} t\, e^t \operatorname{sen}(2t)$$

$+\frac{e^t}{4}(t+1)\cos(2t)$. Resta da calcolare $\int e^t \cos(2t)\, dt =$ per parti

$= e^t \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} - \int e^t \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\, dt = \frac{1}{2} e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4} e^t \cos(2t)$

$-\int e^t \frac{\cos(2t)}{4}\, dt$ e riportandolo a primo membro

$\int e^t \cos(2t)\, dt = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2} e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4} e^t \cos(2t)\right)$. Tornando al nostro integrale si ha

$$\int t\, e^t \cos(2t)\, dt = -\frac{8}{25}\left(\frac{1}{2} e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4} e^t \cos 2t\right) + \frac{2}{5} t\, e^t \operatorname{sen}(2t) + \frac{e^t}{5}(t+1)\cos(2t) + k,$$

$k \in \mathbb{R}$.

## Esercizio 3

Calcolare, se ció ha senso, il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{t^2 - 1}\, dt$$

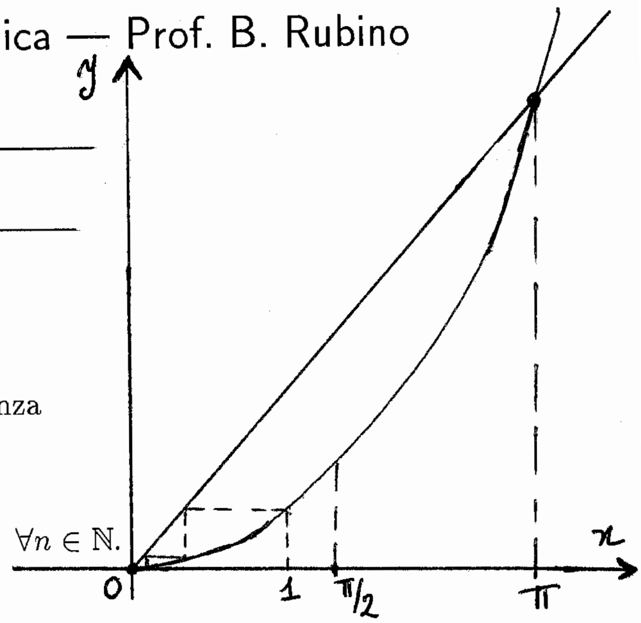
### Risposta

La funzione integranda non è definita in $(-1, 0)$ per cui l'integrale non ha senso

COMPITO R – Settima verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:________________

Matricola (o data di nascita):_______




## Esercizio 1

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n - \sin(a_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**Risoluzione**

Sia $f(x) = x - \operatorname{sen} x$. La funzione è continua e definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Punti fissi: $f(x) = x \iff \operatorname{sen} x = 0$, ovvero per $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Inoltre $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Un grafico approssimativo della funzione nell'intervallo $[0, \pi]$ è riportato in figura. Si osservi in particolare che in $[0, \pi/2)$ si ha anche $f'(x) < 1$. Studiamo graficamente la successione. Dal grafico si intuiscono le seguenti proprietà: 1) $a_n \in [0, 1]$, 2) $\{a_n\}$ è decrescente. Dimostriamo la (1) per induzione. Per $n = 0$ si ha $1 = a_0 \in [0, 1]$ (verificato!). Assumiamo ora $a_n \in [0, 1]$ (ipotesi induttiva). Allora, visto che $f$ è non decrescente, si ha $a_{n+1} = f(a_n) \geq f(0) = 0$ e $a_{n+1} = f(a_n) \leq f(1) = 1 - \operatorname{sen}(1) < 1$, per cui $a_n \in [0, 1]$ per il principio di induzione.

Dimostriamo la (2). Essendo $a_n \in [0, 1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $f(a_n) \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (dallo studio del grafico di $f(x)$ confrontato con la bisettrice). Quindi $a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, cioè $\{a_n\}$ è decrescente. Allora $\{a_n\}$, per $n \to \infty$, ammette come limite l'estremo inferiore di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Tale valore, visto che $\{a_n\}$ è inferiormente limitata, sarà compreso in $[0, 1]$. Dovendo essere un punto fisso della $f$, si ha $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

## Esercizio 2

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \cos(\log(t))$$

**Risoluzione**

Integrando per parti si ha

$$\int 1 \cdot \cos(\log(t))\,dt = t\cos(\log(t)) + \int t\,\frac{1}{t}\,\mathrm{sen}(\log(t))\,dt$$

$$= t\cos(\log(t)) + t\,\mathrm{sen}(\log(t)) - \int t\,\frac{1}{t}\cos(\log(t))\,dt$$

e riportandolo a primo membro si ottiene

$$\int \cos(\log(t))\,dt = \frac{1}{2}t\cos(\log(t)) + \frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(\log(t)) + k,$$

$k \in \mathbb{R}$.

## Esercizio 3

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x-5}\,dx$$

OSS.: l'esercizio può essere ripreso in esame se si introduce nel corso la nozione di "integrale generalizzato".

**Risposta**

Poichè $x^2+4x-5 = (x+5)(x-1)$ che si annulla in $x=1$, la funzione integranda non è limitata in $[0,2]$ e non possiamo procedere con il calcolo dell'integrale.

COMPITO A – Ottava verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):_____________________

## Esercizio 1

Risolvere l'equazione

$$\bar{z}^5 = \frac{1}{(1+i)^3}$$

**Risoluzione**

Si ha $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Poniamo $z = \rho e^{i\vartheta}$. L'equazione diviene

$\rho^5 e^{-5i\vartheta} = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{-3i\frac{\pi}{4}}$, da cui

$\rho^5 = \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{8}}$, ovvero $\rho = \frac{1}{\sqrt[10]{8}}$

e

$-5i\vartheta = -3i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

$5\vartheta_n = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

$\vartheta_n = \frac{3}{20}\pi + \frac{2}{5}\pi n$, $n = -2, -1, 0, 1, 2$.

Abbiamo quindi cinque soluzioni

$z_n = \frac{1}{\sqrt[10]{8}} e^{i\vartheta_n}$, $n = -2, -1, 0, 1, 2$.

## Esercizio 2

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

**Risoluzione**

Usiamo le tecniche delle funzioni razionali:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3},$$

$$x = a(x+2)(x+3) + b(x+1)(x+3) + c(x+1)(x+2),$$

da cui

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 5a+4b+3c=1 \\ 6a+3b+2c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c=0 \\ 6a+3b+2c=0 \\ a-b-c=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a=-1 \\ a+b+c=0 \\ 6a+3b+2c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1/2 \\ 3b+2c=3 \\ b+c=1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ b=2 \\ c=\frac{1}{2}-b=\frac{-3}{2} \end{cases}$$

Perciò,

$$\int f(x)\,dx = \int -\frac{1}{2}\frac{dx}{x+1} + \int 2\frac{dx}{x+2} + -\int \frac{3}{2}\frac{dx}{x+3} = -\frac{1}{2}\log|x+1| + 2\log|x+2| + -\frac{3}{2}\log|x+3| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

COMPITO R – Ottava verifica di Analisi Matematica 1
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica — Prof. B. Rubino

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio 1

Determinare le soluzioni (in $\mathbb{C}$) dell'equazione

$$z^3 - z|z|^2 + z = 0.$$

**Risoluzione**

Si ha $z(z^2 - |z|^2 + 1) = 0$,
verificata per $z = 0$ e quando $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$.

Cerchiamo una soluzione di quest'ultima della forma
$z = a + ib$: $|z|^2 = a^2 + b^2$, $z^2 = a^2 - b^2 + 2iab$
e sostituendo si ha

$$\cancel{a^2} - b^2 + 2iab - \cancel{a^2} - b^2 + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 2b^2 = 1 \\ ab = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = 0 \end{cases}$$

Abbiamo perciò trovato le tre soluzioni

$$z_1 = 0, \quad z_2 = -i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad z_3 = i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

## Esercizio 2

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{2x+4}{x^2+5x+4}$$

**Risoluzione**

Usiamo le tecniche delle funzioni razionali:

$x^2+5x+4 = (x+1)(x+4)$, da cui

$$\frac{2x+4}{(x+1)(x+4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+4}$$

$$2x+4 = a(x+4)+b(x+1)$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 4a+b=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a=2 \\ a+b=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=2/3 \\ b=2-a=\frac{4}{3} \end{cases}$$

Perciò

$$\int f(x)\,dx = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+4} =$$

$$= \frac{2}{3}\log|x+1| + \frac{4}{3}\log|x+4| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

# COMPITO Modello A – Analisi Matematica 1 (6 CFU)
# Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – A.A. 2002/03

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):_____________________

## Esercizio 1

Dato l'insieme

$$\mathbf{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x-1}{x-7} \right| > 1 \right\},$$

stabilire, se esistono (giustificando la risposta), $\inf \mathbf{D}$, $\sup \mathbf{D}$, $\min \mathbf{D}$, $\max \mathbf{D}$.

## Esercizio 2

Calcolare il

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2+n^2}}{3n-1}$$

## Esercizio 3

Calcolare (senza fare uso della regola di De L'Hospital)

$$\lim_{x \to -\infty} \left( \sqrt{x^2+2x+4} - x \right)$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3-1}{x}}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5

Facendo uso della regola di De L'Hospital calcolare

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{1 + 2\log(\sin x)}$$

# Esercizio 6

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \\ a_{n+1} = a_n \sin(a_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

# Esercizio 7

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

# Esercizio 8

Determinare una primitiva della funzione

$$f(t) = t^5 e^{-t^2}$$

# Esercizio 9

Trovare tutte le soluzioni dell'equazione ($z \in \mathbb{C}$)

$$(1+i)\bar{z}^3 = 4\sqrt{2}\, z$$

Correzione MODELLO A (A.A. 2002/03) – Prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) – DOCENTE: B. RUBINO

ESERCIZIO 1 – Risolviamo la disequazione

$\left|\frac{x-1}{x-7}\right| > 1$, ovvero le due disequazioni

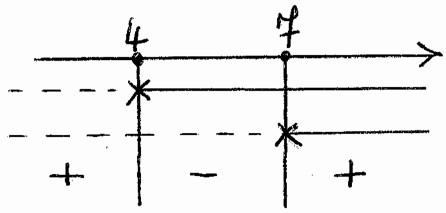
$$\frac{x-1}{x-7} < -1$$

$$\frac{x-1+x-7}{x-7} < 0$$

$$\frac{2x-8}{x-7} < 0$$

$2x-8>0$ se $\boxed{x>4}$

$x-7>0$ se $\boxed{x>7}$




verificata per $\boxed{4<x<7}$

$$\frac{x-1}{x-7} > 1$$

$$\frac{x-1-x+7}{x-7} > 0$$

$$\frac{6}{x-7} > 0$$

verificata se $x-7>0$, ovvero per $\boxed{x>7}$

In conclusione la disequazione di partenza è verificata per $x>4$ ma $x \neq 7$. Quindi

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x>4,\ x \neq 7\}$$

Si ha di conseguenza:

a) $\inf D = 4$ e non esiste il $\min D$;

b) $\sup D = +\infty$ e non esiste il $\max D$.

ESERCIZIO 2 – Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2+n^2}}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}$$

ESERCIZIO 3 – Risulta

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+4} - x\right) = +\infty \text{ visto che}$$

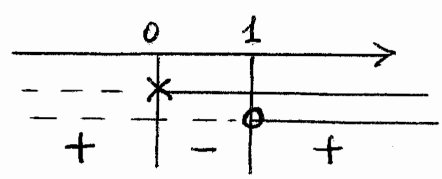
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x+4} = +\infty$ e b) $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$.

ESERCIZIO 4 – Per stabilire il dominio di definizione risolviamo la disequazione

$$\frac{x^3-1}{x} \geq 0$$

a) $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1) \geq 0$ se e solo se $x-1 \geq 0$, ovvero $\boxed{x \geq 1}$

b) $\boxed{x > 0}$




Perciò $D = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0 \ \text{e} \ x \geq 1\}$.

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} = +\infty, \quad f(1) = 0$$

Proviamo a vedere se vi sono asintoti obliqui a $\mp\infty$.

a) Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = -1, \quad m_1 = -1$$

e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - m_1 x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} + x\right) =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2} - \frac{1}{x} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x} = 0$$

per cui $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$

b) Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}} = 1, \quad m_2 = +1$$

e $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - m_2 x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 - \frac{1}{x}} - x\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2} - \frac{1}{x} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2 - 1/x} + x} = 0,$$

per cui $y = x$ è asintoto a $+\infty$.

Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3-1}{x}\right)^{-1/2} \frac{3x^2 \cdot x - (x^3-1)}{x^2} =$$

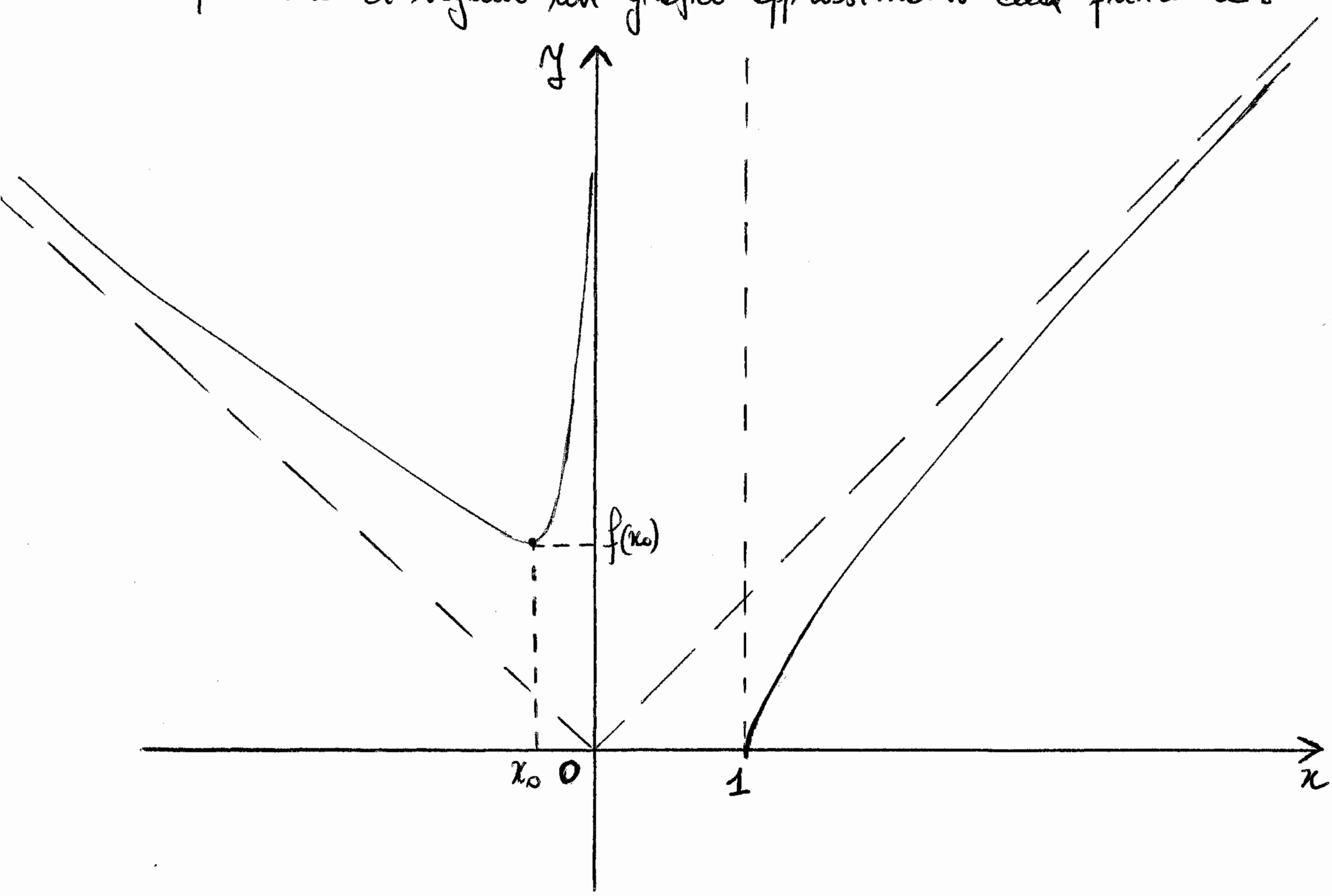
$$= \frac{1}{2} \; \frac{2x^3+1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$$

$f'(x) \geq 0$ in $D \setminus \{1\}$ per

$2x^3+1 \geq 0 \qquad\qquad x \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = x_0$

e $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty$.

Riportiamo di seguito un grafico approssimativo della funzione.



Per migliorare il grafico verifichiamo se vi sono intersezioni con gli asintoti obliqui:

a) $\begin{cases} x<0 \\ f(x) = -x \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x^3-1}{x} = x^2 \end{cases}$

assurdo

b) $\begin{cases} x>0 \\ f(x) = x \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x>0 \\ \dfrac{x^3-1}{x} = x^2 \end{cases}$

assurdo.

Non vi sono intersezioni con gli asintoti obliqui.
Si ha poi

$$f(x_0) = \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}-1}{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}} = \sqrt[6]{\frac{27}{4}}$$

ESERCIZIO 5 — Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1+2\log(\operatorname{sen} x)} =$$ trattandosi di forma indeterminata $= \frac{\infty}{\infty}$ che verifica le ipotesi per applicare De L'Hospital,

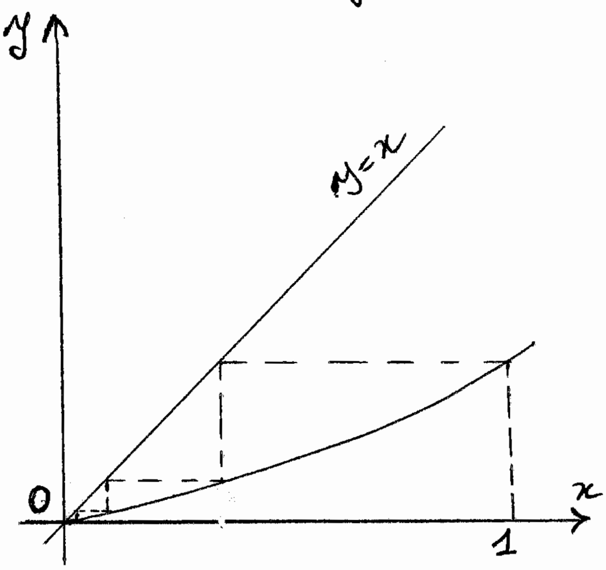
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{2\,\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\cos x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{2}$$

visto che $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (limite notevole)

ESERCIZIO 6 – Consideriamo la funzione $f(x)=x\,\mathrm{sen}\,x$, continua e definita $\forall x\in\mathbb{R}$. Si ha

$f'(x)=\mathrm{sen}\,x+x\cos x$, $f''(x)=2\cos x-x\,\mathrm{sen}\,x=2\cos x\left(1-\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\,x\right)$

Punti fissi: $f(x)=x \iff \bar{x}=0$ oppure $\mathrm{sen}\,x=1$, cioè $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Un grafico approssimativo della funzione nell'intervallo $[0,1]$ è mostrato in figura. In particolare in tale intervallo $f'(x)\geq 0$, $f''(x)\geq 0$. Studiamo graficamente la successione. Dal grafico si intuiscono le seguenti proprietà:




1) $a_n\in[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$,

2) $\{a_n\}$ è decrescente.

Dimostriamo la (1) per induzione. Per $n=0$ si ha $1=a_0\in[0,1]$ (verificato!).

Assumiamo ora $a_n\in[0,1]$ (ipotesi induttiva). Allora, visto che $f$ è non decrescente, si ha $a_{n+1}=f(a_n)\geq f(0)=0$ e $a_{n+1}=f(a_n)\leq f(1)=\mathrm{sen}(1)<1$, per cui $a_n\in[0,1]$ per il principio di induzione.

Dimostriamo la (2). Essendo $a_n\in[0,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}$, risulta $f(a_n)\leq a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (dallo studio del grafico di $f(x)$ confrontato con la bisettrice). Quindi $a_{n+1}=f(a_n)\leq a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, cioè $\{a_n\}$ è decrescente.

Allora $\{a_n\}$, per $n\to+\infty$, ammette come limite l'estremo inferiore di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tale valore, visto che $\{a_n\}$ è inferiormente limitata, sarà compreso in $[0,1]$. Dovendo essere un punto fisso della $f$, si ha $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

ESERCIZIO 7 – La funzione integranda è razionale. Risulta

$x^4+1=0$ per

$x_1 = e^{i\pi/4}$, $\bar{x}_1 = e^{-i\pi/4}$

$x_3 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $\bar{x}_3 = e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

$$x^4+1 = \left(x-e^{i\pi/4}\right)\left(x-e^{-i\pi/4}\right)\left(x-e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(x-e^{-i\frac{3}{4}\pi}\right)$$
$$= \left(x^2+1-2x\,\mathrm{Re}\left(e^{i\pi/4}\right)\right)\left(x^2+1-2x\,\mathrm{Re}\,e^{i\frac{3}{4}\pi}\right)$$
$$= \left(x^2+1-\sqrt{2}\,x\right)\left(x^2+1+\sqrt{2}\,x\right),$$

per cui cerchiamo una decomposizione della forma

$$\frac{x}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+1-\sqrt{2}\,x} + \frac{Cx+D}{x^2+1+\sqrt{2}\,x}$$
$$= \frac{(Ax+B)(x^2+\sqrt{2}\,x+1)+(Cx+D)(x^2+1-\sqrt{2}x)}{x^4+1}$$

$$x = Ax^3 + A\sqrt{2}\,x^2 + Ax + Bx^2 + B\sqrt{2}x + B +$$
$$+ Cx^3 - C\sqrt{2}\,x^2 + Cx + Dx^2 - D\sqrt{2}x + D$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A\sqrt{2}-C\sqrt{2}+B+D=0 \\ A+B\sqrt{2}+C-D\sqrt{2}=1 \\ B+D=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=-A \\ D=-B \\ 2A\sqrt{2}=0 \\ 2B\sqrt{2}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ D = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ A = 0 \\ C = 0 \end{cases}$$

Perciò
$$\frac{x}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

si ha
$$\int \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{(\sqrt{2}\,x-1)^2+1}$$
e posto $t=\sqrt{2}\,x-1$, $dt=\sqrt{2}\,dx$, si ha
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,x-1\right)+k_1,\quad k_1\in\mathbb{R}.$$

Analogamente
$$\int \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{dx}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{(\sqrt{2}\,x+1)^2+1}$$
e posto $t=\sqrt{2}\,x+1$, $dt=\sqrt{2}\,dx$, si ha
$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\,x+1)+k_2,\quad k_2\in\mathbb{R}$$

Perciò
$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,x-1\right)-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,x+1\right)\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right)-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(-1)-\operatorname{arctg}(1)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\right)+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}+1\right)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}-1\right).$$

ESERCIZIO 8 — Integriamo per parti più volte:

$$\int t^5 e^{-t^2} dt = \int \left(-\frac{1}{2} t^4\right)\left(-2t e^{-t^2}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} t^4 e^{-t^2} - \int -2t^3 e^{-t^2} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} t^4 e^{-t^2} + \int -t^2 \left(-2t e^{-t^2}\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{2} t^4 e^{-t^2} - t^2 e^{-t^2} - \int -2t e^{-t^2} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} t^4 e^{-t^2} - t^2 e^{-t^2} - e^{-t^2} + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 9 — Riscriviamo l'equazione usando la rappresentazione (dei numeri complessi) esponenziale:

$z = \rho \, e^{i\vartheta}, \quad (1+i) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$$\cancel{\sqrt{2}}\, e^{i\pi/4} \rho^3 e^{-3i\vartheta} = 4\cancel{\sqrt{2}}\, \rho\, e^{i\vartheta}$$

a) $\rho = 0$, $\vartheta$ qualunque è una soluzione

b) sia $\rho \neq 0$. Allora $\rho^2 = 4$, ovvero $\underline{\underline{\rho = 2}}$

Inoltre $e^{4i\vartheta} = e^{i\pi/4}$ ovvero

$4\vartheta_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \vartheta_k = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \qquad k = 0, 1, 2, 3$

Le soluzioni sono quindi

$z_0 = 0, \; z_k = 2e^{i\vartheta_k}, \; \vartheta_k = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, \; k = 0, 1, 2, 3.$

# COMPITO Modello B – Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
### Docente: Bruno Rubino – A.A. 2002/03

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):_____________________

## Esercizio 1

Dire per quali numeri naturali $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} \geq 10n$$

## Esercizio 2

Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-\pi}{n+\pi}\right)^n$$

## Esercizio 3

Calcolare (senza fare uso della regola di De L'Hospital)

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\log(x+1) - \log x\right)$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$$

tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5

Facendo uso della regola di De L'Hospital calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log\left(x^2-3\right)}{x^2+3x-10}$$

# Esercizio 6

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} + 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

# Esercizio 7

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_0^1 e^x \sin x \cos x \, dx$$

# Esercizio 8

Calcolare la primitiva della funzione

$$f(x) = x \log \sqrt{1 + x^2}$$

che vale 0 per $x = 1$.

# Esercizio 9

Calcolare la parte reale del numero complesso

$$\left( -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^7$$

Correzione compito MODELLO B di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU), A.A. 2002/03 – DOCENTE: B. RUBINO

ESERCIZIO 1 – Usando la definizione di $\binom{n}{k}$, $k \leq n$, si ha

$$\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{n!}{3!(n-3)!} \geq 10n, \qquad \underline{n \geq 3}$$

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \geq 10n$$

Visto che $n \geq 3$ possiamo dividere per $n$ ottenendo

$$\cancel{3n}-3+n^2-\cancel{3n}+2-60 \geq 0$$
$$n^2-61 \geq 0$$

verificata $\forall n \in \mathbb{N}: n \geq 8$.

ESERCIZIO 2 – Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-\pi}{n+\pi}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2\pi}{n+\pi}\right)^{n+\pi-\pi}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2\pi}{n+\pi}\right)^{n+\pi}\cdot\left(1-\frac{2\pi}{n+\pi}\right)^{-\pi}\right]=e^{-2\pi},$$

dato che $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)^x=e^{-\alpha}$.

ESERCIZIO 3 — Risulta

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\log(x+1)-\log(x)\right)=\lim_{x\to\infty} x\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\log e=1.$$

ESERCIZIO 4 — Il dominio di definizione è $x\neq 0$.
Si ha $f(x)>0$ per ogni $x$ appartenente al dominio di definizione.
Risulta poi

$$\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=0,\quad \lim_{x\to-\infty}\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=1,$$

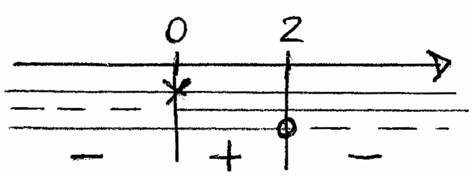
$$\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=1.$$ La retta $y=1$ è, quindi, asintoto orizzontale.

Studio della derivata:

$$f'(x)=\frac{x^2-(x-1)2x}{x^4}\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)=$$

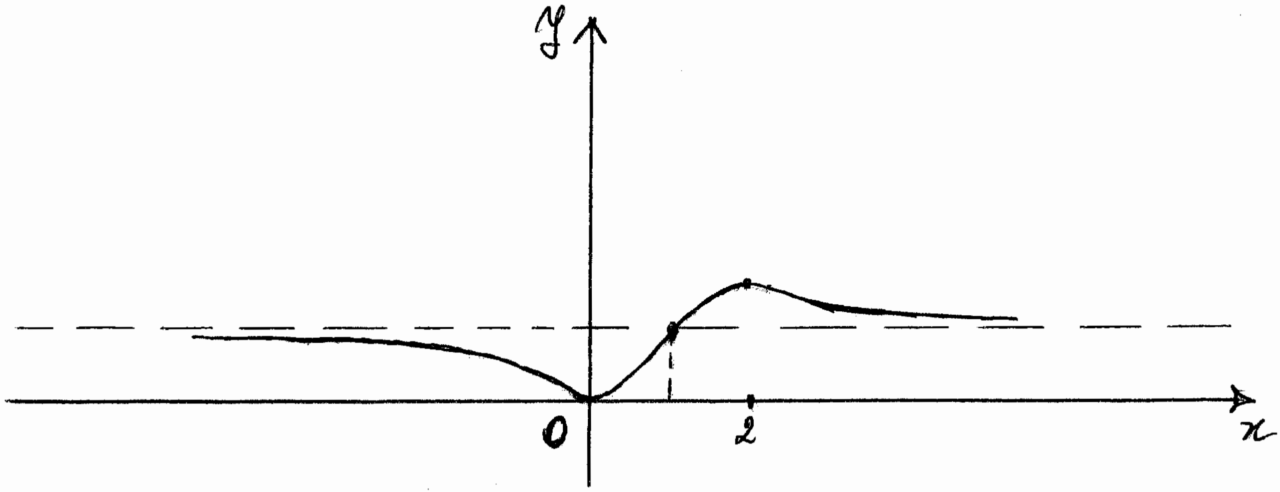
$$=\exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)\frac{-x^2+2x}{x^4}\geqslant 0 \quad \text{quando}$$

$$\frac{x(2-x)}{x^4}\geqslant 0$$




Possiamo quindi tracciare un grafico approssimativo.

$$f(2)=\exp\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{e}$$




Per migliorare il grafico vicino a $x_0=0$, calcoliamo $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, visto che l'esponenziale tende a

zero con un ordine che ha la meglio rispetto al polinomio.
$x_0 = 0$ è minimo relativo (e assoluto)
Si osservi poi che
$f(x) = 1$ per $\bar{x} = 1$.

ESERCIZIO 5 — Si tratta di una forma di tipo $\frac{0}{0}$ a cui si può applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x^2-3)}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2-3}}{2x+3} =$$

$$= \frac{\frac{4}{4-3}}{7} = \frac{4}{7}$$

ESERCIZIO 6 — Sia $f(x) = x + \frac{1}{x} + 1$.

Proviamo a vedere se vi sono punti fissi di $f$, $f(x) = x$, ovvero

$x + \frac{1}{x} + 1 = x$, ovvero $\frac{1}{x} = -1$, cioè

$\boxed{\bar{x} = -1}$ Osserviamo d'altra parte che, se $I = [1, +\infty)$ si ha

$$x \in I \Rightarrow f(x) \in [1, +\infty) = I.$$

Si osservi che la successione non può convergere visto che in $I$ non vi sono punti fissi.

Dimostriamo che la successione diverge a $+\infty$.

Infatti, la successione è monotona crescente:

$$a_{n+1} > a_n \iff a_n + \frac{1}{a_n} + 1 > a_n$$

$$\iff \frac{1}{a_n} + 1 > 0, \text{ sempre vero visto che } a_n \geq 1.$$

Visto che $a_n$ è monotone crescente e non vi sono punti uniti della $f$ in $I$, la successione tende a $+\infty$.

ESERCIZIO 7 — Calcoliamo intanto l'integrale indefinito:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int e^x \operatorname{sen}(2x) \, dx$$

Integrando ora per parti,

$$\frac{1}{2}\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{1}{2}e^x \operatorname{sen}(2x) - \int e^x \cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x \operatorname{sen}(2x) - e^x\cos(2x) - 2\int \operatorname{sen}(2x)\,e^x\,dx$$

Riportando l'ultimo integrale a primo membro si ha

$$\int e^x \operatorname{sen}(2x)\,dx = \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}e^x \operatorname{sen}(2x) - e^x\cos(2x)\right),$$

per cui

$$\int_0^1 e^x \operatorname{sen}x\cos x\,dx = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}e^x \operatorname{sen}(2x) - e^x\cos(2x)\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}e\operatorname{sen}2 - e\cos 2 + 1\right).$$

ESERCIZIO 8 – Integriamo per parti:

$$\int x\log\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x\log(1+x^2)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{4}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\int \frac{x^3+x-x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{4}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}\int\left(x - \frac{x}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{4}\log(1+x^2) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}\log(1+x^2) + k,\ k\in\mathbb{R}$$

Valutata per $x=1$ si ottiene

$$\frac{1}{4}\log 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\log 2 + k = 0,$$

ovvero $K = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\log 2$

Abbiamo perciò trovato la primitiva

$$P(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)\log(1+x^2) + \frac{1}{4}(1-x^2) - \frac{1}{2}\log 2$$

ESERCIZIO 9 – Sia $w = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

che in forma esponenziale si scrive

$w = e^{i\frac{2}{3}\pi}$. Se $z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^7$, si ha

$$z = w^7 = e^{i\frac{14}{3}\pi} = e^{i\frac{2}{3}\pi} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Perciò $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$.

# COMPITO A – Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 2 dicembre 2002

Cognome e nome:______________________________

Matricola (o data di nascita):______________________

## Esercizio 1

Dato l'insieme

$$\mathbf{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \; x = (-1)^n \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n, \; n \geq 1 \right\},$$

stabilire, se esistono (giustificando la risposta), $\inf \mathbf{D}$, $\sup \mathbf{D}$, $\min \mathbf{D}$, $\max \mathbf{D}$.

[suggerimento: può essere utile ricordare che la successione $x_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ è monotona crescente]

## Esercizio 2

Determinare le funzioni composte $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ e $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ dove

$$f(x) = 3x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1.$$

## Esercizio 3

Calcolare (senza fare uso della regola di De L'Hospital)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(2x)}{\tan(x^2)}$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \left(5x^2 - x|x|\right) e^{-x}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5

Facendo uso della regola di De L'Hospital calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x^2} - e^{-3x^2}}{\sin(x^2)}$$

# Esercizio 6

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ \\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

# Esercizio 7

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_1^e \log\left(t^2 + 2\right)\ dt$$

# Esercizio 8

Calcolare la primitiva della funzione

$$f(t) = \left(t^2 + 2\right)\sin(2t)$$

che vale 2 in $t_0 = 0$.

# Esercizio 9

Trovare tutte le coppie $(z, w)$ di numeri complessi soluzione del sistema

$$\begin{cases} z + w = 2 + i \\ \\ zw = 2i. \end{cases}$$

Correzione Compito A della prova scritta di Analisi Matematica 1 (6 CFU) del 2.12.02

ESERCIZIO 1 – Tenuto conto del suggerimento, e del limite notevole

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha \quad (\text{nel nostro caso } \alpha = 3)$$

si ha

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n \left(1+\frac{3}{n}\right)^n, \ n \geq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ -4, \ +\left(1+\frac{3}{2}\right)^2, \ \cdots \right\}$$

la successione $a_n = (-1)^n\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$

per gli $n$ pari tenderebbe verso $e^3$, per gli $n$ dispari verso $-e^3$

Abbiamo perciò

$$\inf D = -e^3, \quad \sup D = e^3$$

mentre non esistono $\min D$ e $\max D$ (in quanto $-e^3$ ed $e^3$ non appartengono a $D$).

Esercizio 2 – Risulta

a) $f(g(x)) = f(x^2+1) = 3(x^2+1) = 3x^2+3$

b) $g(f(x)) = g(3x) = (3x)^2+1 = 9x^2+1$.

ESERCIZIO 3 — Si ha, riconducendosi a limiti notevoli,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{\operatorname{tg}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{(2x)^2} \frac{x^2}{\operatorname{tg}(x^2)} \cdot \frac{(2x)^2}{x^2}$$

$= 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4$, avendo usato i limiti notevoli

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t} = 1, \quad \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1.$$

ESERCIZIO 4 — Il dominio di definizione di tale funzione è tutta la retta reale.
Tenuto conto che

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0, \end{cases}$$

possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2 e^{-x} & \text{per } x < 0 \\ 4x^2 e^{-x} & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Basta allora studiare intanto la funzione
$g(x) = x^2 e^{-x}$ per $x \in \mathbb{R}$.

La funzione $g$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Si ha

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \quad \text{poiché}$$

l'ordine di infinito dell'esponenziale è superiore a quello dei polinomi;

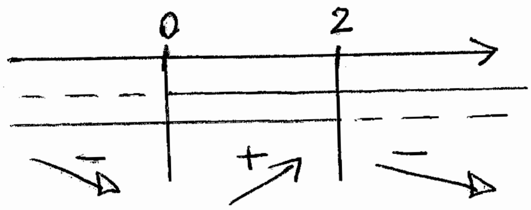
$\lim_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$ poiché prodotto di funzioni che tendono a $+\infty$.

Verifichiamo se esiste un asintoto obliquo a $-\infty$:

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} x e^{-x} = +\infty$, per cui non vi è asintoto obliquo.

Studio della derivata: si ha

$g'(x) = (2x - x^2) e^{-x} \geq 0$ per $x(2-x) \geq 0$,




verificata per $0 \leq x \leq 2$

Risulta

$g(0) = 0$, minimo (assoluto, visto che $g(x) \geq 0 \quad \forall x$)

$g(2) = 4e^{-2}$, max relativo.

Si osservi che per tracciare un grafico della $f$ dobbiamo

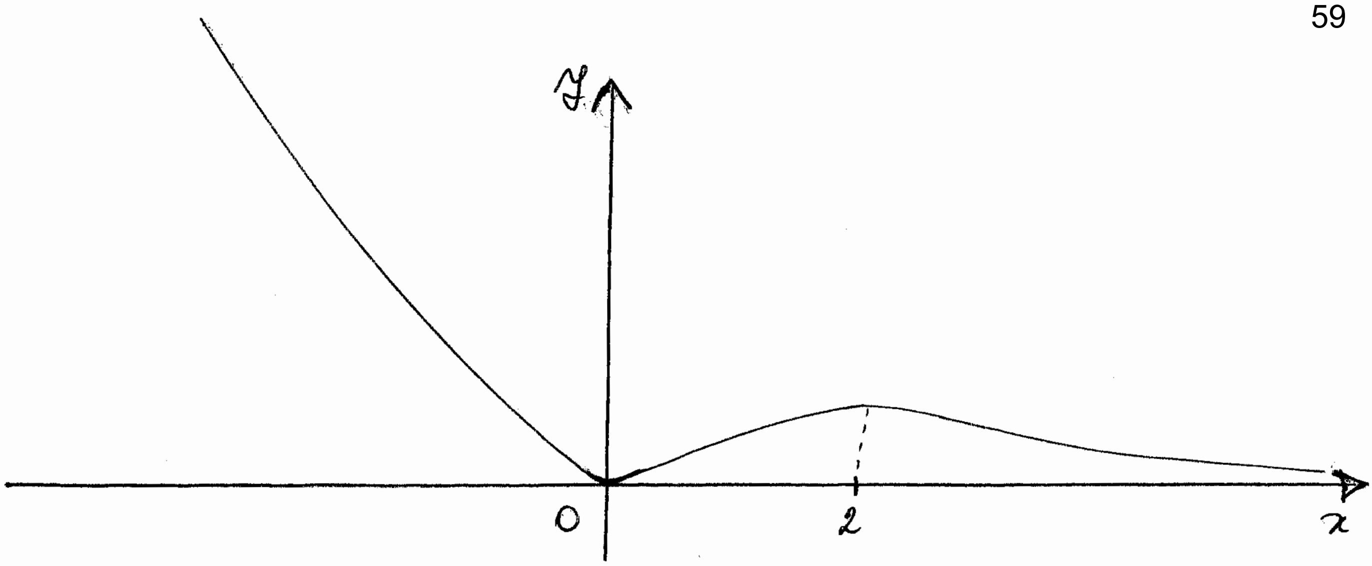
a) amplificare di un fattore 6 per le $x < 0$;

b) amplificare di un fattore 4 per le $x > 0$.

Il grafico della $f$ ha perciò:

a) un minimo assoluto $f(0) = 0$

b) un max relativo $f(2) = 16e^{-2}$




ESERCIZIO 5 — Si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2}-e^{-3x^2}}{\operatorname{sen}(x^2)} =$$ poichè trattasi di forma 0/0 alla quale si può applicare de L'Hopital,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4x e^{+2x^2}+6x e^{-3x^2}}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{4e^{2x^2}+6e^{-3x^2}}{2\cos(x^2)} =$$

$$= \frac{4+6}{2} = 5.$$

ESERCIZIO 6 — Consideriamo la funzione $f(x)=\sqrt{6+x}$. Si ha

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{6+x}}$$

Inoltre $f(x)=x$ per $\begin{cases} x \geq 0 \\ 6+x=x^2 \end{cases}$

$$x^2-x-6=0 \qquad x=\frac{1\mp\sqrt{1+24}}{2}=\frac{1\pm 5}{2}$$

$x_1=3$, $x_2=-2$. L'unico punto fisso è perciò $x_1=3$.

Studiamo graficamente la successione. Dal grafico si intuiscono le seguenti proprietà:

1) $a_n \in [2,3]$,

2) $\{a_n\}$ è crescente.

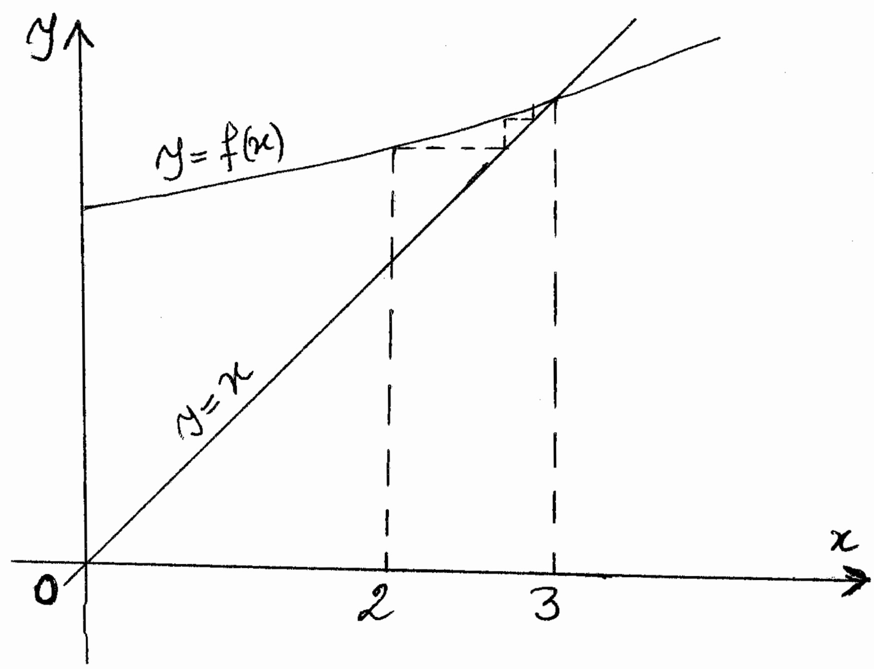
Dimostriamo la (1) per induzione. Per $n=0$ si ha $2 = a_0 \in [2,3]$ (verificato!). Assumiamo ora che $a_n \in [2,3]$ (ipotesi induttiva). Allora $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \leq \sqrt{6+3} = 3$ e $a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \geq$ $\geq \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2} > 2$, per cui $a_{n+1} \in [2,3]$ e

in base al principio di induzione $a_n \in [2,3]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dimostriamo la (2): essendo $a_n \in [2,3]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $f(a_n) \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (dallo studio del grafico di $f$ confrontato con la bisettrice).

Quindi $a_{n+1} = f(a_n) \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Allora $\{a_n\}$ ammette limite quando $n \to \infty$ coincidente con il suo estremo superiore. Tale limite sarà compreso in $[2,3]$. Dovendo essere un punto fisso della $f$, si ha

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.



ESERCIZIO 7 — Calcoliamo per prima cosa l'integrale indefinito per parti

$$\int \log(t^2+2)\,dt = t\log(t^2+2) - \int t\cdot\frac{2t}{t^2+2}\,dt$$

$$= t\log(t^2+2) - \int\left(2-\frac{4}{t^2+2}\right)dt =$$

$$= t\log(t^2+2) - 2t + \int \frac{2}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dt$$

$$= t\log(t^2+2) - 2t + 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}(t/\sqrt{2}) + k,\quad k\in\mathbb{R}$$

Perciò

$$\int_1^e \log(t^2+2)\,dt = e\log(e^2+2) - 2e + 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)$$

$$-\log(3) + 2 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

ESERCIZIO 8 — Procediamo per parti (due volte)

$$\int (t^2+2)\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = (t^2+2)\left(\frac{-\cos(2t)}{2}\right)$$

$$+\int \cancel{2}t\,\frac{\cos(2t)}{\cancel{2}}\,dt = -\frac{1}{2}(t^2+2)\cos(2t)$$

$$+\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)\,t - \int\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2t)\,dt = -\frac{1}{2}(t^2+2)\cos(2t)$$

$$+\frac{1}{2}t\,\mathrm{sen}(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) + k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

Valutiamo tale primitiva in $t_0 = 0$. Si ha

$$-\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4} + K = 2 \quad, \text{ da cui } K = \frac{11}{4}$$

La primitiva richiesta è, quindi,

$$P(t) = -\frac{1}{2}\left(t^2+2\right)\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(2t) + $$
$$+\frac{1}{2}\, t\, \operatorname{sen}(2t) + \frac{11}{4}$$

ESERCIZIO 9 — L'esercizio è particolarmente semplice: si tratta di tutti i numeri complessi $z$ e $w$ la cui somma fa $(2+i)$ e il cui prodotto $2i$. Tali numeri complessi sono perciò le soluzione dell'equazione di secondo grado

$$v^2 - s v + p = 0,$$

dove $s = (2+i)$ e $p = 2i$. Risulta

$$v = \frac{s \mp \sqrt{s^2 - 4p}}{2} = \frac{2+i + \sqrt{4+4i-1-8i}}{2}$$
$$= \frac{2+i \mp \sqrt{(2-i)^2}}{2}, \quad \text{cioè}$$

$$v_1 = \frac{2+i+2-i}{2} = 2 \,, \quad v_2 = \frac{2+i-2+i}{2} = i$$

Le due possibili coppie sono quindi (era ovvio sin dall'inizio) $(2, i)$ e $(i, 2)$.

# COMPITO A – Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 13 dicembre 2002

Cognome e nome:____________________________

Matricola (o data di nascita):____________________

## Esercizio 1

Dopo aver verificato che la funzione

$$f:\ (-\infty, \pi] \longrightarrow [-1, +\infty)$$

definita come

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{per } x \leq 0, \\ \cos x & \text{per } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

è invertibile, trovarne la funzione inversa.

## Esercizio 2

Dato il sottoinsieme della retta reale dato da

$$\mathbf{D} = \left\{ \sqrt{2}, -1, \pi, \pi^2, \frac{3}{2} \right\},$$

1. stabilire, se esiste, l'estremo superiore;
2. stabilire, se esiste, il massimo;
3. stabilire se sulla retta reale esistono punti di accumulazione per **D** e in tal caso dire quali sono.

## Esercizio 3

Calcolare (senza fare uso della regola di De L'Hospital)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n\sqrt{n} + n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2 \log\left(\frac{1}{n}\right) + n \arctan n}$$

# Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 3x|x|)}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

# Esercizio 5

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{|x-1|}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

# Esercizio 6

Facendo opportunamente uso della regola di De L'Hospital calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x + (x-1)^2}{\sin(\pi x) + x^2 - 1}$$

# Esercizio 7

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-2t^2}}{\sin t} \, dt$$

# Esercizio 8

Calcolare la primitiva della funzione

$$f(t) = t \sin t + \frac{1}{(t+1)(t-2)}$$

che vale 0 in $t_0 = 0$.

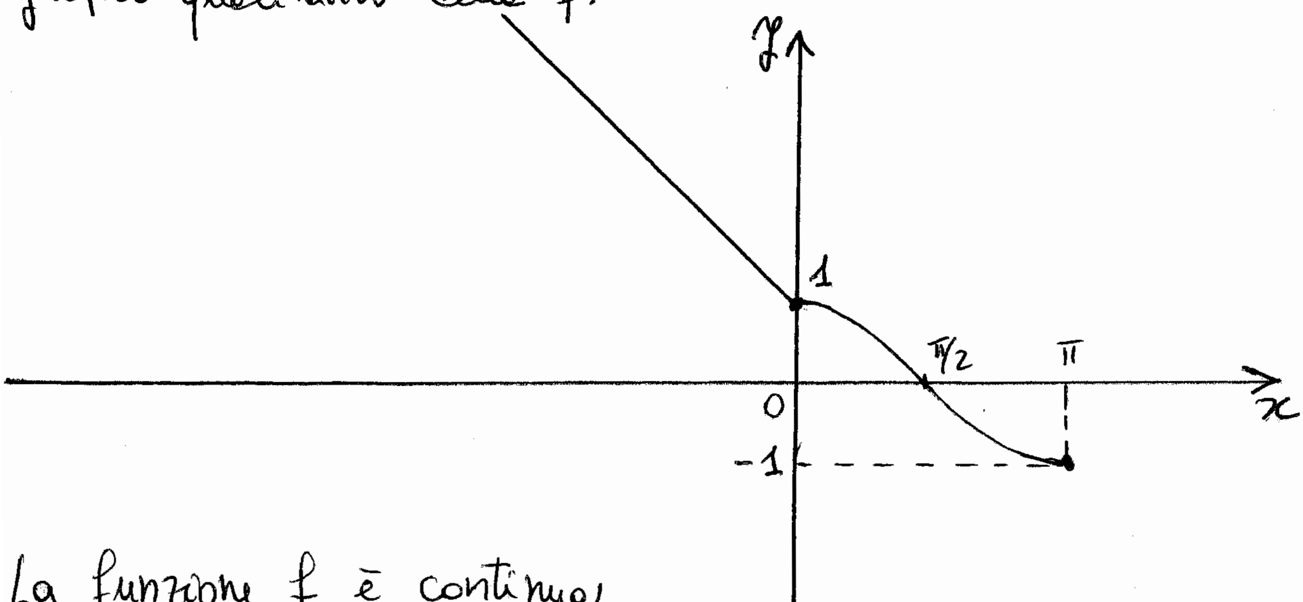
# Esercizio 9

Trovare tutte le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$t^4 + t^2 - 6 = 0.$$

# Correzione Compito A della prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) del 13.12.02

ESERCIZIO 1 — Tracciamo per prima cosa un grafico qualitativo della $f$.




La funzione $f$ è continua con immagine $[-1, +\infty)$. Nel suo dominio di definizione la funzione $f$ è monotona decrescente (strettamente) e quindi invertibile. Il calcolo dell'inversa lo si potrà fare separatamente in $x<0$ e in $0 \leq x \leq \pi$.

a) $y = 1 - x \implies x = 1 - y$

b) $y = \cos x \implies x = \arccos y$

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \arccos y, & -1 \leq y < 1 \\ 1 - y, & y \geq 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2 – Si tratta di un insieme costituito da cinque elementi:

a) $\sup D = \max D = \pi^2$ (l'estremo superiore è massimo)

b) non vi sono punti di accumulazione visto che l'insieme è finito.

ESERCIZIO 3 – Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(\sqrt{n} + n \,\mathrm{sen}(1/n)\right)}{\cancel{n}\left(n \log(1/n) + \mathrm{arctg}\, n\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{n}\ \mathrm{sen}(1/n)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{arctg}\, n - \sqrt{n}\log n} = 0$$

visto che

a) il numeratore(*) tende a 1; b) $\frac{1}{\sqrt{n}}\,\mathrm{arctg}\, n$ tende a zero(**); c) $-\sqrt{n}\log n$ tende a $-\infty$.

(*) ho utilizzato il limite notevole $\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$; (**) Visto che la funzione arctg è limitata.

ESERCIZIO 4 – Tenuto conto che

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{per } x < 0 \\ x & \text{per } x \geq 0, \end{cases}$$

risulta

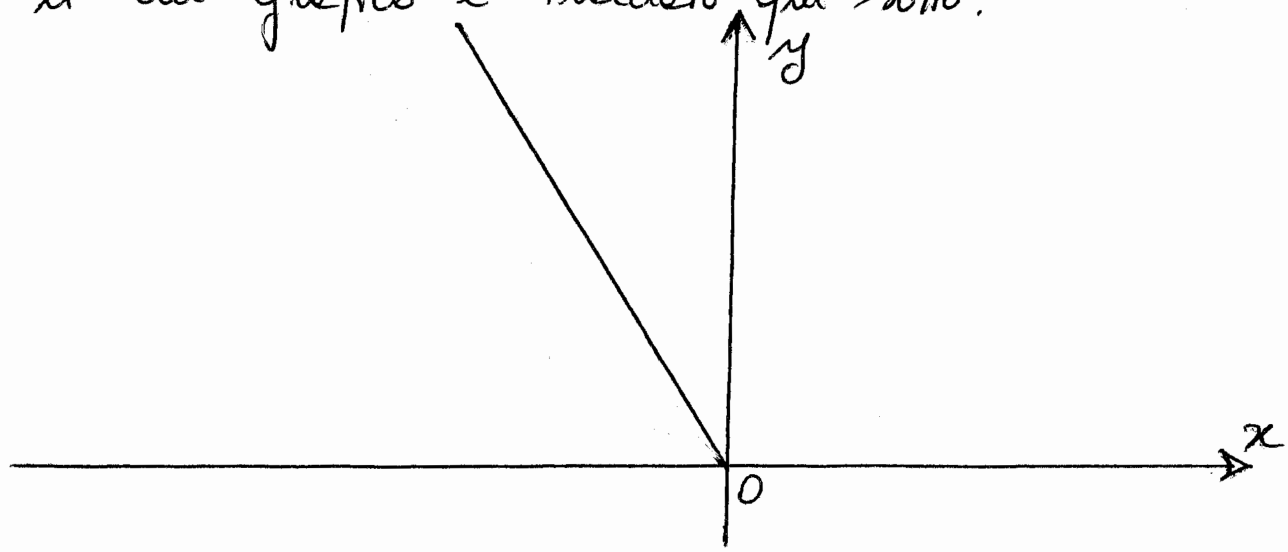
$$x^2 - 3x|x| = \begin{cases} +4x^2 & \text{per } x \leq 0 \\ -2x^2 & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

Tenuto conto della radice la funzione è

perciò definita in $D=\{x\in\mathbb{R}: x\leq 0\}$
e sul suo dominio di definizione $f$ si riscrive nella forma

$$f(x)=\sqrt{4x^2}=-2x\,,$$

il cui grafico è tracciato qui sotto.




ESERCIZIO 5 — Si ha

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{per } x\geq 1\\ 1-x & \text{per } x<1\end{cases}$$

e di conseguenza

$$f_1(x)=\frac{-2}{(x+1)(x-1)}\qquad \text{per } x>1,$$

$$f_2(x)=\frac{2x}{(x+1)(x-1)}\qquad \text{per } x<1$$

sono le due funzioni da studiare.

a) $f_1(x) = -\dfrac{2}{x^2-1}$ per $x > 1$.

Si ha $\lim_{x \to 1^+} f_1(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$,
per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale a $+\infty$, $x = 1$ è asintoto verticale

$$f_1'(x) = +\frac{2x}{(x^2-1)^2} > 0 \quad \text{per} \quad x > 1.$$

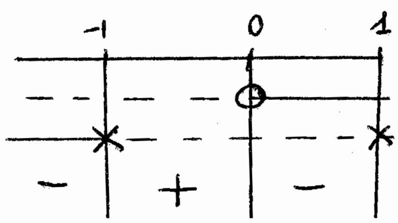
La funzione è strettamente monotona crescente.

b) $f_2(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$ per $x < 1$.

Il dominio di definizione è $D_2 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1, x < 1\}$.

Si ha $\lim_{x \to -\infty} f_2(x) = 0$, $\lim_{x \to -1^-} f_2(x) = -\infty$,
per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$, $x = -1$ asintoto verticale
$\lim_{x \to -1^+} f_2(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f_2(x) = -\infty$, ovvero $x = 1$ è asintoto verticale.

Inoltre $f_2(x) \geq 0$ per

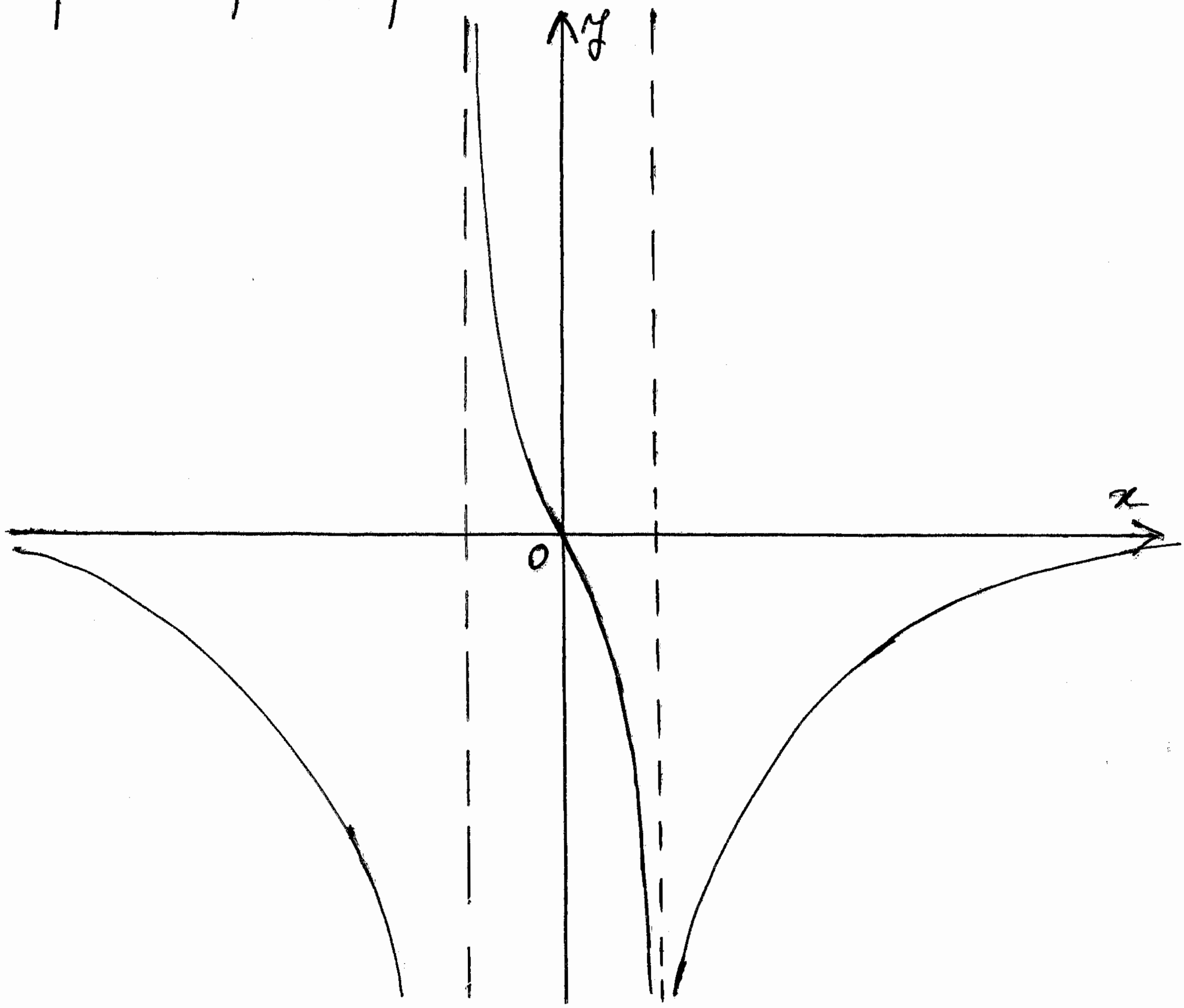



$\boxed{-1 < x < 0}$

$$f_2'(x) = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0 \text{ su } D_2$$

La funzione è strettamente monotona decrescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, 1)$.

Un grafico approssimativo della $f$ è perciò quello riportato qui sotto.




ESERCIZIO 6 — Risulta della forma $0/0$ e sono verificate le ipotesi per applicare De L'Hospital per cui

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} + 2x - 2}{\pi \cos(\pi x) + 2x} = \frac{1}{-\pi + 2}$$

ESERCIZIO 7 — Si osservi che la funzione integranda non è definita in tutto l'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, per cui non ha senso definire l'integrale proposto ($\operatorname{sen} t$ si annulla per $t=0$). Si potrebbe prendere in esame l'integrale solo a livello di integrale generalizzato. Anche in tale contesto però si concluderebbe che l'integrale proposto non esiste.

ESERCIZIO 8. Calcoliamo separatamente le primitive di

$$f_1(t) = t \operatorname{sen} t \,, \quad f_2(t) = \frac{1}{(t+1)(t-2)}$$

a) La primitive di $f_1$ la calcoliamo per parti:

$$\int t \operatorname{sen} t \, dt = -t \cos t + \int \cos t \, dt =$$

$$= -t\cos t + \operatorname{sen} t + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}$$

b) La $f_2$ è una funzione razionale. Si ha

$$\frac{1}{(t+1)(t-2)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t-2}$$

$$1 = at - 2a + bt + b,$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -2a+b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Quindi

$$\int f_2(t)\,dt = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-2} =$$

$$= -\frac{1}{3}\log|t+1| + \frac{1}{3}\log|t-2| + k_2\,,$$

$k_2 \in \mathbb{R}$.

In conclusione la generica primitiva è

$$P(t) = -t\cos t + \operatorname{sen} t - \frac{1}{3}\log|t+1| + \frac{1}{3}\log|t-2| + k,$$

$k \in \mathbb{R}$. Imponendo $P(0)=0$ si trova

$+\frac{1}{3}\log(2) + k = 0$, ovvero $k = -\frac{1}{3}\log 2$.

Di conseguenza

$$P(t) = -t\cos t + \operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\log\left|\frac{t-2}{2(t+1)}\right|$$

ESERCIZIO 9 – Sia $z = t^2$. Allora

$$z^2 + z - 6 = 0$$

$$z = \frac{-1 \mp \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \mp 5}{2} \begin{cases} z_1 = -3 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

a) $t^2 = -3$, da cui $t_1 = -i\sqrt{3}$, $t_2 = i\sqrt{3}$

b) $t^2 = 2$, da cui $t_3 = -\sqrt{2}$, $t_4 = \sqrt{2}$

Le quattro radici dell'equazione sono $t_i$, $i = 1,2,3,4$.

# COMPITO A – Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 7 gennaio 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola (o data di nascita): ______________________

## Esercizio 1

Determinare le funzioni composte **f** ∘ **g** e **g** ∘ **f** dove

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 1.$$

tracciandone poi i relativi grafici.

## Esercizio 2

Dire per quali numeri naturali $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4} \geq n^2 - n$$

## Esercizio 3

Calcolare (senza fare uso della regola di De L'Hospital)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5e^{-\sqrt{n}} + 3n \log n}{n \log(n^2 + 5) + 2n\sqrt{n}}$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 3x + 2)$$

tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5

Facendo opportunamente uso della regola di De L'Hospital calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x\sin x)}{e^{3x^2}-e^{-2x^2}}$$

## Esercizio 6

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = 2\left(a_n\right)^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

## Esercizio 7

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_{-1}^{1} t^3 \left(e^{2t^2} - e^{-3t^2}\right) \, dt$$

## Esercizio 8

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \frac{1}{t^2(t+2)}$$

## Esercizio 9

Trovare la parte immaginaria del numero complesso

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^9$$

Correzione Compito A della prova scritta di
ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) del 7.1.03

ESERCIZIO 1 — Risulta

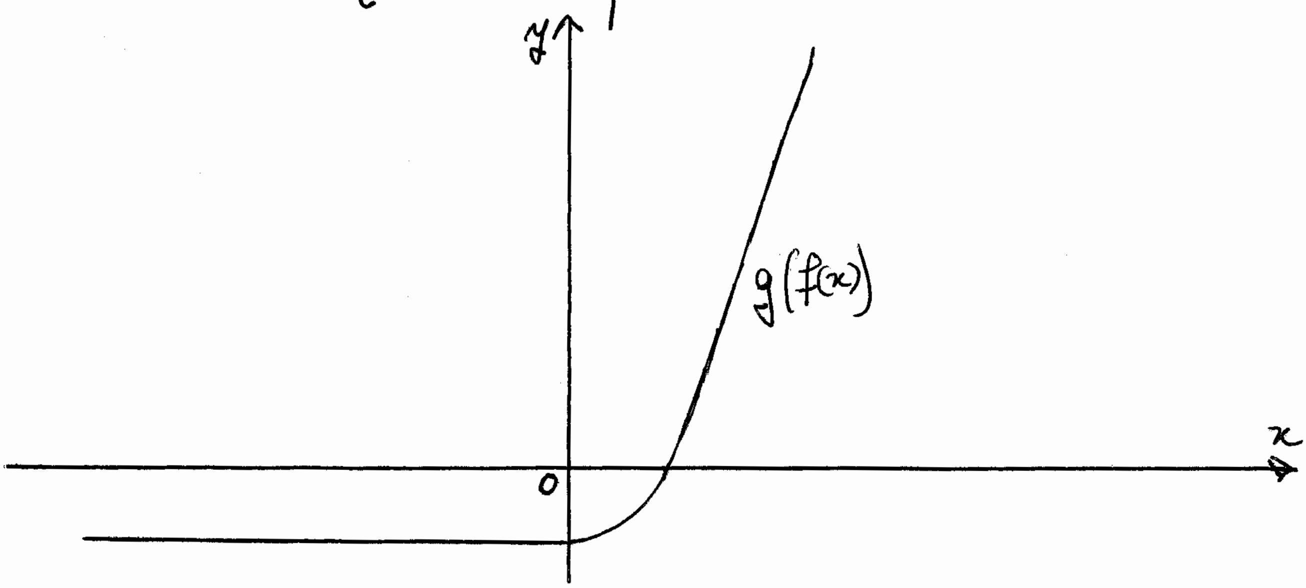
$x^2-1 \geq 0$ per $x \leq -1$ e $x \geq 1$.

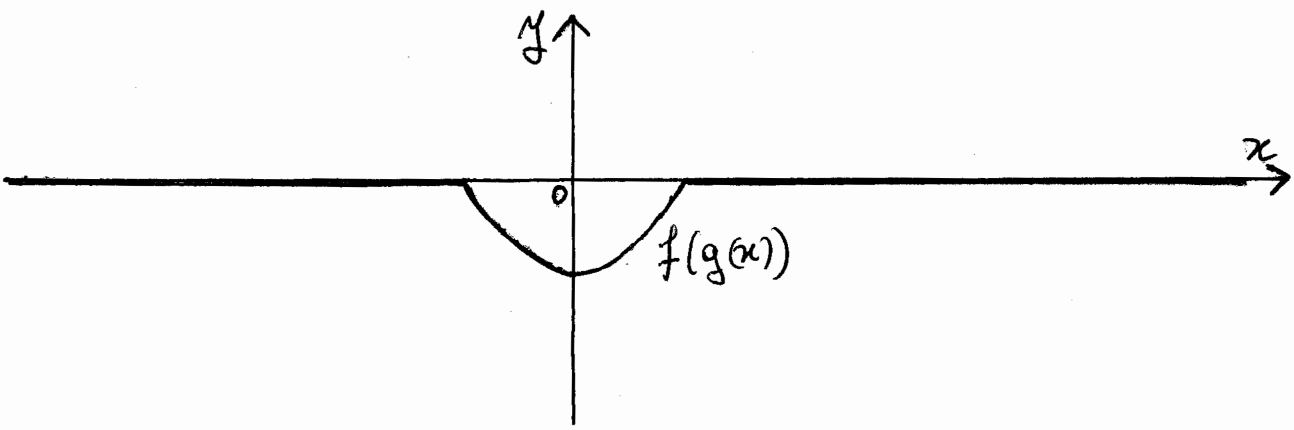
Perciò

$$f(g(x)) = \begin{cases} x^2-1 & \text{per } x \leq -1 \text{ e } x \geq 1 \\ 0 & \text{per } -1 < x < 1 \end{cases}$$

mentre

$$g(f(x)) = \begin{cases} x^2-1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$



ESERCIZIO 2 – Risulta, in base alla definizione di $\binom{n}{k}$,

$$2\,\frac{n!}{3!\,(n-3)!}+3\,\frac{n!}{4!\,(n-4)!}\geqslant n^2-n\,, \qquad n\geqslant 4$$

$$\cancel{2}\,\frac{n\cdot(n-1)(n-2)}{3\cdot\cancel{2}}+\cancel{3}\,\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot\cancel{3}\cdot 2}\geqslant n^2-n$$

$$8\,n(n-1)(n-2)+3\,n(n-1)(n-2)(n-3)-24\,n(n-1)\geqslant 0$$

$$n(n-1)\left(8n-16+3n^2-15n+18-24\right)\geqslant 0$$

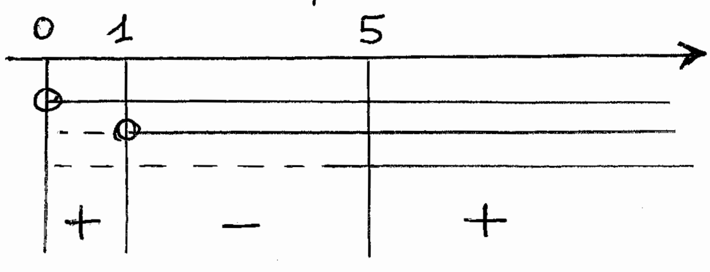
$$n(n-1)\left(3n^2-7n-22\right)\geqslant 0$$

$$3x^2-7x-22=0$$

$$x=\frac{7\mp\sqrt{49+264}}{6}=\frac{7\mp\sqrt{313}}{6} \quad \begin{cases} x_1=\dfrac{7-\sqrt{313}}{6}\simeq -1{,}78 \\[2ex] x_2=\dfrac{7+\sqrt{313}}{6}\simeq 4{,}11 \end{cases}$$

Visto che la disequazione é sui naturali,

$3n^2-7n-22\geqslant 0$ per $n\geqslant 5$ (non vale mai l'uguale)




La disequazione è perciò verificata per $n=0,1$ e per $n\geqslant 5$. Si osservi inoltre che, essendo presenti nella disequazione $\binom{n}{3}$ ed $\binom{n}{4}$, la disequazione avrà senso solo per $n\geqslant 4$. Perciò, nel suo dominio di definizione, la disequazione è verificata solo per $n\geqslant 5$.

ESERCIZIO 3 — Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5e^{-\sqrt{n}} + 3n\log n}{n\log(n^2+5) + 2n\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5e^{-\sqrt{n}}}{n} + 3\frac{\log n}{\sqrt{n}}}{\frac{\log(n^2+5)}{\sqrt{n}} + 2} = 0,$$

visto che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{n} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2+5)}{\sqrt{n}} = 0.$$

ESERCIZIO 4 — Per prima cosa stabiliamone il dominio di definizione:

$$x^2+3x+2>0$$

$$x = \frac{-3\mp\sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3\mp 1}{2} \begin{array}{l} x_1=-2 \\ x_2=-1 \end{array}$$

per cui $D = \{x \in \mathbb{R}: \ x<-2 \ \text{e} \ x>-1\}$.

Si ha

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Poichè $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$

non vi sono asintoti obliqui.

Inoltre

$$f'(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}$$

Studiamo il segno di $f'$:

$$\frac{2x+3}{x^2+3x+2} \geq 0$$

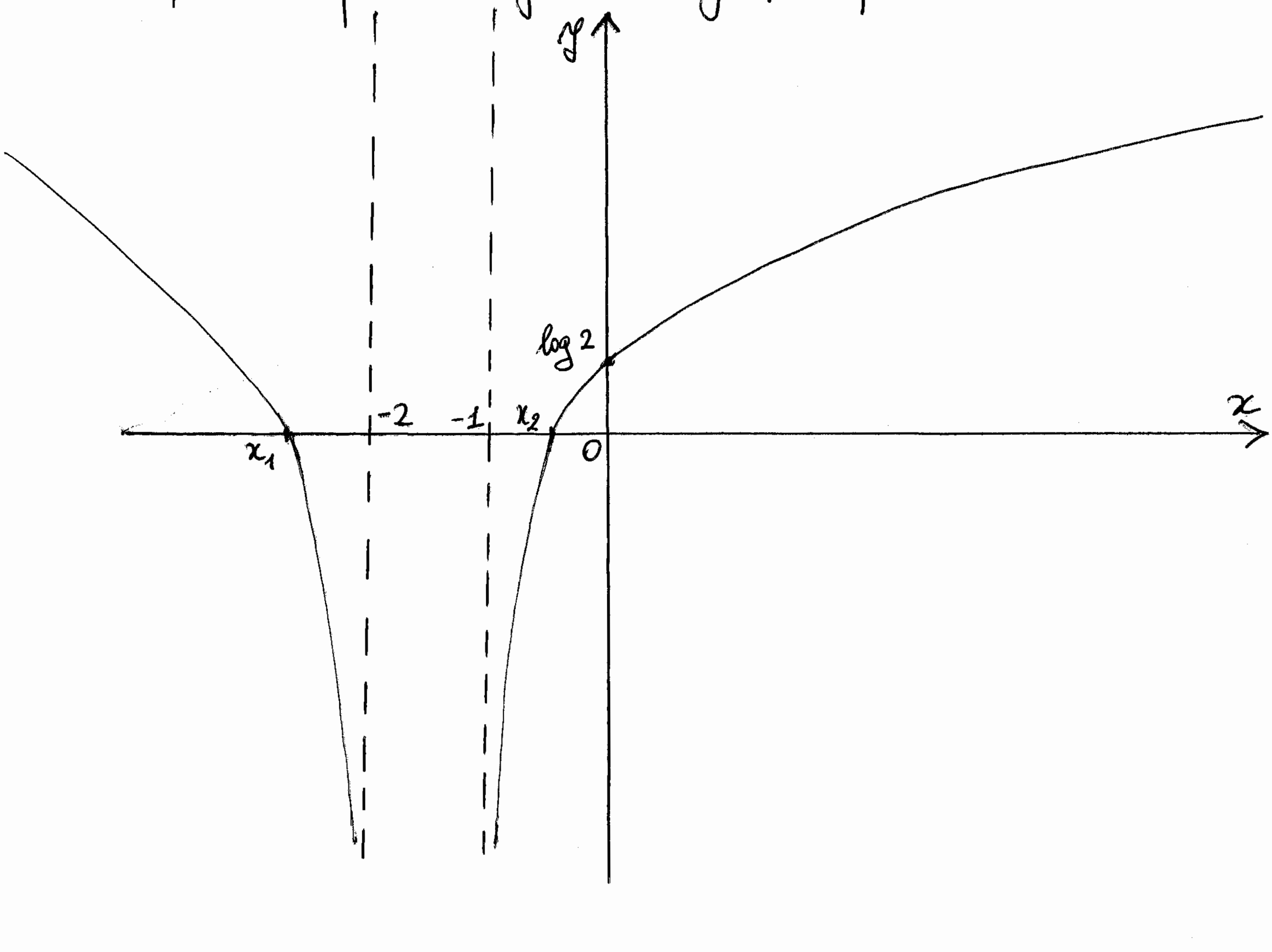
Poiché in D si ha $x^2+3x+2>0$, deve essere $2x+3 \geq 0$, cioè $x \geq -\frac{3}{2}$ (vale a dire per $x>-1$)

Osserviamo infine che $f(x) \geq 0$ per $x^2+3x+2 \geq 1$, cioè

$x^2+3x+1 \geq 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \quad x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

Riportiamo qui di seguito un grafico qualitativo.



ESERCIZIO 5 – Il limite considerato è della forma $\frac{0}{0}$. Sono verificate le ipotesi per applicare De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x\,\mathrm{sen}\,x)}{e^{3x^2}-e^{-2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}\,x + 3x\cos x}{(1+3x\,\mathrm{sen}\,x)(6xe^{3x^2}+4xe^{-2x^2})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3\frac{\mathrm{sen}\,x}{x} + 3\cos x}{(1+3x\,\mathrm{sen}\,x)(6e^{3x^2}+4e^{-2x^2})} = \frac{3+3}{1\cdot(6+4)} = \frac{3}{5}$$

ESERCIZIO 6 – Sia $f(x) = 2x^2$. Punti fissi: $f(x)=x \iff 2x^2=x \iff x(2x-1)=0$, per $x=0$ e $x=\frac{1}{2}$.

Dimostriamo per induzione che $a_n \geq 3 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

Per $n=0$ $3=a_0\geq 3$ (passo iniziale verificato!). Assumiamo ora $a_n\geq 3$ (ipotesi induttiva). Allora $a_{n+1} = 2(a_n)^2 \geq 2\cdot 3^2 = 18 \geq 3$. Dunque, in base al principio di induzione

$a_n \geq 3 \ \forall n\in\mathbb{N}$. Non essendovi punti fissi di $f$ in $I=[3,+\infty)$, la successione non può convergere.

Vediamo se diverge a $+\infty$. A tale scopo, dimostriamo che $\{a_n\}$ è monotona crescente (strettamente):

$a_{n+1} > a_n \iff 2a_n^2 > a_n$ e dato che $a_n \geq 3$ ciò equivale a $2a_n > 1 \iff a_n > \frac{1}{2}$.

Essendo verificata l'ultima disuguaglianza, ciò equivale alla monotonia stretta di $\{a_n\}$. Dunque $\{a_n\}$ ammette limite per $n\to\infty$ coincidente con il suo estremo superiore. Non potendo tale limite essere un valore finito (in tal caso sarebbe dovuto essere un punto unito della $f$), si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

ESERCIZIO 7 – Calcoliamo intanto gli integrali indefiniti

$$\int t^3 e^{2t^2} dt \,, \quad \int -t^3 e^{-3t^2} dt$$

Risulta (integrando per parti)

a) $$\int t^3 e^{2t^2} dt = \frac{1}{4}\int t^2 \left(4t e^{2t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} t^2 e^{2t^2} - \int \frac{1}{4} 2t\, e^{2t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{4} t^2 e^{2t^2} - \frac{1}{8}\int 4t e^{2t^2} dt = \frac{1}{4} t^2 e^{2t^2} - \frac{1}{8} e^{2t^2} + k_1 \,, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

b) $$\int -t^3 e^{-3t^2} dt = \frac{1}{6}\int t^2 \left(-6t\, e^{-3t^2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{6} t^2 e^{-3t^2} - \int \frac{1}{6} 2t\, e^{-3t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{6} t^2 e^{-3t^2} + \frac{1}{18}\int -6t e^{-3t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{6} t^2 e^{-3t^2} + \frac{1}{18} e^{-3t^2} + k_2 \,, \quad k_2 \in \mathbb{R}.$$

Perciò $$\int_{-1}^{+1} t^3 \left(e^{2t^2} - e^{-3t^2}\right) dt =$$

$$= \left. \frac{1}{4} t^2 e^{2t^2} - \frac{1}{8} e^{2t^2} + \frac{1}{6} t^2 e^{-3t^2} + \frac{1}{18} e^{-3t^2} \right|_{t=-1}^{t=1} = 0.$$

In effetti si poteva concludere senza effettuare alcun

Conto tenuto conto che
a) la funzione integranda è dispari;
b) l'intervallo è simmetrico rispetto all'origine.

ESERCIZIO 8 – Si tratta di integrare una funzione razionale.

$$\frac{1}{t^2(t+2)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+2}, \quad \text{ovvero}$$

$$1 = a(t^2+2t) + b(t+2) + c\,t^2$$

$$a\,t^2 + c\,t^2 + 2a\,t + b\,t + 2b = 1$$

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 2a+b=0 \\ 2b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2}b=-\frac{1}{4} \\ c=-a=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Risulta quindi

$$\int f(t)\,dt = \int\left(-\frac{1}{4t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{t+2}\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\log|t| - \frac{1}{2t} + \frac{1}{4}\log|t+2| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 9. – Sia $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Perciò $z = w^9 = e^{-i\frac{9}{4}\pi} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

e quindi

$$Re(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad Im(z) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 1 aprile 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: _____________________

## Esercizio 1

Dimostrare per induzione la seguente formula: per ogni $k \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{k} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{k+1}}\right)$$

## Esercizio 2

Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sin\left(x^2\right) \geq \frac{1}{2}$$

## Esercizio 3

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n! - n^n}$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{e^{|x-1|}}{x-2}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \\ a_{n+1} = \sqrt[3]{1 + 2a_n^3} \end{cases}$$

# Esercizio 6

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_0^1 t \arctan\left(t^2+2\right)\, dt$$

# Esercizio 7

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \frac{t^4+2}{t^2-1}$$

# Esercizio 8

Trovare le coppie di numeri complessi che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} z+w = 4+i \\ zw = 3+3i \end{cases}$$

Correzione prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) del 1° aprile 2003. – DOCENTE: BRUNO RUBINO

ESERCIZIO 1 — Si tratta di dimostrare la formula per induzione su $k \in \mathbb{N}$.

Per $k=0$ si ha

$$\sum_{n=0}^{0} \frac{1}{3^n} = 1 \,, \qquad \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right)\Bigg|_{k=0} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = 1 \,,$$

per cui il passo iniziale è verificato.

Supponiamo sia verificato per $k$ e cerchiamo di ricavare la relazione al passo $(k+1)$: si ha

$$\sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{3^n} = \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{k+1}} \overset{(*)}{=} \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}}\right) + \frac{1}{3^{k+1}}$$

$$= \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+1}} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{3^{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{3}{2}\left(1-\frac{3-2}{3^{k+2}}\right) = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{k+2}}\right)$$

(*) questo è il punto in cui si è usato il passo induttivo. Gli altri passaggi sono solo di calcolo.

La dimostrazione è raggiunta visto che abbiamo trovato la relazione al passo $(k+1)$:

$$\sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{(k+1)+1}}\right)$$

ESERCIZIO 2 – La disequazione è verificata per

$\frac{\pi}{6}+2k\pi \leq x^2 \leq \frac{5}{6}\pi+2k\pi$, $\quad k \geq 0$ (visto che $x^2 \geq 0$)

ovvero per

$\sqrt{\frac{\pi}{6}+2k\pi} \leq x \leq \sqrt{\frac{5}{6}\pi+2k\pi}$ e

$-\sqrt{\frac{5}{6}\pi+2k\pi} \leq x \leq -\sqrt{\frac{\pi}{6}+2k\pi}$ .

ESERCIZIO 3 – Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n!-n^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^n} \sqrt[3]{\frac{n!}{n^n}-1} =$$

$= -\infty$, visto che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n^n} = +\infty$, mentre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 .$$

ESERCIZIO 4 – La funzione è definita per $x \neq 2$.

Si ha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{|x-1|}}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{|x-1|}}{x-2} = +\infty,$$

visto che l'esponenziale è un'infinito superiore ai polinomi. Per lo stesso ragione non vi sono asintoti obliqui.

Inoltre

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{e^{|x-1|}}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{e^{|x-1|}}{x-2} = +\infty .$$

$f(x) > 0$ per $x > 2$ e $f(0) = -\frac{1}{2}e$

Tenuto conto che

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{per } x<1 \\ x-1 & \text{per } x \geq 1, \end{cases}$$

a) per $x<1$ risulta

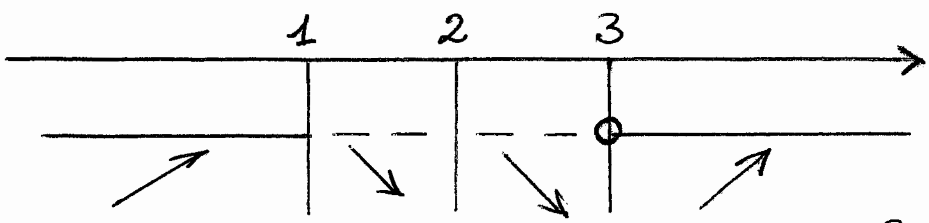
$$f'(x) = D\left(\frac{e^{1-x}}{x-2}\right) = \frac{-e^{1-x}(x-2) - e^{1-x}}{(x-2)^2} =$$

$$= e^{1-x}\frac{1-x}{(x-2)^2} > 0 \quad \forall x < 1.$$

b) per $x \geq 1$ risulta

$$f'(x) = D\left(\frac{e^{x-1}}{x-2}\right) = \frac{e^{x-1}(x-2) - e^{x-1}}{(x-2)^2} =$$

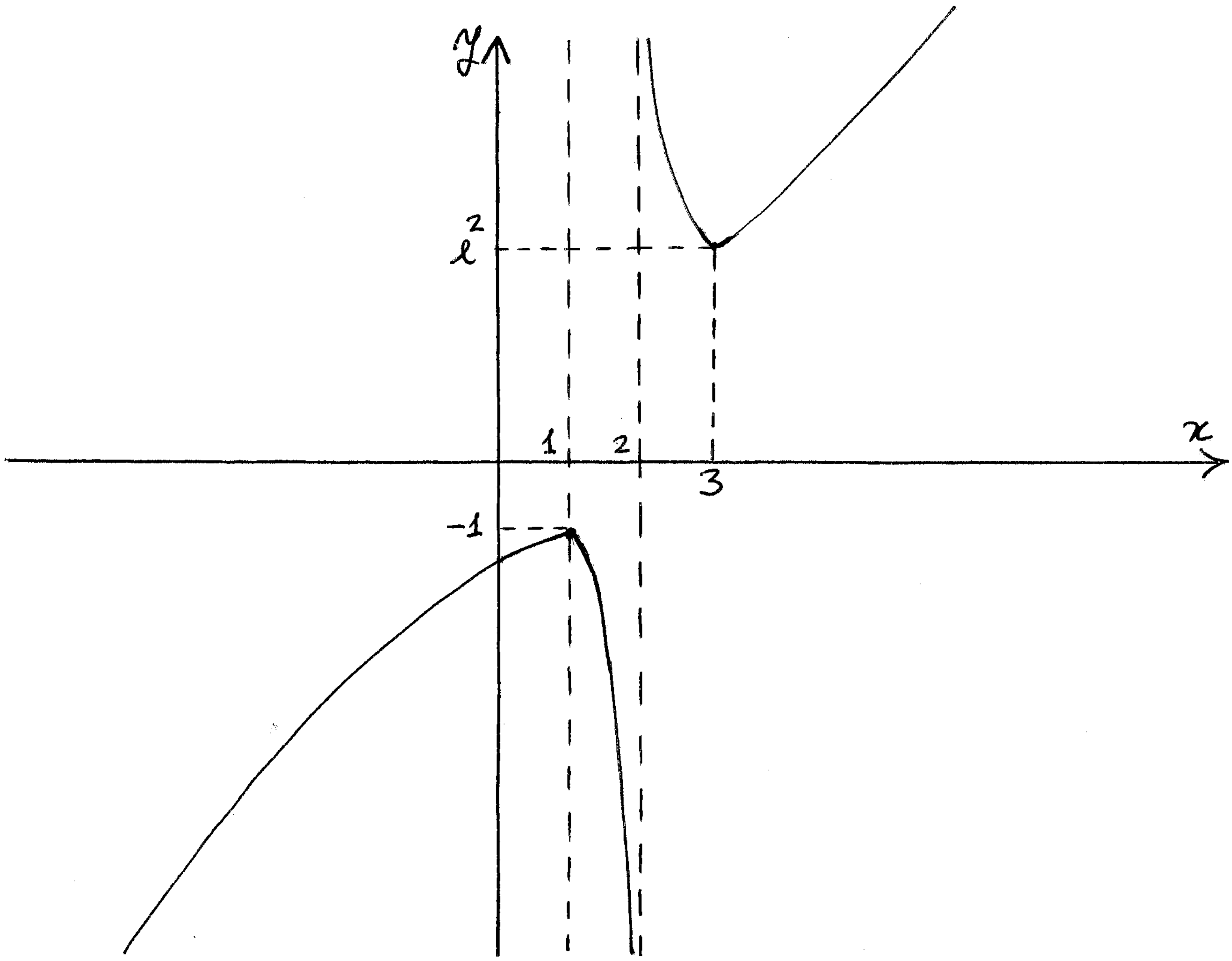
$$= e^{x-1}\frac{x-3}{(x-2)^2} \geq 0 \text{ per } x \geq 3$$




In $x=3$ c'è un minimo relativo, $f(3) = e^2$

Riportiamo quindi il grafico qualitativo della funzione.

$f(1) = -1$




ESERCIZIO 5 — Consideriamo per prima cosa la funzione

$f(x) = \sqrt[3]{1+2x^3}$.

Calcoliamo le soluzioni di $f(x)=x$:

$1+2x^3 = x^3$, ovvero $x^3 = -1$, ossia $\boxed{\bar{x} = -1}$

Sia $I = [0, +\infty)$. Risulta vera l'implicazione

$x \in I \Rightarrow f(x) \in I$.

La successione perciò non può convergere.

Dimostriamo che la successione diverge a $+\infty$.

A tal proposito basta dimostrare che è monotona crescente: se fosse convergente in tal caso tenderebbe ad $\bar{a} > 0$.

In tal caso $\bar{a}$ sarebbe un punto unito, $f(\bar{a})=\bar{a}$, impossibile. Non convergendo deve necessariamente tendere a $+\infty$. Proviamo quindi la monotonia:

$$a_{n+1} > a_n \iff \sqrt[3]{1+2a_n^3} > a_n \iff 1+2a_n^3 > a_n^3$$

$$\iff a_n^3 > -1 \iff a_n > -1, \text{ vera poiché } a_n \geq 0.$$

ESERCIZIO 6 — Calcoliamo per prima cosa l'integrale indefinito: procedendo per parti si ha:

$$\int t \operatorname{arctg}(t^2+2)\,dt = \frac{t^2}{2}\operatorname{arctg}(t^2+2) - \int \frac{t^2}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}t}{1+(t^2+2)^2}\,dt$$

$$= \frac{t^2}{2}\operatorname{arctg}(t^2+2) - \int \frac{t^3}{1+(t^2+2)^2}\,dt$$

Calcoliamo l'integrale che rimane:

$$\int \frac{t^3\,dt}{1+(t^2+2)^2} = \quad \text{con la sostituzione } s=t^2+2, \; ds = 2t\,dt, \text{ si ha}$$

$$= \int \frac{(s-2)}{1+s^2}\frac{ds}{2} = \frac{1}{4}\int \frac{2s}{1+s^2}\,ds - \int \frac{ds}{1+s^2}$$

$$= \frac{1}{4}\log(1+s^2) - \operatorname{arctg} s + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo quindi $\int_0^1 t \operatorname{arctg}(t^2+2)\,dt =$

$$= \frac{t^2}{2}\operatorname{arctg}(t^2+2) - \frac{1}{4}\log\left(1+(t^2+2)^2\right) + \operatorname{arctg}(t^2+2)\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(3) - \frac{1}{4}\log(10) + \operatorname{arctg}(3) + \frac{1}{4}\log(5) - \operatorname{arctg} 2$$

$$= \frac{3}{2}\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{4}\log 2$$

ESERCIZIO 7 – Si tratta di integrare una funzione razionale. Si ha

$$f(t) = \frac{(t^4-1)+3}{t^2-1} = t^2+1+\frac{3}{t^2-1}$$

Inoltre $\displaystyle\frac{3}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$

$$3 = a(t+1) + b(t-1)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-b \\ 2a=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\int f(t)\,dt = \int\left(t^2+1+\frac{3}{2}\frac{1}{t-1} - \frac{3}{2}\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{3}{2}\log|t-1| - \frac{3}{2}\log|t+1| + k,\ k\in\mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + t + \frac{3}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + k,\quad k\in\mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 8 – Cerchiamo le coppie di numeri complessi con somma $(4+i)$ e prodotto $(3+3i)$. E' evidente che si tratta delle coppie $(3, 1+i)$ e $(1+i, 3)$.
Possiamo calcolarle risolvendo l'equazione

$$t^2 - st + p = 0,$$

dove $s = 4+i$ è la somma e $p = 3+3i$ il prodotto.
Attraverso la formula risolutiva,

$$t = \frac{s \mp \sqrt{s^2 - 4p}}{2} = \frac{4+i \mp \sqrt{(4+i)^2 - 4(3+3i)}}{2} =$$

$$= \frac{4+i \mp \sqrt{16+8i-1-12-12i}}{2} = \frac{4+i \mp \sqrt{4\cancel{4}-4i-1}}{2}$$

$$= \frac{4+i \mp (2-i)}{2} \quad \begin{cases} t_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i \\ t_2 = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Come avevamo già anticipato.

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 11 aprile 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ______________________

## Esercizio 1

Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione

$$z^4 + z^2 - 2 = 0.$$

## Esercizio 2

Dire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\sqrt{x^2} \geq \frac{x}{2}$$

## Esercizio 3

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log(n!) + \sin^2(n!)}{ne^n + n!}$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(t) = |t|e^{1-t^2}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

# Esercizio 5

Sia data la successione

$$a_n = (-1)^n \left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n-5}\right)$$

**(5.a)** Calcolare, se esiste, il

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

**(5.b)** Tenuto conto della risposta data alla domanda (5.a), dire se $a_n$ è infinitesima, infinita, oppure nè infinitesima nè infinita per $n \to \infty$.

# Esercizio 6

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_0^1 t^3 \sin\left(t^2 + 12\right)\, dt$$

# Esercizio 7

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \frac{t^3}{t^2 + 3t + 2}$$

Correzione prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) dell'11.4.03 — DOCENTE: BRUNO RUBINO

ESERCIZIO 1 — Sia $w = z^2$. L'equazione diviene

$$w^2 + w - 2 = 0$$

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \begin{cases} w_1 = -2 \\ w_2 = 1, \end{cases}$$

da cui $z_1 = -\sqrt{2}\, i$, $z_2 = \sqrt{2}\, i$, $z_3 = -1$, $z_4 = 1$.

ESERCIZIO 2 — Distinguiamo due casi

a) $x < 0$, nel qual caso

$$-x \geq \frac{x}{2}, \quad \frac{3}{2} x \leq 0, \text{ sempre vero per } x < 0.$$

b) $x \geq 0$, nel qual caso

$$x \geq \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} \geq 0, \text{ sempre vero per } x \geq 0.$$

La disequazione è sempre verificata ($\forall x \in \mathbb{R}$).

ESERCIZIO 3 — Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \log(n!) + \operatorname{sen}^2(n!)}{n e^n + n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log n!}{(n-1)!} + \frac{\operatorname{sen}(n!)}{n!}}{\frac{e^n}{(n-1)!} + 1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log(n) + \log(n-1)!}{(n-1)!} + \frac{\operatorname{sen} n!}{n!}}{\frac{e \cdot e^{n-1}}{(n-1)!} + 1} = 0$$

tenendo conto degli ordini di infinito delle varie funzioni a confronto.

ESERCIZIO 4 — La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$.
Ricordiamo poi che

$$|t| = \begin{cases} -t, & t < 0 \\ t, & t \geq 0. \end{cases}$$

Basta allora studiare la funzione $g(t) = t\,e^{1-t^2}$ e osservare che

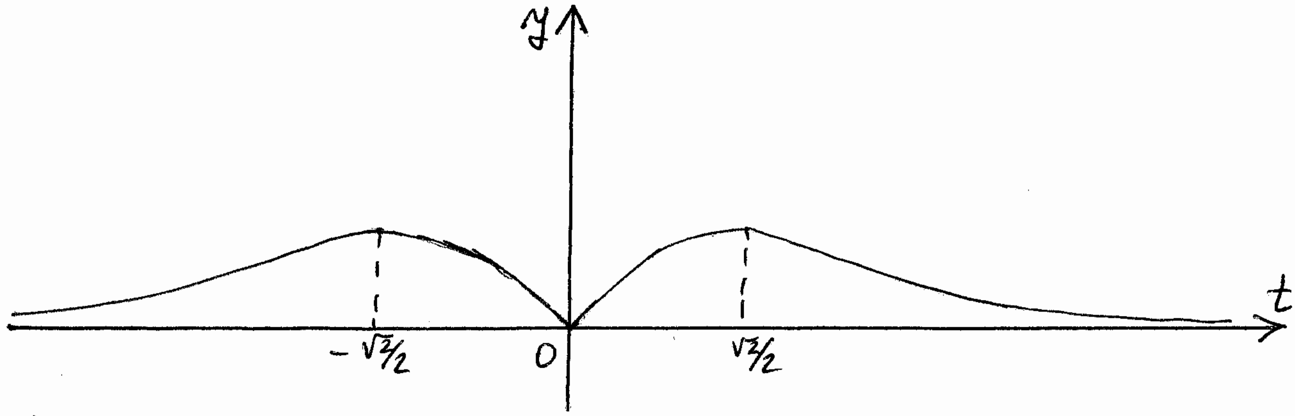
$$f(t) = |g(t)|.$$

Inoltre si osservi che $g$ è dispari mentre $f$ è pari. Basta cioè studiare $f(t) = g(t)$ solo per $t \geq 0$.
Si ha

$$f(0) = 0, \quad \lim_{t \to +\infty} t\,e^{1-t^2} = 0.$$

Derivando, $f'(t) = e^{1-t^2}(1 - 2t^2) \geq 0$ per $1 - 2t^2 \geq 0$, ovvero per $|t| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
Risulta

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,e^{+1/2} = \sqrt{\frac{e}{2}} \quad (\text{massimo relativo})$$




Minimo assoluto per $x = 0$, max assoluti per $t = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$

ESERCIZIO 5

Risulta

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+5} - \sqrt{n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+5-\cancel{n}+5}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n-5}} = 0,$$

per cui $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

e la successione è infinitesima.

ESERCIZIO 6 — Integriamo per sostituzione: sia $s = t^2+12$, $ds = 2t\,dt$. Risulta

$$\int t^3 \operatorname{sen}(t^2+12)\,dt = \int (s-12)\operatorname{sen}(s)\frac{ds}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int s\operatorname{sen}(s)\,ds - 6\int \operatorname{sen}(s)\,ds = \frac{1}{2}s(-\cos s)$$

$$-\frac{1}{2}\int -\cos(s)\,ds + 6\cos s = -\frac{1}{2}s\cos s + \frac{1}{2}\operatorname{sen} s +$$

$+6\cos s$. Di conseguenza l'integrale definito

$$\int_0^1 t^3\operatorname{sen}(t^2+12)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}(t^2+12)\cos(t^2+12) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t^2+12) + 6\cos(t^2+12)\Big|_{t=0}^{t=1} =$$

$$= -\frac{1}{2}13\cos(13) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(13) + 6\cos 13 + \cancel{\frac{1}{2}12\cos(12)} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 12$$

$$\cancel{-6\cos(12)} = -\frac{1}{2}\cos(13) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(13) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(12).$$

ESERCIZIO 7 – Si tratta di una funzione razionale,

$$f(t)=\frac{t^3+3t^2+2t-3t^2-2t}{t^2+3t+2}=t+\frac{-3t^2+2t}{t^2+3t+2}=$$

$$=\frac{-3t^2-9t-6+11t+6}{t^2+3t+2}+t=$$

$$=t-3+\frac{11t+6}{t^2+3t+2}$$

Si osservi inoltre che

$$t^2+3t+2=(t+1)(t+2).$$

$$\frac{11t+6}{t^2+3t+2}=\frac{a}{t+1}+\frac{b}{t+2}$$

$$11t+6=a(t+2)+b(t+1)$$

$$\begin{cases} a+b=11 \\ 2a+b=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-5 \\ b=11-a=16 \end{cases}$$

Abbiamo quindi

$$\int f(t)\,dt=\int\left(t-3-5\frac{1}{t+1}+16\frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}t^2-3t-5\log|t+1|+16\log|t+2|+k,$$

$k\in\mathbb{R}$.

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
### Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 23 giugno 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ______________________

## Esercizio 1

Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione

$$z^4 - z^3 - 2z + 2 = 0.$$

## Esercizio 2

Stabilire l'estremo superiore e inferiore dell'insieme dei valori assunti dalla successione ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$)

$$a_n = \sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}$$

e dire se sono rispettivamente massimo e minimo.

## Esercizio 3

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - \sqrt[n]{n}}{e^n + \sqrt[n]{n}} \arctan \sqrt[n]{n!}$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(t) = \frac{t^2 + |t| + 1}{t^2 - 1}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

# Esercizio 5

Dimostrare per induzione che $2n^3 + 7n$ è divisibile per 3 per ogni $n \geq 1$.

# Esercizio 6

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_{-1}^{2} \left(|t| + t \sin t\right)\, dt$$

# Esercizio 7

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \frac{t^2 + 2}{t(t^2 - 1)}$$

Correzione prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6CFU) del 23.6.03 — DOCENTE: BRUNO RUBINO

ESERCIZIO 1 — Raccogliendo si ha

$$z^3(z-1)-2(z-1)=0,$$

$$(z-1)(z^3-2)=0$$

da cui

$$z=1 \quad \text{oppure} \quad z^3=2.$$

Sia $z=\rho e^{i\vartheta}$. Allora, da $z^3=2$ si ha

$$\rho^3 e^{3i\vartheta}=2, \quad \text{ovvero} \quad \rho=\sqrt[3]{2} \quad \text{e}$$

$$3\vartheta_k=2k\pi, \qquad \vartheta_k=\frac{2}{3}\pi k, \qquad k=-1,0,1.$$

Le quattro soluzioni sono dunque

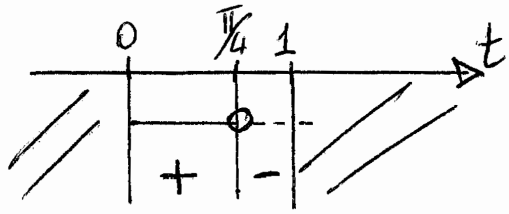
$$z_1=1, \quad z_2=\sqrt[3]{2}, \qquad z_3=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2}{3}\pi\right)$$
$$=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_4=\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

ESERCIZIO 2 — Consideriamo la funzione

$f(t)=\mathrm{sen}\,t+\cos t, \quad t\in[0,1]$. Si ha

$f'(t)=\cos t-\mathrm{sen}\,t \geqslant 0$ per $0\leq t\leq \frac{\pi}{4}$




$f(t)$ è crescente per $0 < t < \frac{\pi}{4}$ e assume il max per $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

I valori della successione $a_n$ sono dati da

$$\operatorname{sen} 1 + \cos 1, \quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{2} + \cos\tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{sen}\tfrac{1}{3} + \cos\tfrac{1}{3}, \ldots$$

Di conseguenza l'estremo superiore è $a_1 = \operatorname{sen} 1 + \cos 1$, che è anche massimo, mentre l'estremo inferiore è dato dal $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n} = 1$, che non è minimo (in quanto non esiste alcun $n \in \mathbb{N}$ per il quale venga assunto).

ESERCIZIO 3 – Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n - \sqrt[n]{n}}{e^n + \sqrt[n]{n}} \operatorname{arctg} \sqrt[n]{n!} =$$

visto che $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-n}\sqrt[n]{n}}{1 + e^{-n}\sqrt[n]{n}} \operatorname{arctg} \sqrt[n]{n!} = 1 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

ESERCIZIO 4 — La funzione $f$ è pari: basta perciò studiarla solo per $t \geq 0$.
Risulta $f(0) = -1$ e

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \to \infty} \frac{1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}}{1 - \frac{1}{t^2}} = 1,$$

vale a dire $y = 1$ è asintoto orizzontale a $+\infty$.
Osserviamo che per $t \geq 0$ la $f$ si scrive

$$f(t) = \frac{t^2 + t + 1}{t^2 - 1}$$

Il dominio di definizione è $t \neq 1$ e inoltre

$$\lim_{t \to 1^-} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to 1^+} f(t) = +\infty.$$

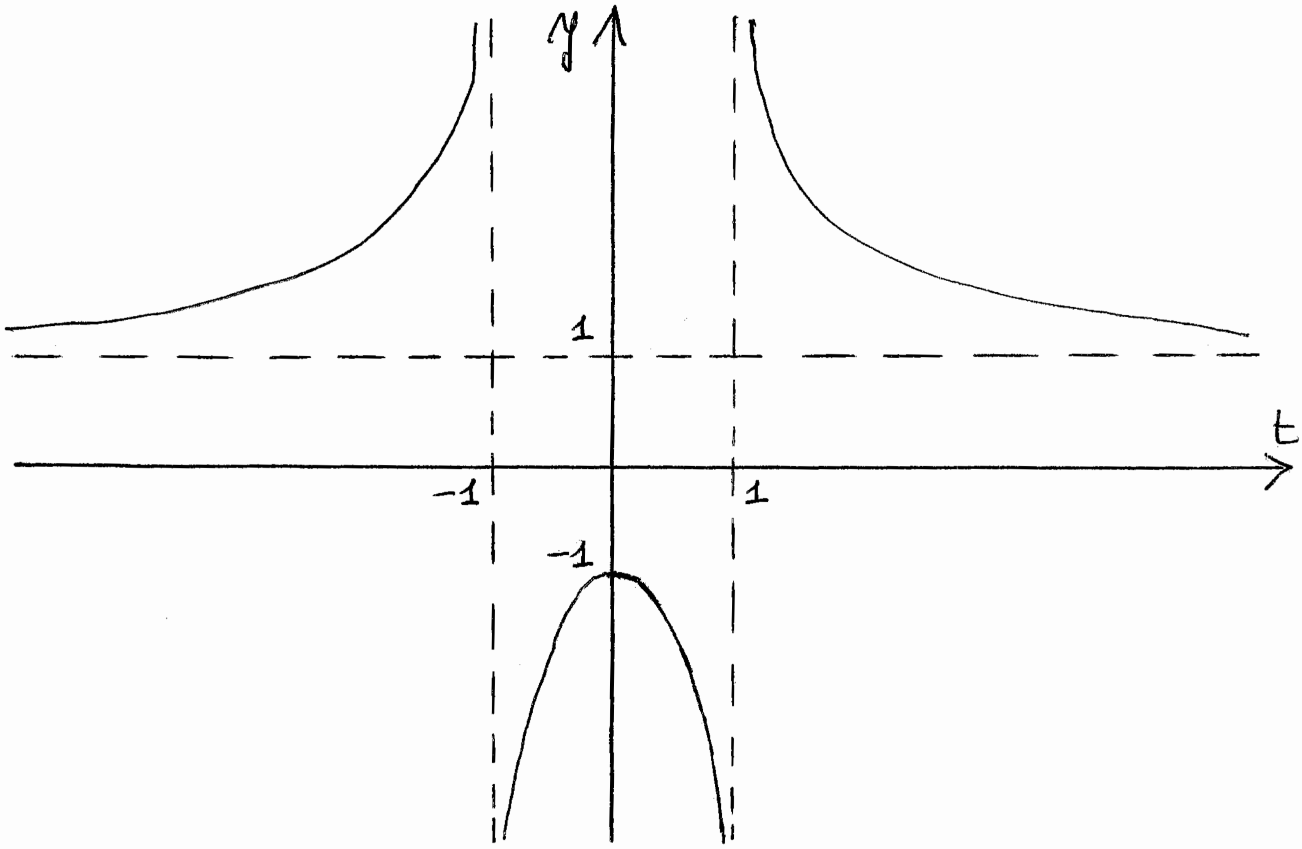
Si ha poi $f(t) > 0$ per $t > 1$.
Studiamo la derivata:

$$f'(t) = \frac{(2t+1)(t^2-1) - (t^2+t+1)\,2t}{(t^2-1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{2t^3} + t^2 - 2t - 1 - \cancel{2t^3} - 2t^2 - 2t}{(t^2-1)^2}$$

$$= -\frac{t^2 + 4t + 1}{(t^2-1)^2}$$

$t^2 + 4t + 1 = 0 \quad t = -2 \mp \sqrt{4-1} = -2 \pm \sqrt{3} < 0,$
per cui $t^2 + 4t + 1 > 0$ per $t > 0$ e si ha $f'(t) < 0$ per ogni $t > 0$.




ESERCIZIO 5 – Verifichiamo il passo iniziale:

per $n = 1$ $M_1 = 2 + 7 = 9$, divisibile per 3.

Supponiamo che $M_n = 2n^3 + 7n$ sia divisibile per 3. Risulta allora

$$M_{n+1} = 2(n+1)^3 + 7(n+1) = 2n^3 + 6(n^2+n) + 2 +$$

$$+ 7n + 7 = 2n^3 + 7n + 3(2n^2 + 2n + 3) =$$

$$= M_n + 3(2n^2+2n+3)$$

Poichè $M_n$ è divisibile per 3 e $(2n^2+2n+3)$ è un numero naturale, $M_{n+1}$ è divisibile per 3.

ESERCIZIO 6 — Si ha

$$\int t \operatorname{sen} t \, dt = \quad \text{per parti}$$

$$= -t\cos t + \int \cos t = -t\cos t + \operatorname{sen} t + k_1,$$

$k_1 \in \mathbb{R}$. Perciò

$$\int_{-1}^{2} \left(|t| + t \operatorname{sen} t\right) dt = \int_{-1}^{0} -t \, dt + \int_{0}^{2} t \, dt +$$

$$+ \int_{-1}^{2} t \operatorname{sen} t \, dt = -\frac{1}{2}t^2 \Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}t^2 \Big|_{0}^{2} + \left(-t\cos t + \operatorname{sen} t\right)\Big|_{-1}^{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + 2 - 2\cos 2 + \operatorname{sen} 2 + (-1)\cos(-1) - \operatorname{sen}(-1) =$$

$$= \frac{5}{2} - 2\cos 2 + \operatorname{sen} 2 - \cos 1 + \operatorname{sen} 1$$

ESERCIZIO 7 — Si tratta di usare le tecniche per le funzioni razionali

$$\frac{t^2+2}{t(t^2-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$

$$a(t^2-1) + b(t^2+t) + c(t^2-t) = t^2+2$$

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b-c=0 \\ -a=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-2 \\ b=c \\ 2b=1-a=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-2 \\ b=c=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Perciò

$$\int f(t)\,dt = \int\left(-\frac{2}{t}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{t-1}+\frac{3}{2}\,\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= -2\log|t| + \frac{3}{2}\log|t-1| + \frac{3}{2}\log|t+1| + k,$$

$k \in \mathbb{R}$

$$= -2\log|t| + \frac{3}{2}\log|t^2-1| + k.$$

Analisi Matematica 1 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 23 luglio 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

## Esercizio 1

Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione

$$z^4 + z^3 + 27z + 27 = 0.$$

## Esercizio 2

Studiare la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}a_n^2} \end{cases}$$

## Esercizio 3

Calcolare, giustificando opportunamente il risultato, il

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^4}$$

## Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(t) = \frac{|t^2 - 1|}{t^2 + 1}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

# Esercizio 5

Risolvere la disequazione

$$\sin(x) + 2\cos(x) \leq 2$$

# Esercizio 6

Calcolare, se ciò ha senso, i seguenti integrali

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 t \; dt,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin t \sin(5t) \; dt$$

# Esercizio 7

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \frac{t}{(t+1)(t^2-4)}$$

Correzione della prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) del 23/7/03 - DOCENTE: B. RUBINO

ESERCIZIO 1 - Si ha

$$z^3(z+1)+27(z+1)=0$$

$$(z+1)(z^3+27)=0$$

le cui soluzioni si trovano come unione di $z_1=-1$ e delle soluzioni di

$z^3=-27$. Per tale equazione, posto $z=\rho e^{i\vartheta}$,

si ha

$$\rho^3 e^{3i\vartheta}=3^3 e^{i\pi},$$

da cui

$$\rho=3 \quad e \quad 3i\vartheta=i\pi+2k\pi i, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

$$\vartheta=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi k \qquad k=-1,0,1.$$

Otteniamo perciò le soluzioni

$$z_2=3e^{i\frac{\pi}{3}}=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_3=3\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_4=3e^{i\pi}=-3$$

Abbiamo trovato le quattro soluzioni previste dal Teorema fondamentale dell'algebra.

ESERCIZIO 2. – Consideriamo la funzione $f(x)=\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}$. Si ha

$$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}}$$

Inoltre $f(x)=x$ per $\begin{cases} x\geq 0 \\ 1+\frac{1}{4}x^2=x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2=4 \\ x\geq 0 \end{cases}$

la cui soluzione è $x=+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Consideriamo $I=\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Si osservi che, se $x\in I$, allora

$$\begin{cases} \sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}>1 \\ \sqrt{1+\frac{1}{4}x^2}\leq\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{4}{3}}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

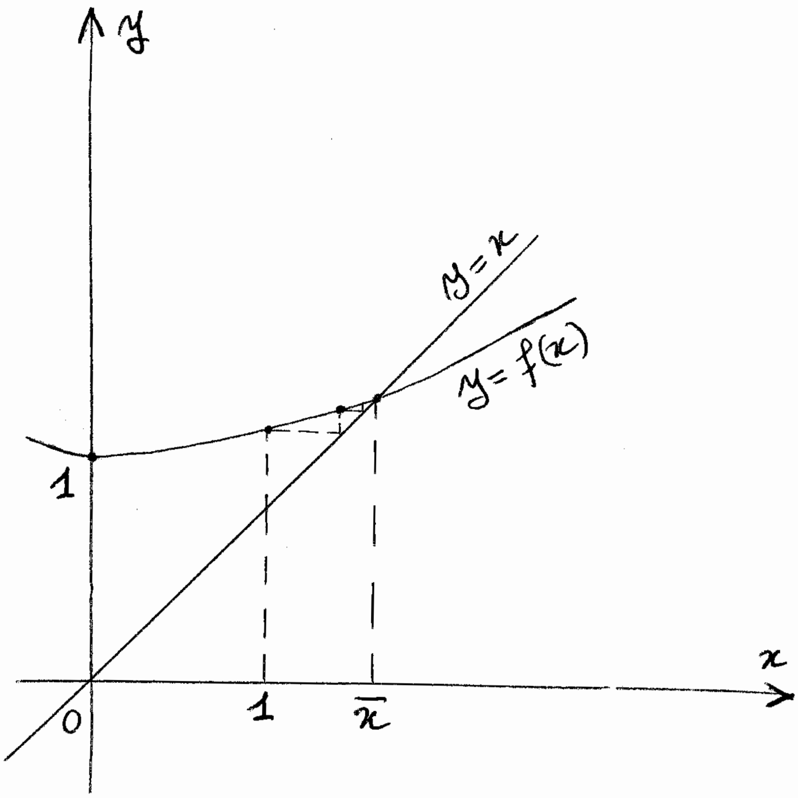
da cui

$$x\in I \Rightarrow f(x)\in I.$$

Si ha poi

$$f'(x)=\frac{1}{4}\,\cancel{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\cdot\frac{1}{\cancel{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}=\frac{1}{4}<1$$

Perciò $\bar{x}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ è l'unico punto fisso in $I$ e si ha $f'(\bar{x})<1$, per cui $\bar{x}$ è il limite della successione (asintoticamente stabile).




ESERCIZIO 3 – Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^4}=\lim_{n\to\infty}\exp\left[n^4\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=$$

tenuto conto della continuità della funzione esponenziale,

$$=\exp\left[\lim_{n\to\infty} n^3\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right]=+\infty$$

tenuto conto del limite notevole $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{1/n}=1$.

Alternativamente, tenuto conto del limite notevole $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>2$ ($e$ è il numero di Nepero),

si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{n^3} > \lim_{n\to\infty} 2^{n^3} = +\infty .$$

ESERCIZIO 4 – Tenuto conto che $t^2+1 \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, il dominio di definizione della funzione $f$ è $D=\mathbb{R}$.

Si osservi inoltre che, detta $g(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}$, risulta

$$f(t)=|g(t)|$$

Per tracciare un grafico della $f$, basta perciò tracciare prima quello della $g$ per ricostruire poi quello della $f$.

Si ha $g(t)=0$ se e solo se $t=\pm 1$.

Inoltre

$$\lim_{t\to\mp\infty} g(t)=1.$$

$y=1$ è perciò asintoto orizzontale a $\pm\infty$.

Passiamo allo studio della derivata prima:

$$g'(t)=\frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2}=\frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

Risulta $g'(t)\geq 0$ per $t\geq 0$. In particolare $g(0)=-1$ è il minimo relativo (in realtà assoluto) di $g$.

GRAFICO di g.

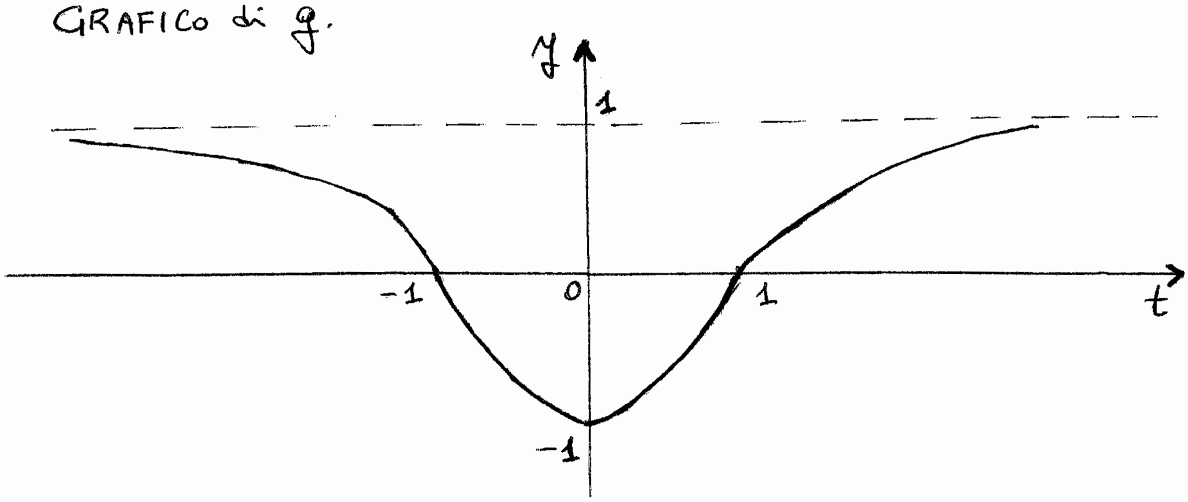
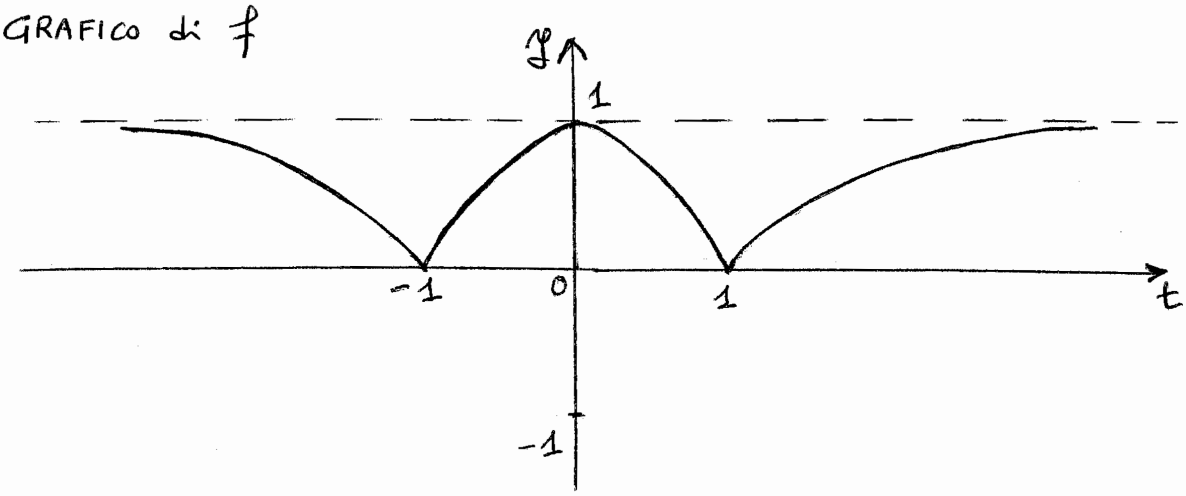



GRAFICO di f




Ovviamente in $\mp 1$ vi sono punti angolosi,

$$\lim_{t\to -1^-} f(t) = g(-1) = \frac{-4}{4} = -1,$$

$$\lim_{t\to -1^+} f(t) = -g(-1) = 1$$

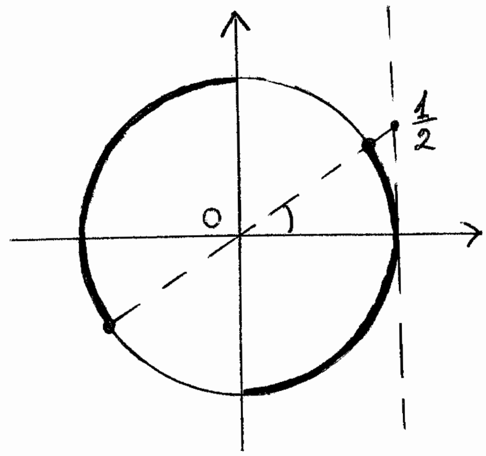
e analogamente in $t=1$ (la $f$, così come la $g$) è pari.
La $f$ ha perciò massimo assoluto $f(0)=1$, minimo assoluto nei due punti angolosi $f(-1)=f(1)=0$, asintoto orizzontale $y=1$ in $\mp\infty$.

ESERCIZIO 5 – Studiamo la funzione
$f(x) = \operatorname{sen} x + 2\cos x$.

Funzione periodica di periodo $2\pi$ che studieremo nell'intervallo $I = [-\pi, \pi]$

Risulta

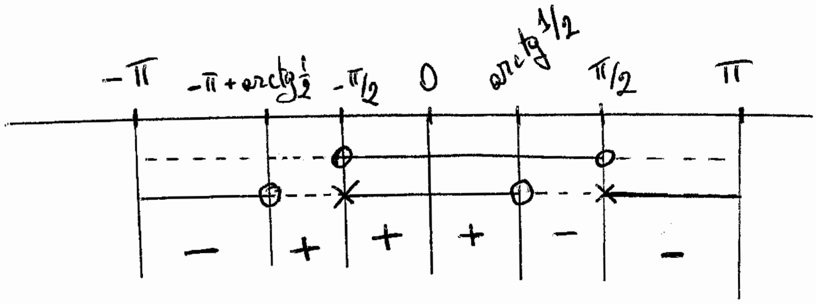
$$f'(x) = \cos x - 2 \operatorname{sen} x \geq 0$$




$$\cos x \left(1 - 2 \operatorname{tg} x\right) \geq 0$$

a) $\cos x \geq 0$ per $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

b) $\operatorname{tg} x \leq \frac{1}{2}$ per $-\pi < x < -\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$




Si osservi che i punti di non esistenza non sono da prendere in considerazione dipendendo solo dalla division per $\cos x$ prima operata.

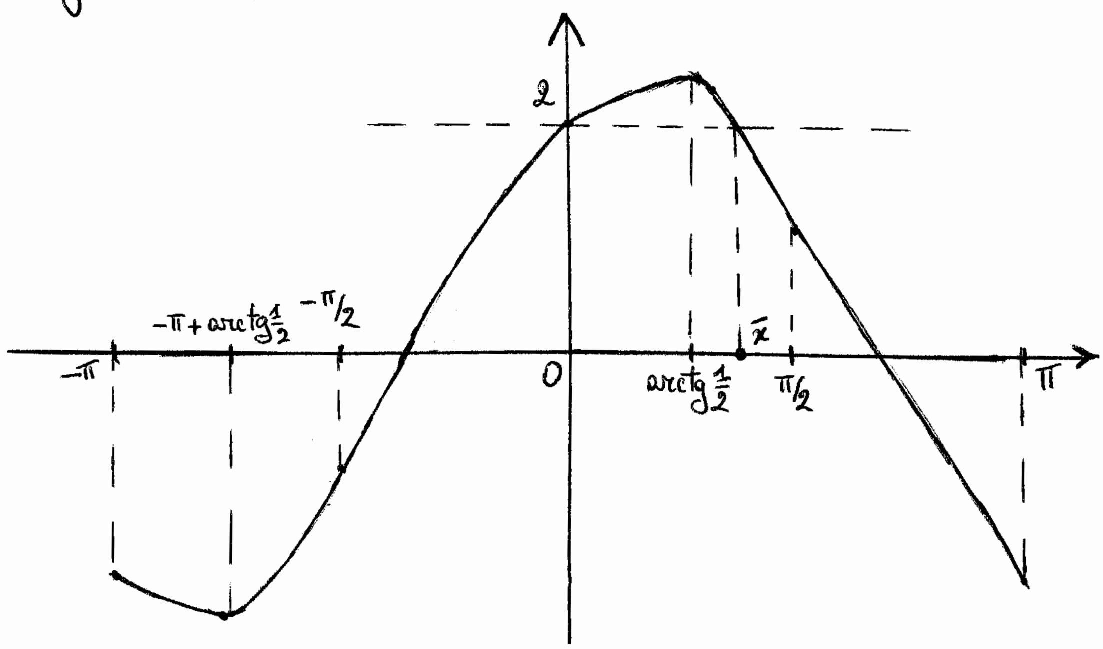
Dunque $f'(x) \geq 0$ per $-\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \leq x \leq \operatorname{arctg} 1/2$ e per $\pi/2 < x < \pi$.

Risulta $f(-\pi) = f(\pi) = -2$, $f(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $f(\pi/2) = 1$

$$f\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5} + 2\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}\,, \quad f(0)=2$$

$$f\left(-\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{5}$$

Un grafico approssimativo è perciò




Perciò la disequazione $f(x) \leq 2$ è valida per

$$0 \leq x \leq \bar{x}\,,$$

dove $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} < \bar{x} < \frac{\pi}{2}$ è un valore che si ritrova graficamente.

Per periodicità la disequazione è verificata per

$$2k\pi \leq x \leq \bar{x} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ESERCIZIO 6 – Tenuto conto dell'identità

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

e che i grafici di $\operatorname{sen}^2 t$ e $\cos^2 t$ sono si ottengono uno dall'altro con uno shift di $\frac{\pi}{2}$ (oltre che della periodicità $T = \pi$ di tali funzioni), si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt .$$

Perciò

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi$$

da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \, dt = \pi .$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, procedendo per parti, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(5t) dt = -\cos t \operatorname{sen}(5t) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \left(5 \cos(5t)\right) dt$$

$$= \operatorname{sen} t \left(5 \cos(5t)\right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \left(-25 \operatorname{sen}(5t)\right) dt$$

Perciò

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \, \operatorname{sen}(5t)\,dt = 25 \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \, \operatorname{sen}(5t)\,dt\,,$$

da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t \, \operatorname{sen}(5t)\,dt = 0.$$

ESERCIZIO 7 – Per prima cosa si tratta di decomporre in fratti semplici

$$\frac{t}{(t+1)(t-2)(t+2)} = \frac{a}{t-2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t+2}$$

da cui

$$t = a\left(t^2+3t+2\right) + b\left(t^2-4\right) + c\left(t^2-t-2\right)$$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a-c=1 \\ 2a-4b-2c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6a+2c=0 \\ 3a-c=1 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4c=-2 \\ 3a=1+c \\ b=-a-c \end{cases} \qquad \begin{cases} c=-1/2 \\ a=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\,\frac{1}{2}=\frac{1}{6} \\ b=-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Abbiamo perciò

$$\int f(t)\,dt = \frac{1}{6}\log|t-2| + \frac{1}{3}\log|t+1| + \\ -\frac{1}{2}\log|t+2| + k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Analisi Matematica 1 (6 CFU)
Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 1 settembre 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ____________________

# Esercizio 1

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1} - a_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

# Esercizio 2

Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + \log(1 + n^n)}{n \log(n^2) + \sin(n^2)}$$

# Esercizio 3

Calcolare (senza fare uso della regola di De L'Hospital)

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x^2+5} - 3}$$

# Esercizio 4

Facendo uso della regola di De L'Hospital calcolare

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x^2+5} - 3}$$

# Esercizio 5

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \sin^2(2x) \; dx$$

# Esercizio 6

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \frac{2t+3}{(t^2-1)^2}$$

# Esercizio 7

Trovare tutte le coppie $(z, w)$ di numeri complessi soluzione del sistema

$$\begin{cases} z - w = 2 + i \\ \\ zw = -2i. \end{cases}$$

# Esercizio 8

Studiare la funzione

$$f(t) = \log\left(\frac{t-1}{t^2}\right)$$

tracciandone un grafico approssimativo. o

Correzione prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) del 1° settembre 2003 — DOCENTE: BRUNO RUBINO

ESERCIZIO 1 — Si consideri la funzione

$$f(t) = \sqrt{t^2+1} - t, \quad \text{definita } \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cerchiamoci i punti uniti, ovvero le soluzioni di

$$f(t) = t \iff \sqrt{t^2+1} - t = t \iff \sqrt{t^2+1} = 2t$$

$$\iff t \geq 0 \text{ e } t^2+1 = 4t^2 \iff t \geq 0 \text{ e } 3t^2 = 1$$

$$\iff t = \sqrt{3}/3.$$

Abbiamo trovato un solo punto unito.

Calcoliamo la derivata:

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - 1, \quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{4/3}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

Il punto unito è perciò asintoticamente stabile.

Sia $I = [0,1]$. Preso $t \in [0,1]$, si ha

a) $f(t) \geq 0$

b) $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1} + t} \leq 1$

Dunque $t \in [0,1] \Rightarrow f(t) \in [0,1]$.

Poiché $\bar{t} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ è l'unico punto unito in $I$, la successione converge a $\bar{t}$ (visto che è asintoticamente stabile).

ESERCIZIO 2 – Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+\log(1+n^n)}{n\log(n^2)+\operatorname{sen}(n^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+n\log n+\log(1+n^{-n})}{2n\log n+\operatorname{sen}(n^2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n\log n}\left(\frac{1}{\log n}+1+\frac{\log(1+n^{-n})}{n\log n}\right)}{\cancel{n\log n}\left(2+\frac{\operatorname{sen}(n^2)}{n\log n}\right)} = \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 3 – Si ha

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{\sqrt{x^2+5}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x^2+5}+3\right)\log(x-1)}{x^2-4}$$

Posto $t=x-2$, ovvero $x=t+2$, si ha

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(\sqrt{t^2+4t+9}+3\right)\log(1+t)}{t\,(t+4)} =$$

tenuto conto del limite notevole

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1, \quad \text{si ha}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

ESERCIZIO 4 – Si ha, visto che si tratta di forma $\frac{0}{0}$ alla quale si applica la regola di De L'Hospital,

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2},$$

come già trovato nell'esercizio precedente

ESERCIZIO 5 - Calcoliamo intanto l'integrale indefinito: tenuto conto che $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$,

$$\int \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen}^2(2x)\, dx = 4 \int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx =$$

con la sostituzione $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x\, dx$,

$$= -4 \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x\, (-\operatorname{sen} x)\, dx =$$

$$= -4 \int (1-t^2)^2 t^2\, dt = -4 \int (t^2 - 2t^4 + t^6)\, dt$$

$$= -4 \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{2}{5} t^5 + \frac{1}{7} t^7\right) + k, \quad k \in \mathbb{R},$$

$$= -4 \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{2}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x\right) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Perciò

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen}^2(2x)\, dx = -4 \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \frac{2}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= +4 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right) = 4\, \frac{35-42+15}{105} = 4\, \frac{8}{105} = \frac{32}{105}$$

ESERCIZIO 6 - Si ha $(t^2-1)^2 = (t-1)^2 (t+1)^2$.

Usando le regole usuali per integrare le funzioni razionali, si ha

$$\frac{2t+3}{(t^2-1)^2} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{(t-1)^2} + \frac{d}{(t+1)^2}$$

$$a(t^2-1)(t+1)+b(t^2-1)(t-1)+c(t+1)^2+d(t-1)^2=$$
$$=2t+3$$

$$a(t^3+t^2-t-1)+b(t^3-t^2-t+1)+c(t^2+2t+1)+$$
$$+d(t^2-2t+1)=2t+3$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b+c+d=0 \\ -a-b+2c-2d=2 \\ -a+b+c+d=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-a \\ 2a+c+d=0 \\ 2c-2d=2 \\ -2a+c+d=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-a \\ c=d+1 \\ 2c+2d=3 \\ -2a+c+d=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-a \\ c=d+1 \\ 2d+2+2d=3 \\ -2a+2d+1=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=\frac{1}{4} \\ c=\frac{5}{4} \\ a=d-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4} \\ b=\frac{3}{4} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$f(t)=-\frac{3}{4}\frac{1}{t-1}+\frac{3}{4}\frac{1}{t+1}$$
$$+\frac{5}{4}\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(t+1)^2}$$

e di conseguenza

$$\int f(t)\,dt=-\frac{3}{4}\log|t-1|+\frac{3}{4}\log|t+1|-\frac{5}{4}\frac{1}{t-1}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}+k, \quad k\in\mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 7 — Sia $s = -w$. Si ha allora

$$\begin{cases} z + s = 2 + i \\ zs = 2i \end{cases}$$

Cerco perciò due numeri complessi $z$ ed $s$ la cui somma è $(2+i)$ e il cui prodotto è $(2i)$: si tratta delle soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$t^2 - (2+i)t + 2i = 0$$

$$t = \frac{(2+i) \mp \sqrt{(2+i)^2 - 8i}}{2} = \frac{(2+i) \mp (2-i)}{2},$$

ovvero

$t_1 = i$, $t_2 = 2$. Le due possibili coppie sono $(z, s) = (i, 2)$ e $(2, i)$, ovvero

$$(z_1, w_1) = (i, -2) \quad e \quad (z_2, w_2) = (2, -i)$$

ESERCIZIO 8 — Per stabilire il dominio di definizione, risolviamo la disequazione

$\frac{t-1}{t^2} > 0$, ovvero $D = \{t \in \mathbb{R} : t > 1\}$

Per quanto riguarda il segno di $f$, si tratta di risolvere l'ulteriore disequazione $\frac{t-1}{t^2} > 1$, ossia

$\frac{t-1-t^2}{t^2} > 0 \iff \frac{t^2-t+1}{t^2} < 0$, mai verificato.

Dunque $f(t) < 0$ per ogni $t \in D$.
Si ha poi

$$\lim_{t \to 1^+} \log\left(\frac{t-1}{t^2}\right) = -\infty, \quad \lim_{t \to +\infty} \log\left(\frac{t-1}{t^2}\right) = -\infty.$$

Studio della derivata prima:

$$f'(t) = \frac{t^2}{t-1} \cdot \frac{t^2-(t-1)2t}{t^4} = \frac{2-t}{t(t-1)} \geq 0$$

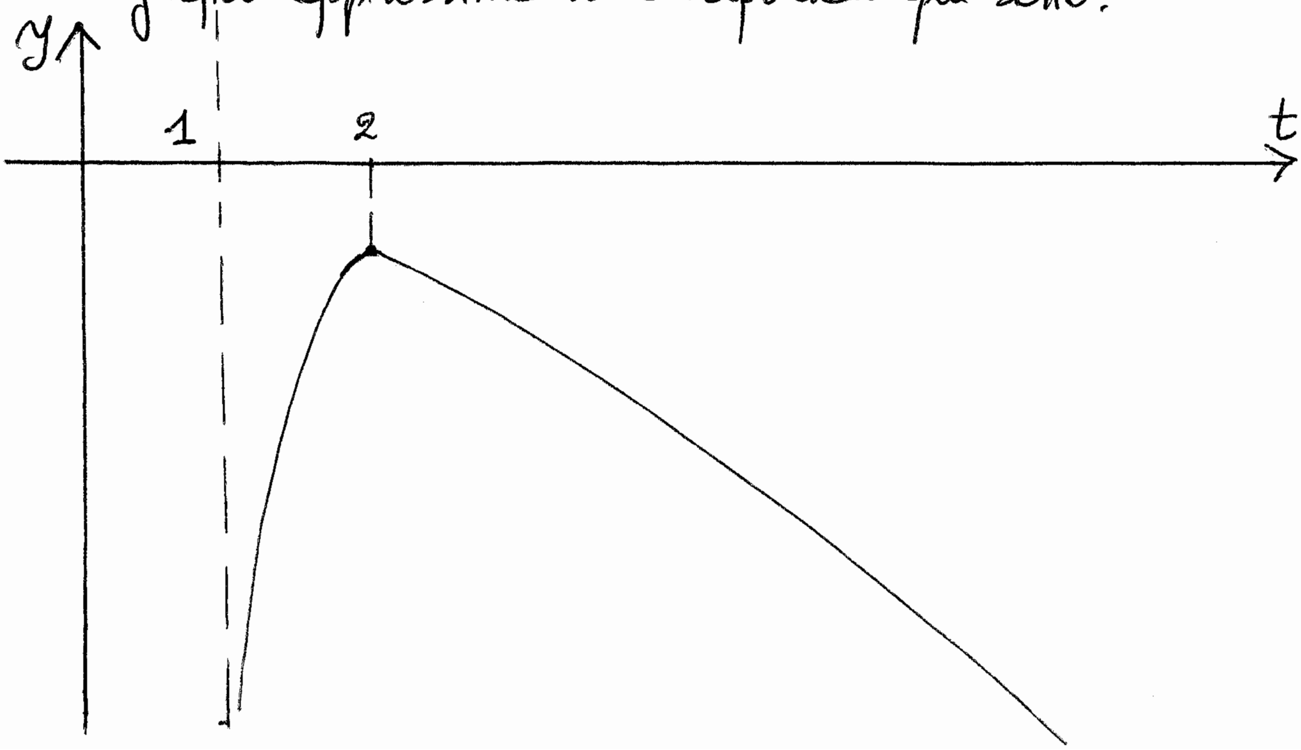
per $t \leq 2$ (ovviamente per i valori $t \in D$).

$$f(2) = \log\left(\frac{1}{4}\right) = -\log 4,$$ punto di massimo relativo (in realtà assoluto).

Infine, verifichiamo che a $+\infty$ non vi è asintoto obliquo: infatti

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{\log(t-1)}{t} - 2\frac{\log t}{t} = 0.$$

Un grafico approssimativo è riportato qui sotto.



# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docente: Bruno Rubino – L'Aquila, 15 settembre 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: ______________________________

Matricola: ______________________

## Esercizio 1

Dire per quali numeri naturali $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\binom{n}{2} - \binom{n-1}{2} \geq (n+1)^2 - 12n$$

## Esercizio 2

Calcolare il

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{5}{n^2+1}\right)^{n^3}$$

## Esercizio 3

Calcolare (senza fare uso della regola di De L'Hospital)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \arctan(n^2) - \log(n^3) + 5e^{-n}}{e^{-n^2} + e^{\sin n} + n}$$

## Esercizio 4

Facendo uso della regola di De L'Hospital calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x) + \sin(\pi x)}{x + \cos(\pi x)}$$

## Esercizio 5

Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = 10 \\ a_{n+1} = 3\sqrt{a_n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

# Esercizio 6

Calcolare, se ciò ha senso, il seguente integrale

$$\int_0^1 t^3 e^{-2t}\, dt$$

# Esercizio 7

Calcolare una primitiva della funzione

$$f(t) = \frac{e^{3t} - e^t}{e^{2t} - 4}$$

# Esercizio 8

Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ che verificano l'equazione

$$z + |z|^2 + 1 = 0.$$

# Esercizio 9

Studiare la funzione

$$f(t) = \frac{t+4}{t^2 + 8t + 7}$$

tracciandone un grafico approssimativo.

Correzione prova scritta di ANALISI MATEMATICA 1 (6 CFU) del 15.9.03 — DOCENTE: BRUNO RUBINO.

ESERCIZIO 1 — Tenuto conto della definizione di $\binom{n}{k}$, $k \leq n$ si ha

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} - \frac{(n-1)!}{2!(n-3)!} \geq n^2 - 10n + 1$$

e la disequazione proposta ha senso per $n \geq 3$.

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} \geq n^2 - 10n + 1$$

$$\cancel{n^2} - n - \cancel{n^2} + 3n - 2 \geq 2n^2 - 20n + 2$$

$$2n^2 - 22n + 4 \leq 0$$

$$n^2 - 11n + 2 \leq 0$$

Sia $x^2 - 11x + 2 = 0$. Si ha

$$x = \frac{11 \mp \sqrt{121-8}}{2} = \frac{11 \mp \sqrt{113}}{2} \notin \mathbb{N}$$

La nostra disequazione è perciò verificata per

$$\frac{11-\sqrt{113}}{2} < n < \frac{11+\sqrt{113}}{2},$$

ovvero la disequazione è verificata per $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$.

ESERCIZIO 2 — Si ha

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n^2+1}\right)^{n^3} = \lim_{n\to\infty} \exp\left[n^3 \log\left(1+\frac{5}{n^2+1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left[ \frac{\log\left(1+\frac{5}{n^2+1}\right)}{\frac{5}{n^2+1}} \frac{5n^3}{n^2+1} \right] = +\infty$$

tenuto conto del limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

ESERCIZIO 3 — Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\,\text{arctg}(n^2) - \log(n^3) + 5e^{-n}}{e^{-n^2} + e^{\text{sen}\, n} + n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(\text{arctg}(n^2) - 3\frac{\log n}{n} + 5\frac{1}{n e^n}\right)}{\cancel{n}\left(\frac{1}{n e^{n^2}} + \frac{e^{\text{sen}\, n}}{n} + 1\right)} = \frac{\pi/2}{1} = \frac{\pi}{2}$$

ESERCIZIO 4 — La forma considerata è indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$ e si può applicare la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(x) + \text{sen}(\pi x)}{x + \cos(\pi x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} + \pi\cos(\pi x)}{1 - \pi\,\text{sen}(\pi x)} =$$

$$= \frac{1-\pi}{1} = 1-\pi$$

ESERCIZIO 5 — Consideriamo la funzione $f(t) = 3\sqrt{t}$, definita per $t \geq 0$.

Stabiliamone per prima cosa i punti uniti, $f(t) = t$ :

$3\sqrt{t} = t \iff 9t = t^2$, le cui due soluzioni sono $t_0 = 0$, $t_1 = 9$.

Sia $I = [9, 10]$; preso $x \in I$, si ha

$3 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{10}$, ovvero $9 \leq 3\sqrt{x} \leq 3\sqrt{10} < 10$

Vale perciò la regola $x \in I \Longrightarrow f(x) \in I$.
Nell'intervallo $I$ $t_1 = 9$ è l'unico punto fisso.
Si ha $f'(t) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{t}}$, da cui $f'(9) = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{2}$

Perciò $t_1 = 9$ è l'unico punto fisso in $I$ ed è asintoticamente stabile.
La successione converge a $t_1 = 9$.

ESERCIZIO 6 – Calcoliamo intanto l'integrale indefinito procedendo per parti

$$\int t^3 e^{-2t} dt = t^3 \frac{e^{-2t}}{-2} - \int \frac{e^{-2t}}{-2} 3t^2 dt$$

$$= -\frac{1}{2} t^3 e^{-2t} + \frac{3}{2} \int t^2 e^{-2t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} t^3 e^{-2t} + \frac{3}{2} \left( t^2 \frac{e^{-2t}}{-2} - \int \frac{e^{-2t}}{-2} 2t\, dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} t^3 e^{-2t} - \frac{3}{4} t^2 e^{-2t} + \frac{3}{2} \int t e^{-2t} dt =$$

$$= -\frac{1}{2} t^3 e^{-2t} - \frac{3}{4} t^2 e^{-2t} + \frac{3}{2} \left( t \frac{e^{-2t}}{-2} - \int \frac{e^{-2t}}{-2} dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} t^3 e^{-2t} - \frac{3}{4} t^2 e^{-2t} - \frac{3}{4} t e^{-2t} + \frac{3}{4} \int e^{-2t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} t^3 e^{-2t} - \frac{3}{4} t^2 e^{-2t} - \frac{3}{4} t e^{-2t} - \frac{3}{8} e^{-2t} + k, \; k \in \mathbb{R}.$$

Perciò

$$\int_0^1 t^3 e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2} - \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{3}{4}e^{-2} - \frac{3}{8}e^{-2} +$$

$$+\frac{3}{8} = -\frac{4+6+6-3}{8}e^{-2} + \frac{3}{8} = -\frac{13}{8e^2} + \frac{3}{8}$$

ESERCIZIO 7 – Si ha

$$\int f(t)\,dt = \int \frac{e^{3t}-e^{t}}{e^{2t}-4}\,dt =$$ attraverso il cambio

di variabili $\quad x = e^t, \; dx = e^t dt$

$$= \int \frac{x^2-1}{x^2-4}\,dx = \int \frac{x^2-4+3}{x^2-4}\,dx = \int \left(1 + \frac{3}{x^2-4}\right)dx$$

Poichè poi $\frac{3}{x^2-4} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2}$,

$$3 = a(x+2) + b(x-2)$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a-2b=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-b \\ 4a=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\frac{3}{4} \\ b=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

Tornando all'integrale si ha quindi

$$= \int \left(1 + \frac{3}{4}\frac{1}{x-2} - \frac{3}{4}\frac{1}{x+2}\right)dx = x + \frac{3}{4}\log|x-2|$$

$$-\frac{3}{4}\log|x+2| + k, \; k \in \mathbb{R}.$$ Dunque

$$\int f(t)\,dt = e^t + \frac{3}{4}\log\left|\frac{e^t-2}{e^t+2}\right| + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 8 – Poichè $|z|^2+1$ è un numero reale strettamente positivo,

$z=-1-|z|^2$ è un numero reale strettamente negativo.

Sia $z=-x$, $x>0$. Allora

$$x^2-x+1=0, \quad x>0 \text{ reale}.$$

D'altra parte non esiste soluzione reale per tale equazione. Dunque l'equazione di partenza non ha soluzione.

ESERCIZIO 9 – Stabiliamo per prima cosa il suo dominio di definizione.

$t^2+8t+7=(t+1)(t+7)$,

per cui

$$D=\{t\in\mathbb{R} : t\neq -1,\ t\neq -7\}$$

Inoltre $f(t)=0 \iff t=-4$; $f(0)=\frac{4}{7}$

Abbiamo poi

$$\lim_{t\to-\infty} f(t)=0, \quad \lim_{t\to+\infty} f(t)=0,$$

$$\lim_{t\to-7^-} f(t)=-\infty, \quad \lim_{t\to-7^+} f(t)=+\infty$$

$$\lim_{t\to-1^-} f(t)=-\infty, \quad \lim_{t\to-1^+} f(t)=+\infty$$

Passiamo allo studio della derivata

$$f'(t) = \frac{t^2+8t+7-(t+4)(2t+8)}{(t+1)^2(t+7)^2}$$

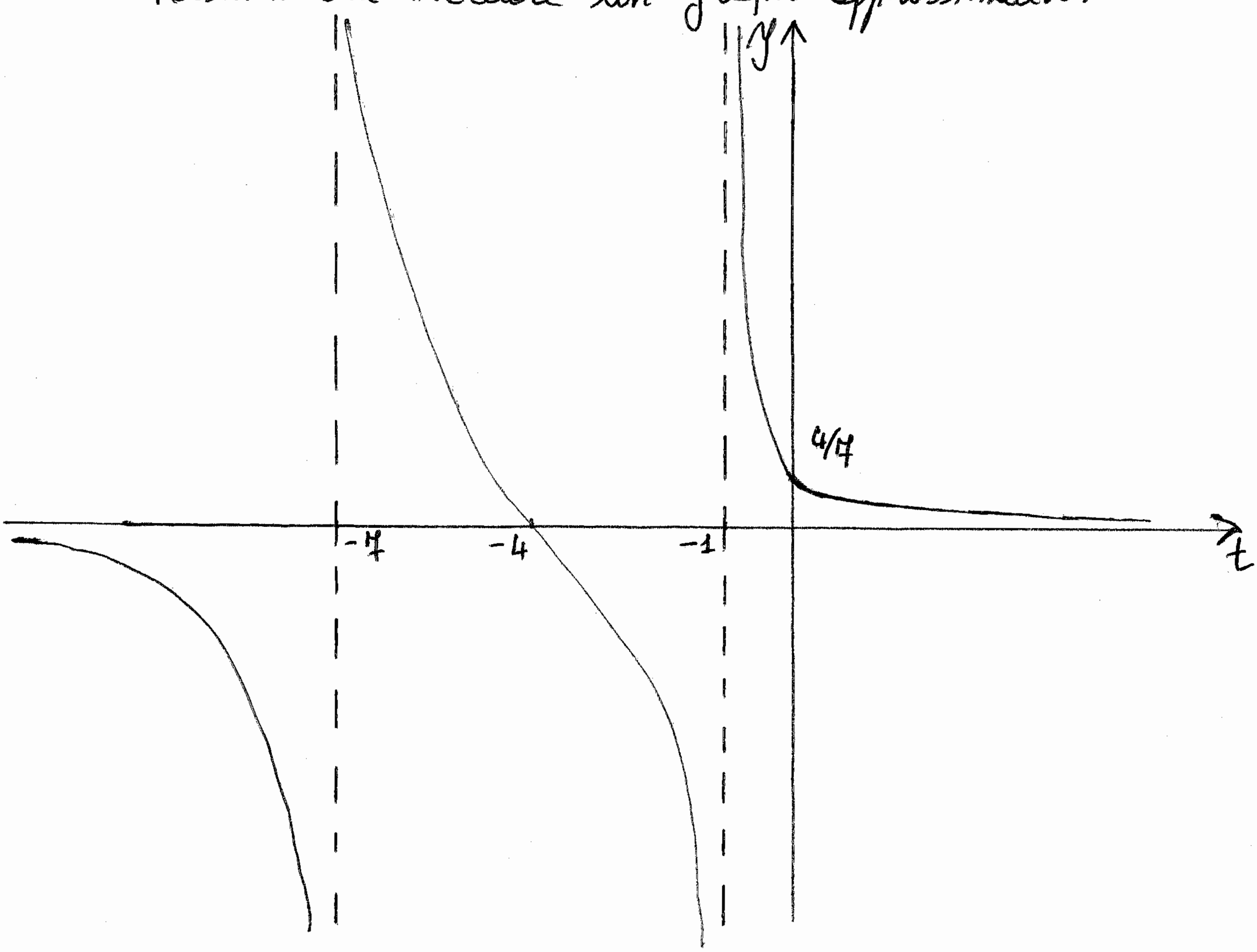
$$= \frac{t^2+8t+7-2t^2-16t-32}{(t+1)^2(t+7)^2}$$

$$= \frac{-t^2-8t-25}{(t+1)^2(t+7)^2}$$

$$= -\frac{t^2+8t+25}{(t+1)^2(t+7)^2} < 0 \quad \forall t \in D,$$

Visto che $t^2+8t+25>0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Possiamo ora tracciare un grafico approssimativo.



# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docenti: Rubino e Sampalmieri – L'Aquila, 1 dicembre 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: __________________________ Matricola: _____________

## Esercizio 1 [5 punti]

Dato l'insieme

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} : \; n \in \mathbb{N}, \; n \geq 1 \right\},$$

determinare, se esistono: l'estremo inferiore, l'estremo superiore, il massimo e il minimo.

## Esercizio 2 [6 punti]

Calcolare il $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x \arctan\left(1 - e^{1/x}\right)$

## Esercizio 3 [4 punti]

Calcolare la derivata prima e seconda della funzione $G(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2} dt$

## Esercizio 4 [6 punti]

Studiare la funzione $f(t) = t\sqrt{1-t^2}$ tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5 [5 punti]

Trovare tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ (espresse in forma algebrica) dell'equazione $1+z^4 = 0$.

## Esercizio 6 [4-6 punti]

Calcolare almeno uno dei seguenti due integrali:

a) $\int x^3 \arctan x \, dx$, b) $\int_1^3 \frac{\sqrt{1+x}}{x} \, dx$

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 1
del 1° dicembre 2003

ESERCIZIO 1 — Sia

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, \qquad n \geq 1.$$

La successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente perchè somma di due successioni monotone decrescenti.

Risulta allora

a) $\max\limits_{n\geq 1} a_n = \sup\limits_{n\geq 1} a_n = a_1 = 1+1 = 2$

mentre

b) $\inf\limits_{n\geq 1} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Tale valore non viene mai raggiunto (visto che $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$), per cui non esiste il minimo.

Perciò:

a) $\max A = \sup A = 2,$

b) $\inf A = 0$, mentre $\nexists \min A$.

ESERCIZIO 2 — Possiamo riscrivere la funzione

$$f(x) = e^x \operatorname{arctg}(1 - e^{1/x})$$

come prodotto di $\varphi(x) = e^x$, $\psi(x) = \operatorname{arctg}(1 - e^{1/x})$.

Risulta

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0,$$

per cui il limite proposto è una forma indeterminata.

Al fine di applicare la regola di De L'Hopital si ha

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(1-e^{1/x}\right)}{e^{-x}} =$$

applicando De L'Hopital (la forma è $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{-e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\left(1-e^{1/x}\right)^2}}{-e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{-\left[1+\left(1-e^{1/x}\right)^2\right] e^{-x} x^2}$$

$$= -\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}}{1+\left(1-e^{1/x}\right)^2} \cdot \frac{e^{x}}{x^2}$$

Risulta:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}}{1+\left(1-e^{1/x}\right)^2} = 1$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x}}{x^2} = +\infty$ visto che il numeratore è un infinito di ordine superiore.

Perciò $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

ESERCIZIO 3 — Ricordiamo che, se

$$G(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(t)\, dt =$$

se $H$ è una primitiva di $h$, $H'(t) = h(t)$, si ha

$$G(x) = H(\beta(x)) - H(\alpha(x)).$$

Perciò

$$G'(x) = H'(\beta(x))\beta'(x) - H'(\alpha(x))\alpha'(x) =$$

$$= e^{-(x^2)^2} \cdot 2x - e^{-(x)^2} \cdot 1 =$$

$$= 2x e^{-x^4} - e^{-x^2}$$

e inoltre

$$G''(x) = 2e^{-x^4} - 8x^4 e^{-x^4} + 2x e^{-x^2}$$

ESERCIZIO 4 – Il dominio di definizione della funzione $f$ è dato da

$$D = \{t \in \mathbb{R} : 1 - t^2 \geq 0\} = \{t \in \mathbb{R} : |t| \leq 1\}$$

Risulta $f(-1) = f(1) = 0$. Si ha

$$f'(t) = \sqrt{1-t^2} + t\,\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \frac{2(1-t^2) - 2t^2}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}}$$

per cui

$$\lim_{t \to -1^+} f'(t) = \lim_{t \to 1^-} f'(t) = -\infty$$

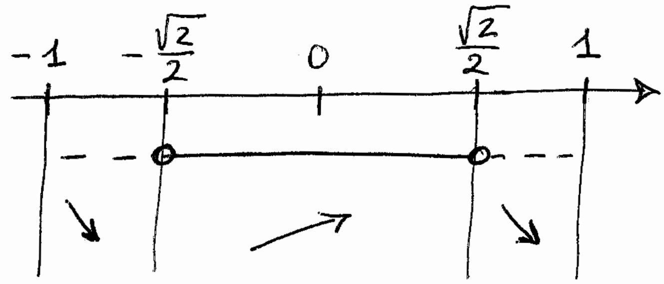
Per quanto riguarda poi il segno della $f$ e di $f'$ si ha:

i) $f(t) \geq 0 \iff t\sqrt{1-t^2} \geq 0$, per cui

$0 \leq t \leq 1$;

ii) $f'(t) \geq 0 \iff \dfrac{1-2t^2}{\sqrt{1-t^2}} \geq 0$, per cui

$$\begin{cases} 1-2t^2 \geq 0 \\ 1-t^2 > 0 \end{cases} \iff |t| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$




Perciò in $t_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ abbiamo un minimo relativo mentre in $t_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ un massimo relativo.

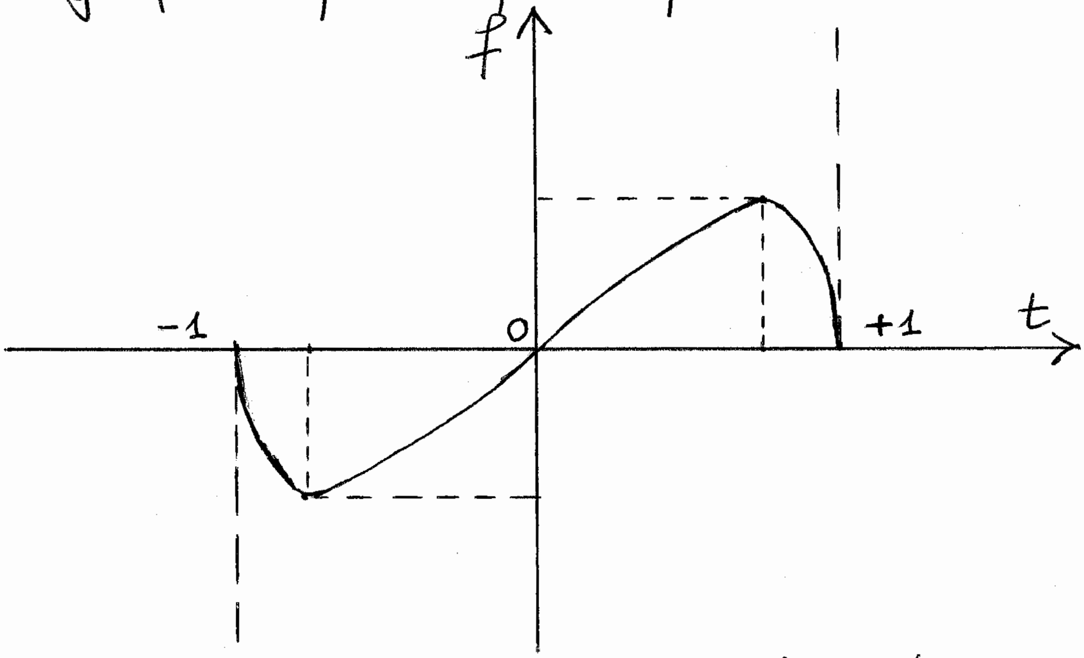
Osserviamo che $f(-t) = -t\sqrt{1-t^2} = -f(t)$, ovvero che la funzione $f$ è dispari.

Risulta $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$,

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = +\frac{1}{2}$

Possiamo perciò concludere che $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ è il minimo assoluto della funzione, mentre $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$ è il massimo assoluto.

Il grafico è quello riportato qui sotto.




Ai due estremi osserviamo che la $f$ ha tangente verticale.

ESERCIZIO 5 — Si tratta di trovare le quattro radici quarte di $-1$,

$$z^4 = -1.$$

Cerchiamo intanto le radici in forma esponenziale. Risulta

$z^4 = -1 = e^{i\pi}$, per cui, se $z = \rho e^{i\vartheta}$, si ha

$\rho^4 e^{4i\vartheta} = e^{i\pi}$, da cui

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ 4i\vartheta = i\pi + 2k\pi i \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = 1 \\ \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3. \end{cases}$$

Abbiamo allora trovato le quattro radici (che esprimeremo ora in forma algebrica)

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3}{4}\pi} = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{4} + i\pi} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_3 = e^{i\frac{3}{4}\pi + i\pi} = -e^{-i\frac{3}{4}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

ESERCIZIO 6-A – Si ha

$$\int x^3 \operatorname{arctg} x \, dx = \text{integrando per parti}$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arctg} x - \int \frac{1}{4} x^4 \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Operiamo la divisione

$$\begin{array}{r|l} x^4 \phantom{+x^2} & x^2+1 \\ \cline{2-2} x^4 + x^2 & x^2 - 1 \\ \hline -x^2 & \\ -x^2 - 1 & \\ \hline +1 & \end{array}$$

per cui

$$= \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \int \left( x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \frac{x^3}{3} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + c$$

$$= \frac{1}{4}(x^4 - 1) \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} x \left(1 - x^3/3\right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 6-B – Calcoliamo intanto l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}\, dx =$$

operando la sostituzione $1 + x = t^2$,

$x = t^2 - 1$, da cui $dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{2t^2}{t^2-1}\, dt = \int \left(2 + \frac{2}{t^2-1}\right) dt =$$

Risulta

$$\frac{2}{t^2\ 1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}, \quad \text{da cui}$$

$2 = a(t+1) + b(t-1)$ e quindi

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

e tornando all'integrale

$$= 2t + \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2t + \log(|t-1|)$$

$$- \log(|t+1|) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Perciò
$$\int_1^3 \frac{\sqrt{1+x}}{x}\,dx = \left(2\sqrt{1+x} + \log\left|\frac{1-\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}\right|\right)\Bigg|_1^3 =$$
$$= 2\cdot 2 + \log\left|\frac{1-2}{1+2}\right| - 2\sqrt{2} - \log\left|\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right|$$
$$= 4 - \log 3 - 2\sqrt{2} - \log\frac{1}{(1+\sqrt{2})^2} =$$
$$= 4 - 2\sqrt{2} - \log 3 + 2\log\left(1+\sqrt{2}\right).$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docenti: Rubino e Sampalmieri – L'Aquila, 16 dicembre 2003

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: __________________________ Matricola: ____________

## Esercizio 1 [5 punti]

Dato l'insieme
$$\mathcal{A} = \left\{ |x| : \ x \in \mathbb{R}, \ x^2 + x < 2 \right\},$$
determinare, se esistono: l'estremo inferiore, l'estremo superiore, il massimo e il minimo.

## Esercizio 2 [6 punti]

Calcolare il $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log x)^2 + \log(x^2)}}}{x^2+1}$

## Esercizio 3 [4 punti]

Dimostrare che la funzione $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \log x - \displaystyle\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$

è crescente.

## Esercizio 4 [6 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x-1}{\log(x-1)}$ tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5 [4 punti]

Esprimere in forma algebrica il numero complesso $z = \left( \dfrac{1-i}{i} \right)^6$

## Esercizio 6 [5-7 punti]

Calcolare almeno uno dei seguenti due integrali:

a) $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$ b) $\displaystyle\int_4^8 \frac{dx}{x + 3\sqrt{x-2}}$

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 1
del 16 dicembre 2003

ESERCIZIO 1 − Si ha

$$x^2+x<2$$

$$x^2+x-2=0$$

$$x=\frac{-1\mp\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\mp 3}{2} \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=1 \end{cases}$$

per cui la disequazione è verificata per
$$-2<x<+1,$$
quindi
$$A=\{|x|:\ x\in\mathbb{R},\ -2<x<1\}$$
$$=\{t\in\mathbb{R}:\ 0\le t<2\}$$

Abbiamo dunque

$$\inf A=\min A=0,$$

$\sup A=2$ che non viene raggiunto, per cui non esiste il massimo di $A$.

ESERCIZIO 2 − Il limite proposto è della forma $\frac{\infty}{\infty}$

Si ha

$$2^{\sqrt{(\log x)^2+\log(x^2)}} = \exp\left((\log 2)\sqrt{(\log x)^2+\log(x^2)}\right) \leqslant$$

per $x >> 1$, tenuto conto che $\log(x^2) = 2\log x < (\log x)^2$,

$$\leqslant \exp\left((\log 2)\sqrt{2}\log x\right) = x^{\sqrt{2}\log 2}$$

Perciò

$$0 \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{2^{\sqrt{(\log x)^2+\log(x^2)}}}{x^2+1} \leqslant \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\sqrt{2}\log 2}}{x^2+1} =$$

$= 0$ poichè $\sqrt{2}\log 2 < 2$.

ESERCIZIO 3 — La funzione $f$ è di classe $C^\infty([1,+\infty))$. Si ha

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$$

Visto che $x \geqslant 1$ e $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, risulta $f'(x) > 0$, ossia $f$ è strettamente crescente.

ESERCIZIO 4 – La funzione $f$ ha dominio di definizione

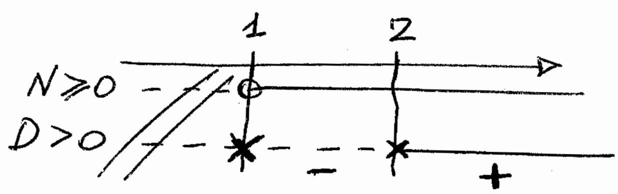
$$D = \{x \in \mathbb{R} : \ x-1>0, \ x-1 \neq 1\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} : \ x>1, \ x \neq 2\}$$
$$= (1,2) \cup (2,+\infty)$$

Risulta poi

$$f(x) \geq 0 \quad \text{per} \quad \frac{x-1}{\log(x-1)} \geq 0$$

$$x-1 \geq 0 \quad \text{per} \quad x \geq 1$$

$$\log(x-1) > 0 \quad \text{per} \quad x-1>1, \ \text{ovvero per} \ x>2$$




Perciò $f(x) > 0 \iff x > 2$

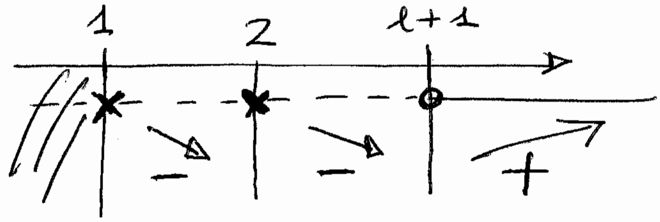
Si ha poi

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Si ha
$$f'(x)=\frac{\log(x-1)-1}{(\log(x-1))^2}$$

da cui $f'(x)\geqslant 0 \iff \log(x-1)\geqslant 1$,

ovvero $x-1\geqslant e$, $x\geqslant e+1$



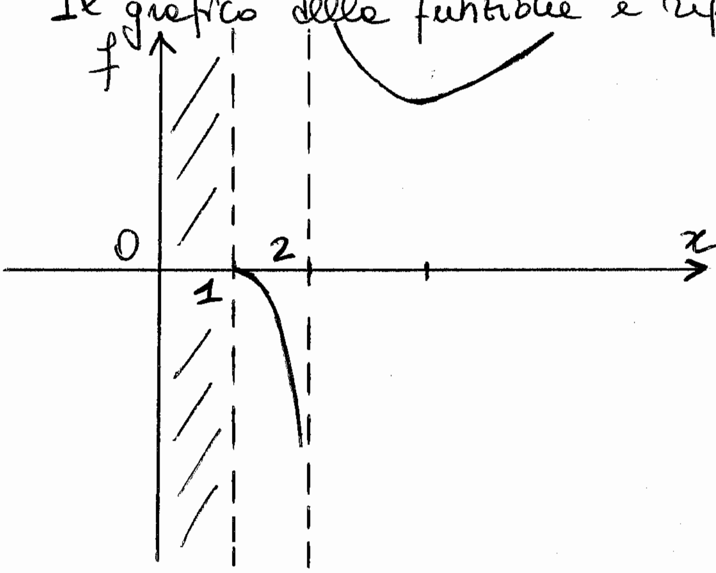

Risulta $f(e+1)=\dfrac{e}{\log e}=e$, minimo relativo.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x)=0$

La funzione non ha perciò né asintoto obliquo né orizzontale a $+\infty$.

Il grafico della funzione è riportato di seguito.



ESERCIZIO 5 – Scriviamo il numero complesso

$W = \frac{1-i}{i}$ in forma esponenziale:

$$= (1-i)(-i) = -1-i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)$$
$$= \sqrt{2}\, e^{\frac{5}{4}\pi i}$$

Perciò

$$z = W^6 = (\sqrt{2})^6 e^{\frac{30}{4}\pi i} = 8\, e^{(8-\frac{1}{2})\pi i}$$
$$= 8 e^{-\frac{\pi}{2} i} = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= 8(-i) = -8i$$

ESERCIZIO 6-A — Si ha

$$\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \text{integrando per parti}$$

$$= x\, \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 - \int \frac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 dx$$

Risulta poi

$$\int (\operatorname{arcsen} x)^2 dx = \text{attraverso la sostituzione } x = \operatorname{sen} y,\ dx = \cos y\, dy$$

$$= \int y^2 \cos y\, dy = \text{integrando due volte per parti}$$

$$= y^2 \operatorname{sen} y - \int 2y \operatorname{sen} y\, dy = y^2 \operatorname{sen} y$$
$$+ 2y \cos y - \int 2 \cos y\, dy =$$

$$= y^2 \operatorname{sen} y + 2y\cos y - 2\operatorname{sen} y + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= (\operatorname{arcsen} x)^2 x + 2 \operatorname{arcsen} x \sqrt{1-x^2} - 2x + c$$

Perciò

$$\int \frac{x \operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \cancel{\frac{x}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2} +$$

$$- \cancel{\frac{x}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2} - \operatorname{arcsen} x \sqrt{1-x^2} + x + c$$

$$= x - \operatorname{arcsen} x \sqrt{1-x^2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

ESERCIZIO 6-B – Calcoliamo intanto l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x + 3\sqrt{x-2}} = $$ attraverso la sostituzione $t = \sqrt{x-2}$, $x = t^2+2$, $dx = 2t\,dt$

$$= \int \frac{2t\, dt}{t^2 + 3t + 2}$$

Risulta

$$\frac{2t}{t^2+3t+2} = \frac{a}{t+2} + \frac{b}{t+1},$$

$$2t = a(t+1) + b(t+2)$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a+2b=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -b=2 \\ a=2-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b=-2 \end{cases}$$

Perciò

$$\int \frac{dx}{x+3\sqrt{x-2}} = \int \left( \frac{4}{t+2} - \frac{2}{t+1} \right) dt$$

$$= 4 \log|t+2| - 2 \log|t+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= 4 \log|2+\sqrt{x-2}| - 2 \log|1+\sqrt{x-2}| + c.$$

Perciò

$$\int_4^8 \frac{dx}{x+3\sqrt{x-2}} = 4 \log|2+\sqrt{6}| - 2 \log|1+\sqrt{6}|$$
$$- 4 \log|2+\sqrt{2}| + 2 \log|1+\sqrt{2}|$$

$$= 4 \log \frac{2+\sqrt{6}}{2+\sqrt{2}} + 2 \log \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}}$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docenti: Rubino e Sampalmieri – L'Aquila, 7 gennaio 2004

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: __________________________ Matricola: _____________

## Esercizio 1 [4 punti]

Dato l'insieme $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} : \ x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0\}$, determinare, se esistono: l'estremo inferiore, l'estremo superiore, il massimo e il minimo.

## Esercizio 2 [5 punti]

Calcolare il $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^3}$

## Esercizio 3 [5 punti]

Dimostrare per induzione la validità della seguente disequazione:

$$e^n + \pi^n < 5^n \qquad \forall n \geq 2.$$

## Esercizio 4 [6 punti]

Studiare la funzione $\displaystyle f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \arctan(\sqrt{x})}$ tracciandone un grafico approssimativo.

## Esercizio 5 [5 punti]

Esprimere in forma algebrica le coppie di numeri complessi $(w, z)$ che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} w + z = 1 + 3i, \\ wz = 3i. \end{cases}$$

## Esercizio 6 [5 punti]

Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, dx$.

## Esercizio Facoltativo [+2 punti]

Calcolare $\displaystyle\int_{-1}^{+1} t \log(1 + t^2)\, e^{-t^2} \, dt$.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 1 del 7 gennaio 2004

ESERCIZIO 1 – Per prima cose si tratta di risolvere la disequazione
$$x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0.$$

Sia $t = x^2$ si ha: $t^2 - 3t + 2 \leq 0$, e poiché
$t^2 - 3t + 2 = 0$ per $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$, si ottiene che la diseguaglianza è vera per $1 \leq t \leq 2$.
Tornando alla variabile $x$,

$1 \leq x^2 \leq 2$ ovvero

$-\sqrt{2} \leq x \leq -1$ e $1 \leq x \leq \sqrt{2}$.

Perciò $A = \{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{2} \leq x \leq -1$ e $1 \leq x \leq \sqrt{2}\}$
$= [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$ e

risulta
$$\inf A = \min A = -\sqrt{2},$$
$$\sup A = \max A = \sqrt{2}.$$

ESERCIZIO 2 — Il limite proposto è della forma $\frac{0}{0}$. Applicando la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}(x^2)}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x - 2x \cos(x^2)}{3x^2} =$$

applicando ancora la regola di De L'Hospital (la forma è ancora $\frac{0}{0}$)

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^2 x - 2\operatorname{sen}^2 x - 2\cos(x^2) + 4x^2 \operatorname{sen}(x^2)}{6x} =$$

visto che è ancora $\frac{0}{0}$ riapplichiamo De L'Hospital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-4\cos x \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen} x \cos x + 4x \operatorname{sen}(x^2) + 8x \operatorname{sen}(x^2) + 8x^3 \cos x^2}{6} =$$

$$= 0$$

ESERCIZIO 3 — Dimostriamo il passo iniziale:

per $n=2$ si ha $e^2+\pi^2 < 5^2$, vero in quanto

$$e^2+\pi^2 < 3^2+4^2 = 9+16 = 25.$$

Proviamo ora il passo induttivo: supposto vero che $e^n+\pi^n < 5^n$, si ha

$$e^{n+1}+\pi^{n+1} < 3e^n + 4\pi^n < 5(e^n+\pi^n) <$$

Usando il passo induttivo

$$< 5 \cdot 5^n = 5^{n+1}, \quad \text{vale a dire}$$

$$e^{n+1} + \pi^{n+1} < 5^{n+1}$$

e il passo induttivo è concluso.

ESERCIZIO 4 — Il dominio di definizione di $f$ è determinato da

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

ovvero

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, \ x \neq 1\}$$

Risulta poi $f(x) > 0$ se

$$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) > 0, \qquad \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) < \frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{x} < 1, \quad \boxed{x < 1}.$$

Si ha poi $f(0) = \dfrac{1}{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 0} = \dfrac{4}{\pi}$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty,$$

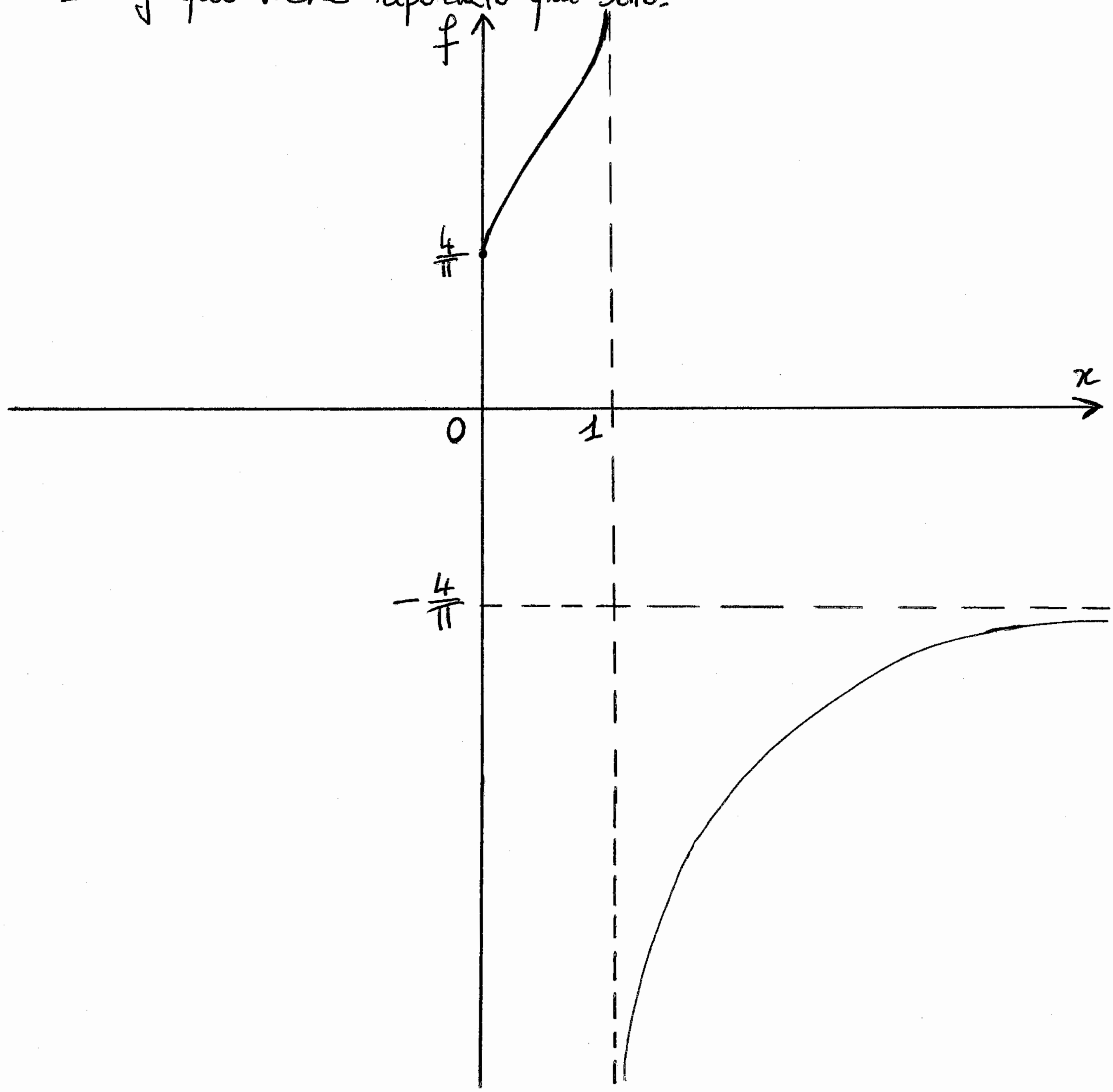
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}} = -\frac{4}{\pi} \quad \text{asintoto orizzontale}$$

La derivata è data da

$$f'(x) = \frac{+\frac{1}{1+x}\,\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Si ha $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty.$

Il grafico viene riportato qui sotto.



ESERCIZIO 5 – Stiamo cercando due numeri, $w$ e $z$ tali che il loro prodotto $p = 3i$ e la loro somma $s = 1+3i$; si tratta allora delle soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$t^2 - st + p = 0$$

e nel nostro caso

$$t^2 - (1+3i)t + 3i = 0$$

$$t = \frac{1+3i + \sqrt{(1+3i)^2 - 12i}}{2}$$

(non mettiamo il segno $\mp$ davanti alla radice perché intendiamo la radice di un numero complesso)

$$= \frac{1+3i \pm (1-3i)}{2}$$

Abbiamo perciò

$$\begin{cases} w = \dfrac{(1+3i)+(1-3i)}{2} = 1 \\ z = \dfrac{(1+3i)-(1-3i)}{2} = 3i \end{cases}$$

ed anche

$$\begin{cases} w = 3i \\ z = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 6 — Si ha

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx =$$

mediante la sostituzione $t=\sqrt{x}$, $x=t^2$, $dx = 2t\,dt$

$$= \int t\, e^t\, 2t\,dt = 2\int t^2 e^t\,dt =$$

integrando due volte per parti

$$= 2t^2 e^t - 4\int t\, e^t\,dt = 2t^2 e^t - 4t\, e^t + 4\int e^t\,dt$$

$$= (2t^2 - 4t + 4)\, e^t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tornando alla variabile iniziale si ha quindi

$$\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx = (2x - 4\sqrt{x} + 4)\, e^{\sqrt{x}} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO FACOLTATIVO — Detta

$$f(t) = t \log(1+t^2)\, e^{-t^2}, \quad \text{si ha } f(-t) = -f(t)$$

La funzione integranda è dispari, l'intervallo di integrazione è simmetrico e di conseguenza

$$\int_{-1}^{+1} f(t)\, dt = 0.$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
# Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale

Docenti: Rubino e Sampalmieri – L'Aquila, 15 marzo 2004

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: __________________________ Matricola: _____________

## Esercizio 1 [4 punti]

Scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione $y = x^{x \log x}$ in $x = e$

## Esercizio 2 [4 + 4 punti]

Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\log(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos 2x}) \tan x}{x^2}$

## Esercizio 3 [4 + 4 punti]

Calcolare

a) $\displaystyle\int \frac{8x}{1 + (x^2 - 1)^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int_4^1 \frac{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

## Esercizio 4 [6 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{1}{\log(x^2 - 1)}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

## Esercizio 5 [4 punti]

Esprimere in forma algebrica il seguente numero complesso $\dfrac{e^{\frac{\pi}{3} i}(2i - 1)}{i + 1}$

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 1
del 15 marzo 2004

ESERCIZIO 1 — Possiamo riscrivere la funzione come

$$f(x) = \exp\left(\log\left(x^{x\log x}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(x(\log x)^2\right)$$

Perciò

$$f'(x) = \left[(\log x)^2 + 2\log x\right]\exp\left(x(\log x)^2\right)$$

da cui

$$f'(e) = (1+2)e^e = 3e^e$$

Inoltre $f(e) = e^e$.

La retta tangente è perciò data da

$$y = f(e) + f'(e)(x-e) = e^e + 3e^e(x-e).$$

ESERCIZIO 2-A — Il limite proposto è della forma $\frac{0}{0}$. Possiamo usare la regola di De L'Hopital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\operatorname{sen} x)}{(\pi-2x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2(-2)(\pi-2x)\operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} +\frac{1}{8}\frac{\cos x}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen} x} =$$

ancora della forma $\frac{0}{0}$. Riapplichiamo De L'Hopital

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8} \frac{-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + (x-\frac{\pi}{2})\cos x} = \frac{1}{8} \frac{-1}{1} = -\frac{1}{8}$$

ESERCIZIO 2-B — Risulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\sqrt{\cos 2x})\, tg\, x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 2x)\, tg\, x}{(1+\sqrt{\cos 2x})\, x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)\ tg\, x}{(1+\cos 2x)(1+\sqrt{\cos 2x})\, x^2} = 0$$

visto che $\lim_{x\to 0} tg\, x = 0$ mentre

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{(1+\cos 2x)(1+\sqrt{\cos 2x})\, x^2} = \frac{4}{2\cdot 2} = 1.$$

ESERCIZIO 3 — A — Risulta

$$\int \frac{8x\, dx}{1+(x^2-1)^2} =$$ con la sostituzione $t = x^2-1$, $dt = 2x\,dx$

$$= \int \frac{4\, dt}{1+t^2} = 4 \operatorname{arctg} t + c =$$

$$= 4 \operatorname{arctg}(x^2-1) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3-B — Partiamo calcolando l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{5/6}-1\right)dx$$

$$= \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} - x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Perciò
$$\int_4^1 \frac{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \left(\frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}}-x\right)\Big|_4^1 =$$

$$= \frac{6}{11} - 1 - \frac{6}{11}4^{11/6} + 4 = 3 + \frac{6}{11}\left(1-\sqrt[6]{4^{11}}\right)$$

ESERCIZIO 4 — Il dominio di definizione della funzione è

$$D = \left\{x \in \mathbb{R}:\ x^2-1>0,\ x^2-1 \neq 1\right\}$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}:\ |x|>1,\ x \neq \mp\sqrt{2}\right\}$$
$$= (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$$

Si osservi poi che $f(-x) = + f(x)$, ossia la funzione è pari. Basterà studiarla per le $x>0$.
Risulta
$$f(x)>0 \text{ per } \log(x^2-1)>0 \text{ ovvero per } x>\sqrt{2}.$$

Abbiamo inoltre (limitandosi alle $x>0$)

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 , \quad \lim_{x \to \sqrt{2}^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \sqrt{2}^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

per cui $y=0$ è asintoto orizzontale.

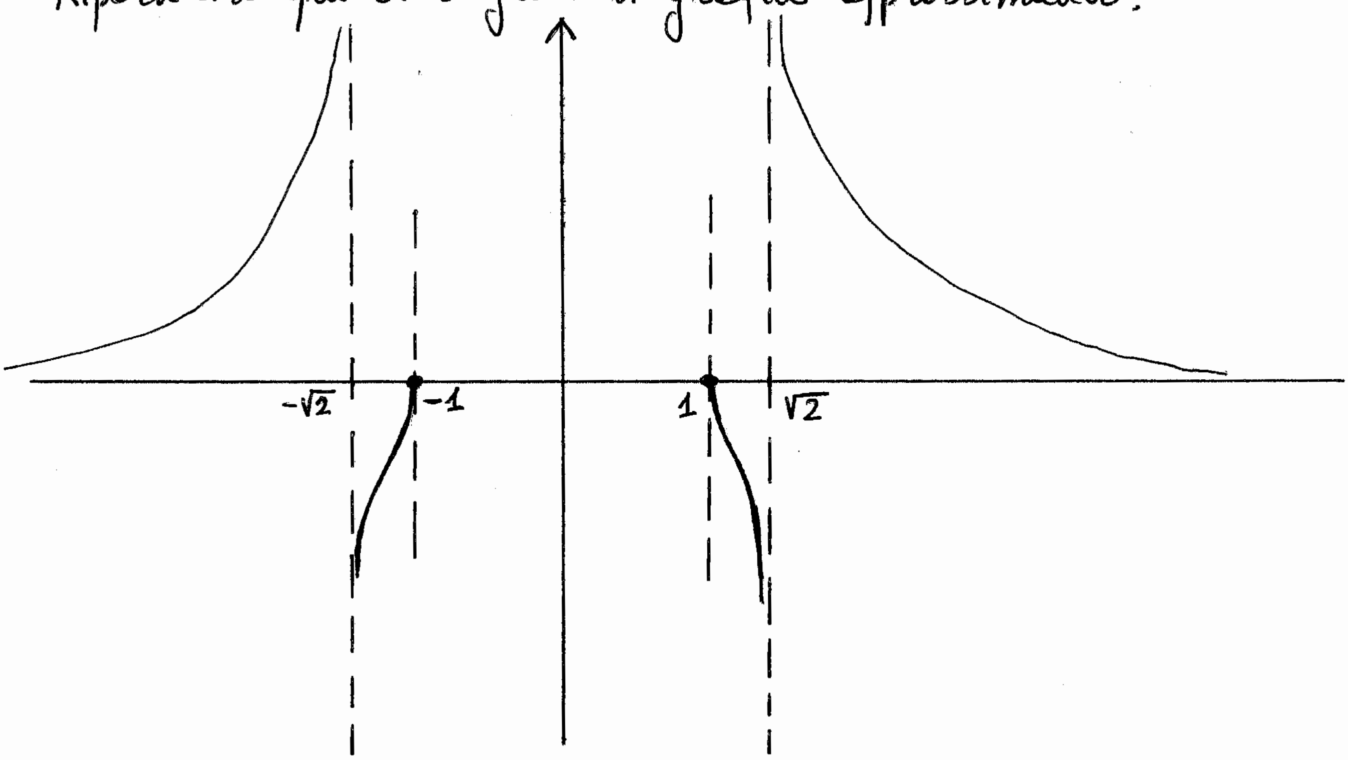
Passiamo al calcolo ed allo studio della derivata

$$f'(x) = \frac{-2x}{(\log(x^2-1))^2 (x^2-1)} < 0$$ per le $x>0$ del dominio di definizione.

Risulta

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -\infty$$ visto che il denominatore tende a zero per valori positivi.

Riportiamo qui di seguito il grafico approssimativo.



ESERCIZIO 5 – Sia

$$w = \frac{2i-1}{i+1} = \frac{(2i-1)(1-i)}{2} = \frac{2i+2-1+i}{2} = \frac{1+3i}{2}$$

Allora

$$z = e^{\frac{\pi}{3}i} w = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)\frac{1+3i}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + i\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 - 3\sqrt{3}\right) + \left(3 + \sqrt{3}\right)\frac{i}{4}.$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Chimica, Civile, Elettronica, Gestionale
Docenti: Rubino e Sampalmieri – L'Aquila, 1 aprile 2004

Cognome e nome: ______________________________

Corso di Laurea: __________________________ Matricola: _____________

## Esercizio 1 [5 punti]

Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2} & \text{se } x < 0, \\ x^2 + k^2 x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

risulta di classe $C^1(\mathbb{R})$.

## Esercizio 2 [5 punti]

Determinare la primitiva $F(x)$ della funzione

$$f(x) = x^2 (\log x)^2 + 1$$

tale che $F(1) = 0$.

## Esercizio 3 [7 punti]

Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{|x|}{x-1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

## Esercizio 4 [4+5 punti]

Calcolare i seguenti limiti

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \log(e^x \cos x)}{x \sin x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right) - 1\right] \sqrt[3]{x^2}$

## Esercizio 5 [4 punti]

Determinare le radici quinte del numero complesso $-i$.

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 1
del 1° aprile 2004

ESERCIZIO 1 — Per $x>0$ e $x<0$ la funzione è di classe $C^\infty$ perchè somma e composizione di funzioni di classe $C^\infty$. Si tratta di vedere per quali $K \in \mathbb{R}$ la funzione risulta continua e derivabile in $x_0=0$. Si ha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x e^{-x^2} = 0,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2+K^2x = 0 = f(0),$$

per cui la funzione è continua qualunque sia $K \in \mathbb{R}$.
Risulta poi

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} e^{-x^2} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x+K^2 = K^2.$$

La $f \in C^1(\mathbb{R})$ se e solo se $K^2=1$, ossia per $\boxed{K=\mp 1}$

ESERCIZIO 2 — In base al teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$F(x) = F(1) + \int_1^x f(t)\,dt =$$

$$= \int_1^x \left( t^2 (\log t)^2 + 1 \right) dt = (x-1) + \int_1^x t^2 (\log t)^2 \, dt$$

Si tratta di calcolare l'integrale indefinito

$\int t^2 (\log t)^2 dt$ = integrando per parti

$= \frac{1}{3} t^3 (\log t)^2 - \int \frac{1}{3} t^3 \, 2(\log t) \frac{1}{t} \, dt$ = con una nuova integrazione per parti

$$= \frac{1}{3} t^3 (\log t)^2 - \frac{2}{3} \int t^2 \log t \, dt =$$

$$= \frac{1}{3} t^3 (\log t)^2 - \frac{2}{9} t^3 \log t + \frac{2}{9} \int t^3 \frac{1}{t} \, dt =$$

$$= \frac{1}{3} t^3 (\log t)^2 - \frac{2}{9} t^3 \log t + \frac{2}{27} t^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tornando all'integrale indefinito si ha

$$F(x) = x - 1 + \left[ \frac{1}{3} t^3 (\log t)^2 - \frac{2}{9} t^3 \log t + \frac{2}{27} t^3 \right]_{t=1}^{t=x} =$$

$$= x - 1 + \frac{1}{3} x^3 (\log x)^2 - \frac{2}{9} x^3 \log x + \frac{2}{27} x^3 - \frac{2}{27}$$

che è la primitiva cercata.

ESERCIZIO 3 – Il dominio di definizione è dato da

$$D=\{x\in\mathbb{R} : x\neq 1\}$$

Si ha poi $f(0)=e^0=1$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp\left(\frac{-x}{x-1}\right) = \frac{1}{e},$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right) = e$$

entrambi asintoti orizzontali.

Inoltre

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \exp\left(\frac{x}{x-1}\right) = +\infty,$$

asintoto verticale.

Risulta poi ovviamente $f(x)>0 \ \forall x\in D$.

Passiamo ora allo studio della derivata prima: per $x\neq 0$, indicata con $\mathrm{sgn}(x)=\frac{x}{|x|}=\frac{|x|}{x}$ la funzione segno,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{sgn}(x)\,(x-1)-|x|}{(x-1)^2} =$$

$$=|x|\,\frac{x-1-x}{x(x-1)^2} = |x|\,\frac{-1}{x(x-1)^2}$$

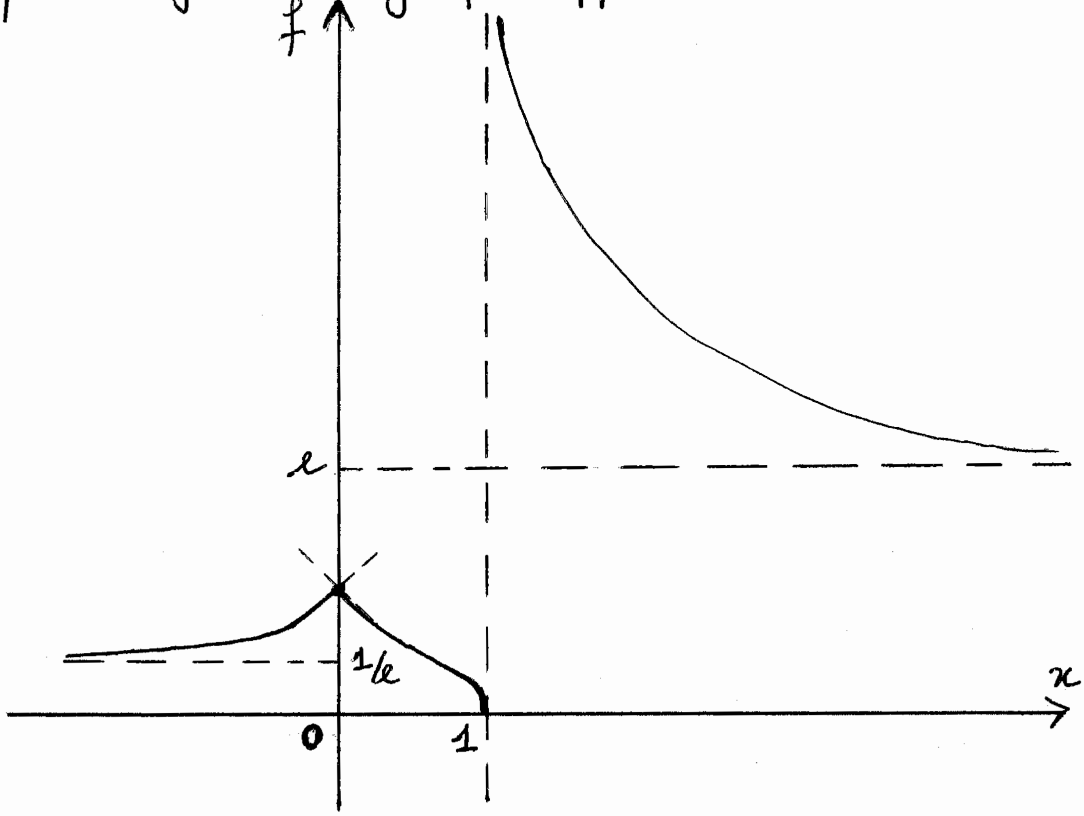
Perciò $f'(x)>0$ per $x<0$.

Inoltre notiamo che

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \ , \ \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1 .$$

Si ha poi $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = -\infty$.

Riportiamo qui di seguito un grafico approssimativo.




In $x_0 = 0$ c'è un punto di massimo locale, sebbene sia un punto in cui non esiste $f'$: si tratta di un punto angoloso.

ESERCIZIO 4-A — Si ha una forma di tipo $\frac{0}{0}$, indeterminata, al quale si può applicare la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - \log(e^x \cos x)}{x \operatorname{sen} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \frac{e^{-x}}{\cos x}\left(e^{x}\cos x - e^{x}\operatorname{sen} x\right)}{x\cos x + \operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - \cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x\,(x\cos x + \operatorname{sen} x)} =$$ riapplicando de l'Hospital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + \cos x}{-\operatorname{sen} x\,(x\cos x + \operatorname{sen} x) + \cos x\,(\cos x - x\operatorname{sen} x + \cos x)} =$$

$$= \frac{1}{2}$$

ESERCIZIO 4-B — Si tratta di un limite della forma $0\cdot\infty$. Possiamo riscrivere lo stesso nella forma $\frac{0}{0}$, infatti

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)-1\right]\sqrt[3]{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)-1}{x^{-2/3}} =$$ applicando ora la regola di De L'Hospital

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{3}\,x^{-5/3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{x}} = 0$$

ESERCIZIO 5 — Sia $w = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Allora,

se $z \in \mathbb{C}$ è tale che $z^5 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. Perciò

$$z_K = e^{\left(-i\frac{\pi}{2} + 2K\pi i\right)\frac{1}{5}}, \quad K = -2, -1, 0, 1, 2$$

Ответ

$$z_{-2}=e^{-\frac{9}{10}\pi i},\quad z_{-1}=e^{-\frac{5}{10}\pi i},\quad z_0=e^{-\frac{\pi}{10}i},$$

$$z_1=e^{\frac{3}{10}\pi i},\quad z_2=e^{\frac{7}{10}\pi i}.$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Gestionale
Docente: R. Sampalmieri – L'Aquila, 5 luglio 2004

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________

## Esercizio 1 [6 punti]

Scrivere in forma algebrica le radici quadrate di

$$\frac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$$

## Esercizio 2 [5 punti]

Calcolare uno dei seguenti integrali

**a)** $\displaystyle\int e^x\sqrt{(1-e^x)}\,dx$

**b)** $\displaystyle\int_4^5 \frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx$

## Esercizio 3 [5 punti]

Calcolare

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\cos x-1}{x^3}$$

## Esercizio 4 [8 punti]

Studiare la funzione $f(x)=\sqrt{x}(1+\log|x|)$ e tracciarne un grafico approssimativo.

## Esercizio 5 [6 punti]

Calcolare la derivata prima e seconda della funzione

$$f(x)=\int_{2x}^{x^2}\frac{e^{-t^2}}{t}\,dt$$

per $x>1$.

# Correzione della prova scritta di Analisi Matematica 1 del 5 luglio 2004

## ESERCIZIO 1 – Sia

$$w = \frac{(1+2i)(2-3i)}{(2-i)(3+2i)}$$

Risulta

$$w = \frac{(1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)}{5 \cdot 13} =$$

$$= \frac{(2+2i-3i+6)(6-4i+3i+2)}{65} =$$

$$= \frac{(8-i)(8-i)}{65} = \frac{64-16i-1}{65} =$$

$$= \frac{63-16i}{65}$$

Si ha $\quad \rho = \sqrt{\dfrac{63^2+16^2}{65^2}} = 1,$

$\operatorname{tg} \vartheta_0 = -\dfrac{16}{63}$ , ovvero $\vartheta_0 = -\operatorname{arctg}\left(\dfrac{16}{63}\right)$

Perciò

$$w = e^{i\vartheta_0}$$

e di conseguenza

$z^2 = w = e^{i\vartheta_0}$ per cui $z = \mp e^{i\frac{\vartheta_0}{2}}$

Si tratta allora di determinare $\operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right)$.

Risulta

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta_0}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{63}{65}}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$\cos\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta_0}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{63}{65}}{2}} = \sqrt{\frac{64}{65}}$$

e quindi

$$z_1 = \sqrt{\frac{64}{65}} - i\sqrt{\frac{1}{65}}$$

$$z_2 = -\sqrt{\frac{64}{65}} + i\sqrt{\frac{1}{65}}$$

ESERCIZIO 2-A – Si ha

$$\int e^x \sqrt{1-e^x}\,dx =$$

con la sostituzione

$$t^2 = 1-e^x$$

$$2t\,dt = -e^x\,dx$$

$$= \int -2t^2\,dt = -\frac{2}{3}t^3 + c =$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{(1-e^x)^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3-A — Calcoliamo intanto l'integrale indefinito:

$$\int \frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx$$

Trattandosi di una funzione razionale, decomponiamo la funzione integranda in fratti semplici:

$x^2-x-6=0$ per $x=-2$ e $x=3$.

Perciò

$$\frac{x+1}{x^2-x-6}=\frac{\alpha}{x+2}+\frac{\beta}{x-3},$$

da cui

$$x+1=\alpha(x-3)+\beta(x+2),$$

vale a dire

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\-3\alpha+2\beta=1\end{cases}\qquad\begin{cases}5\beta=4\\5\alpha=1\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=\frac{1}{5}\\\beta=\frac{4}{5}\end{cases}$$

Tornando all'integrale indefinito si ha

$$\int\frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x-3}$$

$$=\frac{1}{5}\log|x+2|+\frac{4}{5}\log|x-3|+c,\ c\in\mathbb{R}.$$

Risulta perciò

$$\int_4^5\frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx=\frac{1}{5}\log|x+2|+\frac{4}{5}\log|x-3|\Big|_4^5=$$

$$= \frac{1}{5}\left(\log 7 - \log 6\right) + \frac{4}{5}\left(\log 2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\log\left(\frac{7}{6}\right) + \frac{4}{5}\log 2 .$$

ESERCIZIO 3 — Il limite proposto è della forma $\frac{0}{0}$; possiamo applicare la regola di De L'Höpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \cos x - 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{3x^2} =$$

riapplicando la regola di De L'Hospital visto che la forma è ancora $0/0$,

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{6x} = 0$$ visto che il numeratore è un infinitesimo del secondo ordine.

ESERCIZIO 4 — La funzione $f$ è definita su

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}.$$

Risulta $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\left(1 + \log|x|\right) =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\log|x|}{x^{-1/2}} =$$ trattandosi di una forma $\frac{\infty}{\infty}$, si può applicare la regola di De L'Hospital

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0^+} -2\sqrt{x} = 0$$

Inoltre $f(x) \geq 0 \iff 1 + \log x \geq 0$,

ovvero $\log x \geq -1$, $\boxed{x \geq \frac{1}{e}}$

Si ha poi

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Passando allo studio della derivata prima si ha

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\log x\right) + \sqrt{x}\,\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\log x + 2\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(3+\log x\right)$$

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$$ per cui non vi è asintoto obliquo.

$$f'(x) \geq 0 \iff 3 + \log x \geq 0, \quad x \geq \frac{1}{e^3}$$

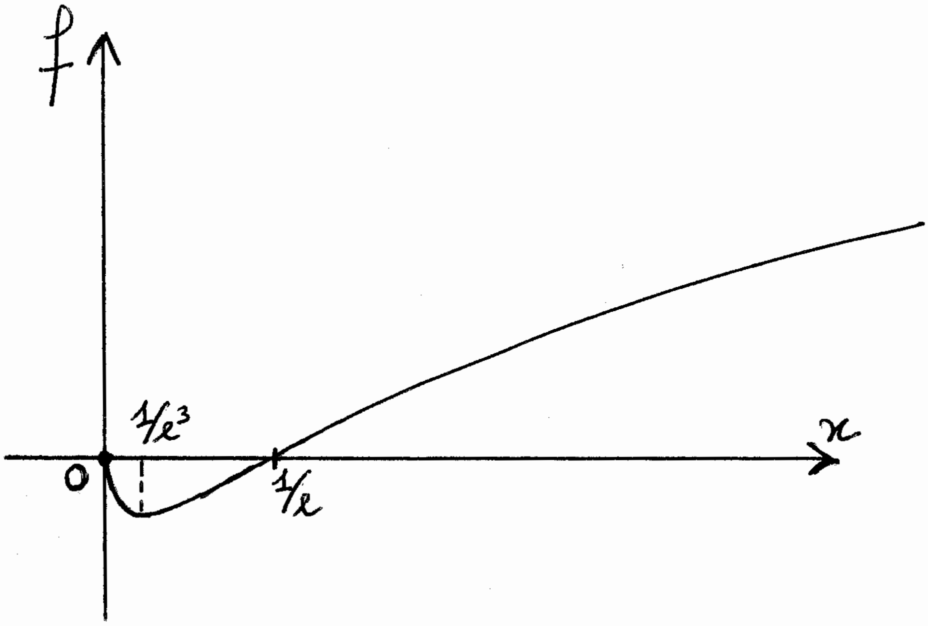
$$f\left(\frac{1}{e^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{e^3}}\left(1-3\right) = -\frac{2}{\sqrt{e^3}}$$

Data la semplicità della derivata prima, possiamo continuare derivando ancora

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(3+\log x\right)}{2x} =$$

$$= \frac{2-3-\log(x)}{4x\sqrt{x}} = -\frac{1+\log(x)}{4x\sqrt{x}}$$

Perciò $f''(x) \geq 0 \iff \log(x)+1 \leq 0$, $\boxed{x \leq \frac{1}{e}}$




ESERCIZIO 5 – Ricordiamo che, se

$G(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} h(t)\,dt$ = se $H$ è una primitiva di $h$, $H'(t) = h(t)$, si ha

$G(x) = H(\beta(x)) - H(\alpha(x))$.

Perciò

$$G'(x) = H'(\beta(x))\beta'(x) - H'(\alpha(x))\alpha'(x) =$$

$$= \frac{e^{-x^4}}{x^2}\,2x - \frac{e^{-4x^2}}{2x}\,2 = \frac{2}{x}e^{-x^4} - \frac{1}{x}e^{-4x^2}$$

$$G''(x) = -\frac{2}{x^2} e^{-x^4} - 8x^2 e^{-x^4} + \frac{1}{x^2} e^{-4x^2} + 8 e^{-4x^2}$$

$$= -\frac{2}{x^2} e^{-x^4}\left(1+4x^4\right) + \frac{1}{x^2} e^{-4x^2}\left(1+8x^2\right)$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Gestionale
Docente: R. Sampalmieri – L'Aquila, 22 luglio 2004

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________

## Esercizio 1 [5 punti]

Scrivere in forma algebrica il numero complesso

$$z = (1+i)^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)^3$$

## Esercizio 2 [5+4 punti]

Calcolare i seguenti integrali

**a)** $\displaystyle\int \sin^2(3t)\cos^2(3t)\,dt$

**b)** $\displaystyle\int \frac{e^x}{\cos^2(e^x)}\,dx$

## Esercizio 3 [5 punti]

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}^+$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(1-\cos x) + x^k}{\log(1+x)}$$

## Esercizio 4 [6 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \left(x^2 - 1\right)^{-\frac{1}{3}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

## Esercizio 5 [5 punti]

Scrivere l'equazione della retta tangente alla funzione

$$f(x) = x^2 + 2 - \left|1 - \sqrt{|x|}\right|$$

in $x_0 = -3$, se esiste.

Correzione della prova scritta di
Analisi Matematica 1 del 22 luglio 2004

ESERCIZIO 1 — Si ha,

detto $u = 1 + i$ e $v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$,

$|u| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $|v| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

per cui possiamo usare la forma trigonometrica di $u$ e $v$ dentro $z$,

$$z = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)\right)^4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^3 =$$

$$= 4\left(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi\right) \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,(-1)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

ESERCIZIO 2-A — Tenuto conto che

$2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$, $2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$

risulta

$$\int \operatorname{sen}^2(3t)\cos^2(3t)\,dt = \int \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2(6t)\,dt =$$

$$= \int \frac{1}{8}\left(1 - \cos(12t)\right) dt =$$

$$= \frac{1}{8}t - \frac{1}{8}\frac{1}{12}\,\mathrm{sen}(12t) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 2-B — Sia $t = e^x$, $dt = e^x dx$,
da cui

$$\int \frac{e^x\,dx}{\cos^2(e^x)} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \mathrm{tg}\,t + c =$$

$$= \mathrm{tg}(e^x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

ESERCIZIO 3 — Il limite proposto è

a) per $k=0$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x + 1}{\log(1+x)} = +\infty$,

mentre per $k>0$ è della forma $0/0$.
Si osservi che

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}\,x^2 + x^k}{x\,\frac{\log(1+x)}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos x}{x^2}\,x + x^{k-1}}{\frac{\log(1+x)}{x}}$$

Perciò: a) per $0<k<1$, il limite proposto vale $+\infty$;

b) per $K=1$ il limite proposto vale $1$;

c) per $K>1$ il limite proposto vale $0$.

ESERCIZIO 4 – La funzione $f$ si può riscrivere nella forma

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Il dominio di definizione della $f$ é dato da

$$D=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq\mp 1\}$$

Si ha poi $f(-x)=f(x)$, vale a dire che $f$ è pari. Basterà allora studiarla per $x\geq 0$.

Risulta poi

$$f(0)=-1$$

Inoltre

$$f(x)>0 \quad \text{per} \quad x^2-1>0, \quad |x|>1;$$

$$\lim_{x\to +1^-} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x)=+\infty, \quad \text{asintoto verticale}$$

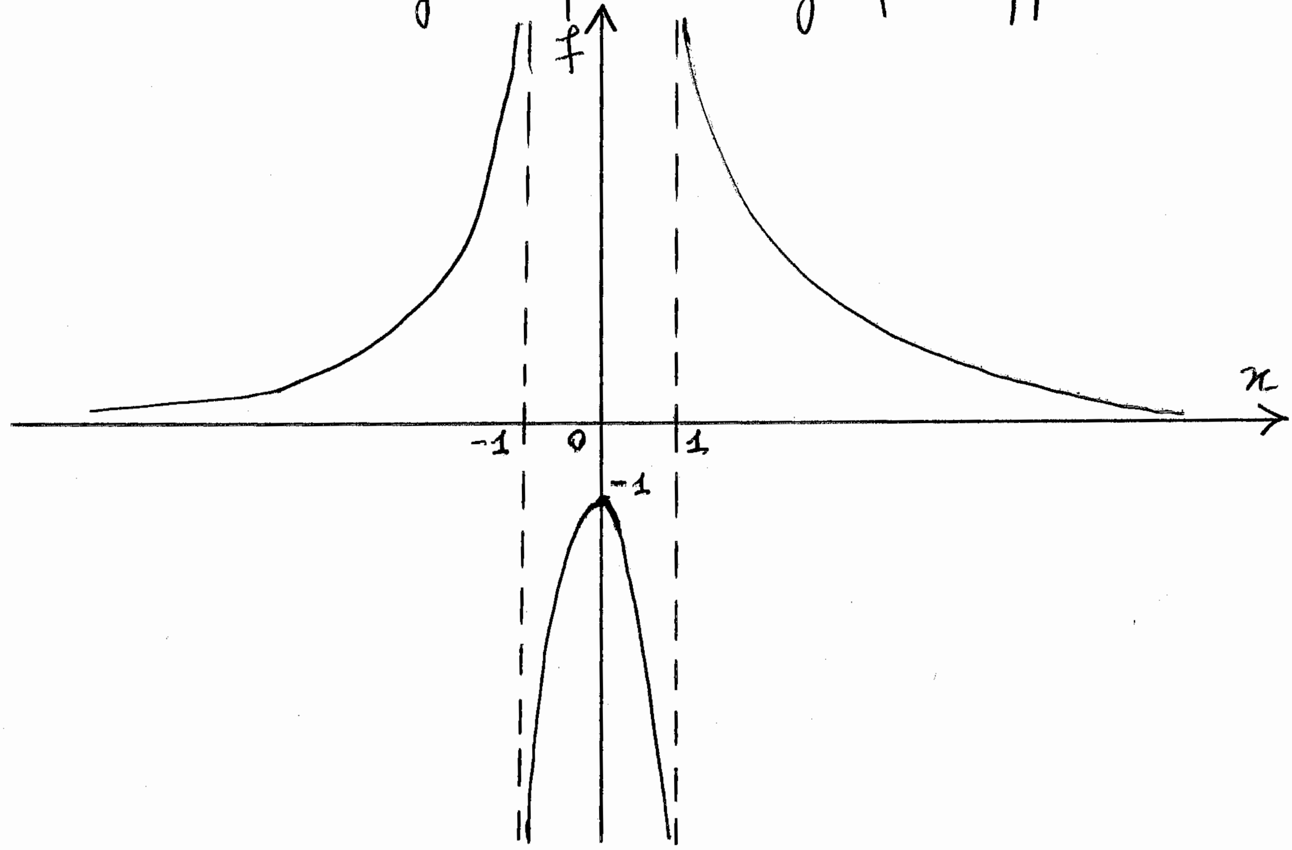
$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=0 \quad (\text{asintoto orizzontale}).$$

Passiamo ora a studiare la derivata prima

$$f'(x)=-\frac{1}{3}\,2x\,(x^2-1)^{-\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\,\frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}\geq 0$$

per $x\leq 0$.

Possiamo disegnare perciò il grafico approssimativo




ESERCIZIO 5 — La funzione è definita $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si ha
$$1-\sqrt{|x|} \geq 0 \text{ per } \sqrt{|x|} \leq 1, \text{ ovvero per}$$

$|x| \leq 1$. Poichè siamo interessati alla funzione vicino a $x_0 = -3$, la funzione che ci interessa è

$$\varphi(x) = x^2+2+\left(1-\sqrt{-x}\right) = x^2-\sqrt{-x}+3,$$

$$\varphi'(x) = 2x+\frac{1}{2\sqrt{-x}}, \text{ da cui } \varphi'(-3) = -6+\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

mentre $\varphi(-3) = 9-\sqrt{3}+3 = 12-\sqrt{3}$. La retta tangente è perciò $y = (12-\sqrt{3})+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}-6\right)(x+3)$.

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Gestionale
Docente: R. Sampalmieri – L'Aquila, 8 settembre 2004

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________

## Esercizio 1 [6+4 punti]

Calcolare i seguenti limiti:

**a)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2\sqrt{x}\sin x) - 2\sin\frac{x}{2}}{e^{\sin\sqrt{x}} + x^2\log x - 1}$

**b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left((1+\cos 3x)^{\sin x}\right)^{\frac{1}{\tan x}}$

## Esercizio 2 [9 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log x + 1}{\log x - 1}}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

## Esercizio 3 [5 punti]

Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

## Esercizio 4 [6 punti]

Scrivere in forma trigonometrica le radici quinte di $1-i$.

# Correzione prova scritta di Analisi Matematica 1 dell'8 settembre 2004

## ESERCIZIO 1-A — Usando i limiti notevoli

$$\lim_{t\to 0}\frac{\log(1+t)}{t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}= \quad ,$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1,\quad \lim_{t\to 0} t\log t=0 \quad ,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(1+2\sqrt{x}\operatorname{sen}x)-2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{e^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}+x^2\log x-1}=$$ dividendo numeratore e denominatore per $\sqrt{x}$,

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\log(1+2\sqrt{x}\operatorname{sen}x)}{\sqrt{x}}-\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{e^{\operatorname{sen}\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}\right)+x^{3/2}\log x}=0$$

visto che il numeratore tende a zero (lo fanno entrambi i termini) mentre il denominatore a 1 (il primo termine tende a 1 mentre il secondo a zero).

## ESERCIZIO 1-B — Risulta banalmente

$$\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\cos(3x)\right)^{\operatorname{sen}x}\right)^{1/\operatorname{tg}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\cos(3x)\right)^{\cos x}=2$$

visto che la funzione è continua (la forma non è indeterminata).

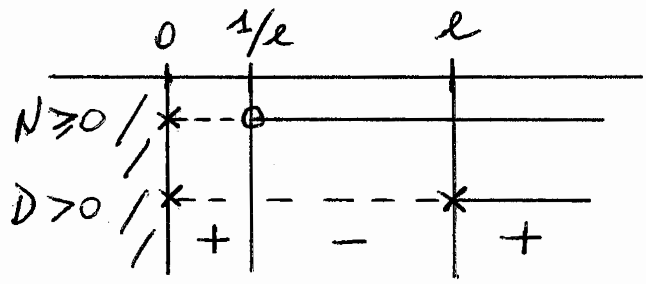
ESERCIZIO 2 – Per determinare il dominio di definizione della funzione studiamo la disequazione

$$\frac{\log(x)+1}{\log(x)-1} \geq 0$$

a) $\log(x)+1 \geq 0$ per $x \geq \frac{1}{e}$,

b) $\log(x)-1 > 0$ per $x > e$.

Si ha quindi




$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} : \ 0 < x \leq \frac{1}{e} \ \text{ oppure } \ x > e \right\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{\log(x)+1}{\log(x)-1}} = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +1, \qquad f\left(\frac{1}{e}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \to e^+} f(x) = +\infty.$$

Passiamo allo studio della derivata:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\log(x)-1}{\log(x)+1}} \; \frac{\frac{1}{x}\left(\log(x)-1\right) - \frac{1}{x}\left(\log(x)+1\right)}{\left(\log(x)-1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\log(x)-1}{\log(x)+1}}\ \frac{-2}{x\left(\log(x)-1\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{\frac{\log(x)-1}{\log(x)+1}}\ \frac{1}{x\left(\log(x)-1\right)^2} \geq 0$$

mai verificata. Risulta poi

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^-} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to e^+} f'(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty, \text{ visto che}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(\log(x)-1\right)^2 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\log(x)-1\right)^2}{1/x} =$$

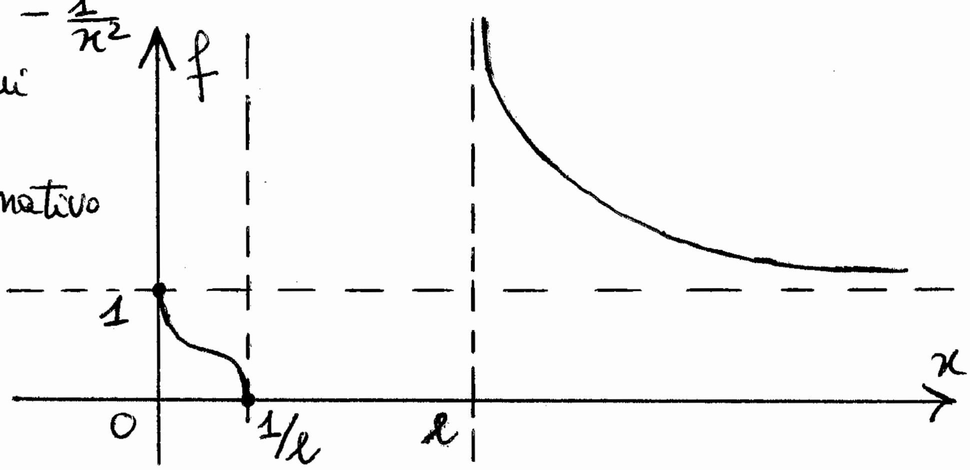
applicando la regola di De L'Hospital,

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\left(\log(x)-1\right)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)-1}{1/x} =$$

applicando encore De L'Hospital,

$$= -2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Riportiamo qui accanto un grafico approssimativo



ESERCIZIO 3 — Calcoliamo intanto l'integrale indefinito

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} =$$

mediante la sostituzione $x+1=t^2$, $x=t^2-1$, $dx=2t\,dt$

$$= \int \frac{(t^2-1)\,2t\,dt}{t} = 2\int (t^2-1)\,dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + c,$$

$c \in \mathbb{R}$, per cui

$$\int_1^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=4} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{125} - 2\sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{8} + 2\sqrt{2}.$$

ESERCIZIO 4 — Scriviamo $w = 1 - i$ in forma esponenziale:

$$w = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Perciò

$$z_k = \sqrt[10]{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{20} + \frac{2k\pi}{5}\right)}, \quad k = \mp 2, \mp 1, 0.$$

Risulta allora $z_0 = \sqrt[10]{2}\, e^{-\frac{\pi}{20} i} =$

$$= \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{20}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{20}\right)\right)$$

$$z_1 = \sqrt[10]{2}\ e^{-\frac{7\pi}{20}i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{20}\pi\right) - i\ \mathrm{sen}\left(\frac{7}{20}\pi\right)\right),$$

$$z_{-1} = \sqrt[10]{2}\ e^{-\frac{9\pi}{20}i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{9}{20}\pi\right) - i\ \mathrm{sen}\left(\frac{9}{20}\pi\right)\right),$$

$$z_2 = \sqrt[10]{2}\ e^{\frac{15}{20}\pi i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{15}{20}\pi\right) + i\ \mathrm{sen}\left(\frac{15}{20}\pi\right)\right)$$

$$z_{-2} = \sqrt[10]{2}\ e^{-\frac{17}{20}\pi i} = \sqrt[10]{2}\left(\cos\left(\frac{17}{20}\pi\right) - i\ \mathrm{sen}\left(\frac{17}{20}\pi\right)\right)$$

# Analisi Matematica 1 (6 CFU)
## Ingegneria Gestionale

Docente: R. Sampalmieri – L'Aquila, 22 settembre 2004

Cognome e nome: ______________________________

Matricola: ____________

## Esercizio 1 [6 punti]

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(2x) - x^8 + \tan^7 x}{\sin x\sqrt{1-\cos x} + x^8}$$

## Esercizio 2 [6 punti]

Determinare estremo inferiore e superiore, minimo e massimo (se esistono) del dominio di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{x-2}\right) + \log(2x^2 - 2x - 1).$$

## Esercizio 3 [6 punti]

Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$ e tracciarne un grafico approssimativo.

## Esercizio 3 [6 punti]

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \displaystyle\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt}{\sin^3 x}$$

## Esercizio 5 [6 punti]

Calcolare, a scelta, uno dei seguenti integrali

**a)** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\, dx$

**b)** $\displaystyle\int \frac{5x-1}{3x^2+x+1}\, dx$

Correzione prova scritta di Analisi Matematica 1 del 22 settembre 2004

ESERCIZIO 1 — Si tratta di un limite in forma indeterminata $\frac{0}{0}$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\mathrm{sen}(2x))^2 - x^8 + \mathrm{tg}^7 x}{\mathrm{sen}\, x\sqrt{1-\cos x} + x^8} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x}\right)^2 - x^6 + \frac{\mathrm{tg}^7 x}{x^2}}{\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\,\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} + x^6}$$

Risulta

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x}\right)^2 = 4, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{x^2} = 1,$$

per cui

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^7 x}{x^2} = 0, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Il limite proposto perciò non esiste: infatti

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\frac{\mathrm{sen}(2x)}{x}\right)^2 - x^6 + \frac{\mathrm{tg}^7 x}{x^2}}{\frac{\mathrm{sen}\, x}{x}\,\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} + x^6} = \frac{4}{1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -4\sqrt{2},$$

mentre

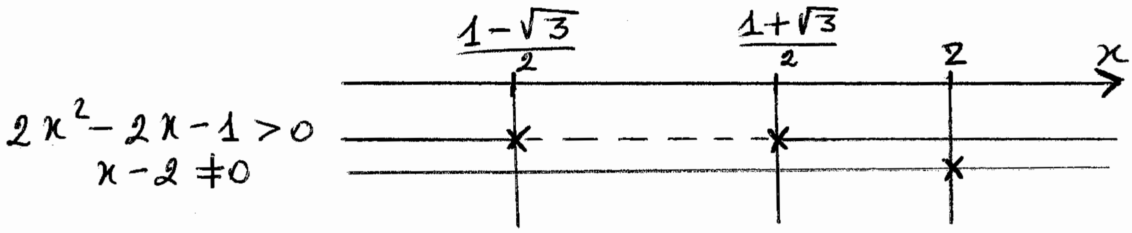
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^2 - x^6 + \frac{\operatorname{tg}^7 x}{x^2}}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} + x^6} = \frac{4}{1\cdot \sqrt{2}/2} = 4\sqrt{2}$$

ESERCIZIO 2 — La $f$ è definita per

$$\begin{cases} 2x^2-2x-1>0 \\ x-2\neq 0 \end{cases}$$

$2x^2-2x-1=0$ per

$$x=\frac{1\mp\sqrt{1+2}}{2}=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$$




Abbiamo quindi

$$D=\left\{x\in\mathbb{R}:\ x<\frac{1-\sqrt{3}}{2},\ \text{oppure}\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}<x<2,\ \text{oppure}\ x>2\right\}.$$

Il dominio $D$ non è limitato nè dall'alto nè dal basso, per cui non esistono minimo e massimo mentre $\inf D=-\infty$, $\sup D=+\infty$.

ESERCIZIO 3 — La funzione data è definita per $x\neq 0$:

$$D=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq 0\}.$$

Risulta $f(x) > 0$ per $x > 0$ e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x}{x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$$ (visto che

il numeratore è un infinito di ordine superiore in quanto esponenziale con base $2 > 1$),

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2^x}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{2^x}{x} = +\infty.$$

Perciò $y = 0$ è un asintoto orizzontale (a $-\infty$) mentre $x = 0$ è asintoto verticale (da entrambi i lati).

Passiamo ora allo studio della derivata prima:

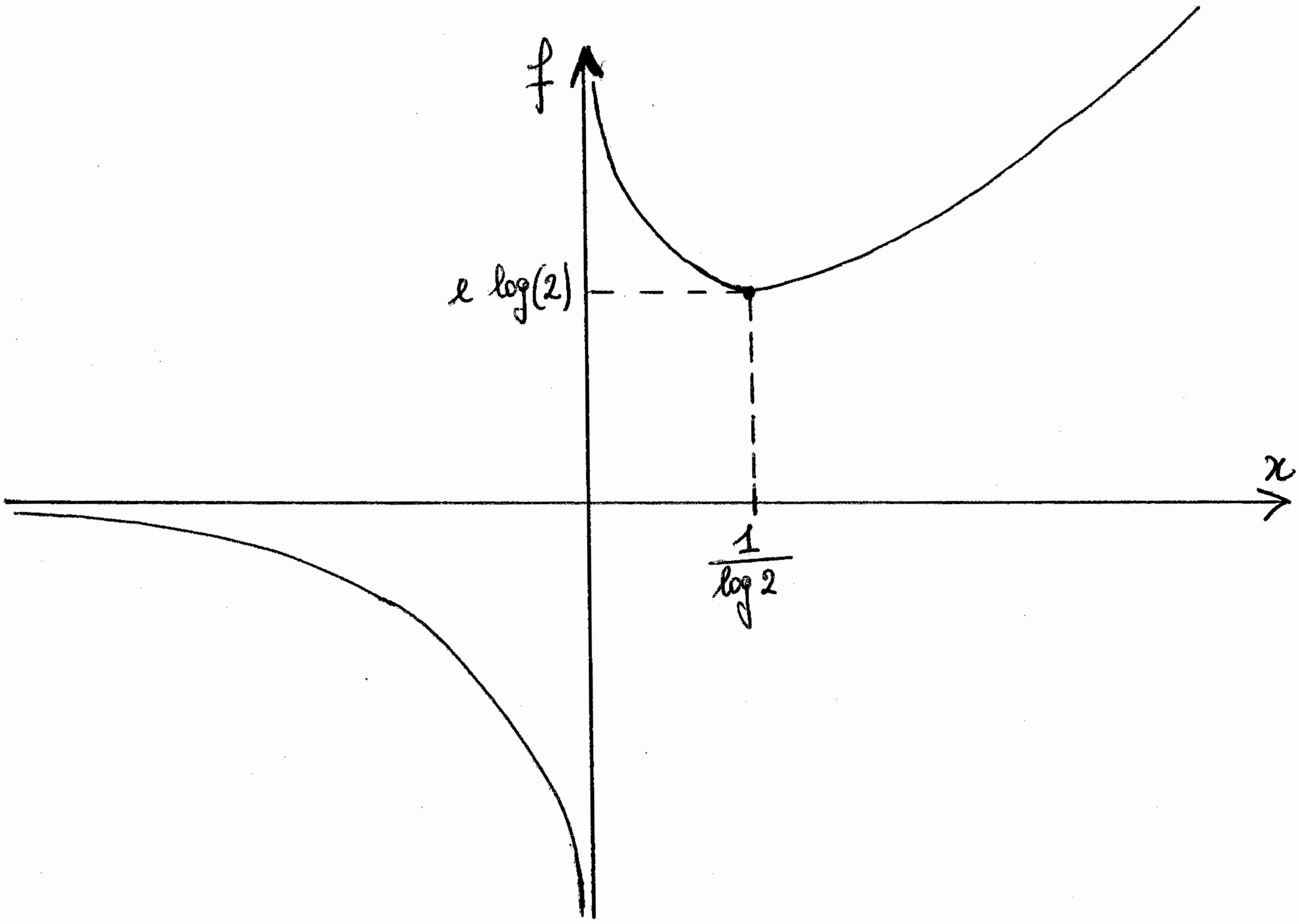
$$f'(x) = \frac{x\log(2)\, 2^x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x}{x^2}\left(x \log(2) - 1\right)$$

si ha $f'(x) \geq 0$ per $x \log 2 - 1 \geq 0$,

$\boxed{x \geq \frac{1}{\log 2}}$ e risulta $f\left(\frac{1}{\log 2}\right) = e \log(2)$,

$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ (per confronto tra gli infiniti del numeratore e del denominatore): dunque non vi è asintoto obliquo a $+\infty$.

Riportiamo per concludere un grafico approssimativo.




ESERCIZIO 4 – Il limite proposto è della forma $\frac{0}{0}$. In base al teorema della media integrale si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt = 1$$

per cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt}{(\operatorname{sen} x)^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\left(\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,dt\right)}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3} = 0,$$

visto che è anche $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3 = 1$.

ESERCIZIO 5-A — Mediante la sostituzione
$u = \operatorname{arctg} x$ si ha
$du = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, da cui

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}\sqrt{u^3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

e quindi $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + c,$
$c \in \mathbb{R}.$

ESERCIZIO 5-B — Si tratta dell'integrale di una funzione razionale.
Si ha

$$3x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{-1 \mp \sqrt{1-12}}{2}$$

ovvero le radici sarebbero complesse coniugate.
D'altra parte

$$3x^2 + x + 1 = \left(3x^2 + x + \frac{1}{12}\right) + \frac{11}{12} =$$

$$= \frac{11}{12}\left[\frac{12}{11}\left(\sqrt{3}\,x + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right] =$$

$$= \frac{11}{12}\left[\left(\frac{6}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}\right)^2 + 1\right]$$

Usiamo allora la sostituzione $u = \frac{6}{\sqrt{11}}x + \frac{1}{\sqrt{11}}$

$$du = \frac{6}{\sqrt{11}}\,dx, \qquad x = \frac{\sqrt{11}}{6}u - \frac{1}{6}$$

Si ha allora

$$\int \frac{5x-1}{3x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \int \frac{\left(\frac{5\sqrt{11}}{6}u - \frac{5}{6} - 1\right)\frac{\sqrt{11}}{6}du}{\frac{11}{12}\left[u^2+1\right]} = \int \frac{\left(\frac{5}{3}u - \frac{\sqrt{11}}{3}\right)}{u^2+1}du$$

$$= \frac{5}{6}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du - \frac{\sqrt{11}}{3}\int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{5}{6}\log|u| - \frac{\sqrt{11}}{3}\,\mathrm{arctg}\,u + c =$$

$$= \frac{5}{6}\log\left|\frac{6x}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}}\right| - \frac{\sqrt{11}}{3}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{6x}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}}\right] + c,$$

$c \in \mathbb{R}$.